КОМП'ЮТЕРНІ ЗАСОБИ, МЕРЕЖІ ТА СИСТЕМИ

L. Vakal

USING OF CHEBYSHEV APPROXIMATION FOR SOLVING OF INTEGRAL EQUATIONS

Two methods for solving of Fredholm integral equations using Chebyshev approximation are proposed. The methods allow to enlarge of solutions accuracy.
Key words: Chebyshev approximation, integral equations.

Предложены два метода решения интегральных уравнений Фредгольма с применением наилучшей чебышевской аппроксимации функций, позволяющие повысить точность приближенных решений.
Ключевые слова: чебышевская аппроксимация, интегральные уравнения.

Запропоновано два методи розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма з використанням чебишовської апроксимації функцій, які дозволяють підвищити точність наближених розв'язків.
Ключові слова: чебишовська апроксимація, інтегральні рівняння.

© Л.П. Вакал, 2011

УДК 519.6:004.42

Л.П. ВАКАЛ

ЗАСТОСУВАННЯ ЧЕБИШОВСЬКОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Вступ. Багато задач математичної фізики зводяться до і нтегральних рівнянь Фредгольма. Це, наприклад, задачі відновлення сигналу в теорії автоматичного керування, визначення фононного спектра кристалів за теплоємністю, оптимальної лінійної фільтрації за наявності білого шуму, визначення інтенсивності народження часток в атмосфері під впливом світлового потоку та ін. [1, 2].

Питання застосування чебишовських наближень для розв'язання інтегральних рівнянь у науковій літературі, окрім роботи [3], практично не розглядались. У даній статті пропонуються два аналітичні методи, в яких задача наближеного розв'язання лінійних рівнянь Фредгольма зводиться до задачі найкращого чебишовського наближення функцій узагальненими поліномами за спеціальними системами базисних функцій. Такий підхід дозволяє підвищити точність наближених розв'язків і застосувати для їх знаходження ефективні програмні засоби чебишовської апроксимації функцій [4].

Постановка задачі. Розглядаються лінійні інтегральні рівняння Фредгольма I роду

$$\lambda\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x) \qquad (1)$$

та II роду

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x), \qquad (2)$$

де $K(x,s)$ – задана неперервна при $a \le x \le b$, $a \le s \le b$ функція, яка називається ядром рівняння; $f(x)$ – задана неперервна на $[a,b]$

функція; $y(x)$ – шукана функція (розв'язок рівняння).

Одним з найбільш поширених на практиці методів розв'язання рівнянь (1), (2) є метод квадратур [1, 5]. Він полягає у заміні інтегрального рівняння скінченною системою алгебраїчних рівнянь. Для цього застосовується один із методів чисельного інтегрування. Менш тривіальним є метод заміни ядра рівняння близьким до нього виродженим ядром [5, 6]. До переваг даного методу слід віднести можливість обходитися системами рівнянь, як правило, значно меншого порядку, ніж у методі квадратур, що є суттєвим моментом при практичних обчисленнях [1]. Далі описуються два методи розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма, один з яких є розвитком згаданого методу заміни ядра виродженим.

Метод найкращої чебишовської апроксимації ядра інтегрального рівняння виродженим ядром. Якщо в рівнянні Фредгольма (2) ядро, яке позначимо $H(x,s)$, вироджене, тобто його можна подати у вигляді скінченого ряду

$$H(x,s)=\sum_{k=1}^{n} z_k A_k(x) B_k(s), \tag{3}$$

де $A_1(x),\dots,A_n(x)$ і $B_1(x),\dots,B_n(x)$ – системи лінійно незалежних на проміжку $[a,b]$ функцій, то розв'язок цього рівняння можна знайти в явному вигляді. Розв'язком рівняння (2) буде функція $\tilde{y}(x)$ вигляду

$$\tilde{y}(x)= f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k A_k(x). \tag{4}$$

Невідомі коефіцієнти $c_1,\dots,c_n$ знаходяться з системи n лінійних рівнянь [3]:

$$c_k-\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}c_j(x)= f_k,\ \left(k=\overline{1,n}\right), \text{ де } \begin{cases} f_k=\int_a^b z_k B_k(s) f(s)ds \\ \alpha_{kj}=\int_a^b z_k B_k(s) A_j(s)ds \end{cases}. \tag{5}$$

Якщо визначник системи (5) не дорівнює нулю, тобто λ не є характеристичним числом ядра $K(x, s)$, то система має єдиний розв'язок для $c_1,\dots,c_n$, відповідно інтегральне рівняння (2) з виродженим ядром (3) теж має єдиний розв'язок $\tilde{y}(x)$, який визначається за формулою (4) [1].

Розв'язок інтегрального рівняння (2) з довільним (не виродженим) ядром $K(x,s)$ можна апроксимувати розв'язком рівняння з виродженим ядром $H(x,s)$, яке підбирається так, щоб $|H(x,s)-K(x,s)|<\varepsilon$ при $a\le x\le b$, $a\le s\le b$. Якщо побудувати достатньо близьке до $K(x,s)$ вироджене ядро $H(x,s)$, то розв'язавши рівняння з виродженим ядром, ми отримаємо розв'язок $\tilde{y}(x)$, близький до розв'язку $y(x)$ рівняння з ядром $K(x,s)$ і тією самою правою частиною [7], тобто буде справедливою нерівність $\left|\tilde{y}(x)-y(x)\right|<\delta$ (δ залежить від ε).

Існує декілька способів побудови вироджених ядер, близьких до даного. Наприклад, ядро $K(x,s)$ можна апроксимувати інтерполяційним поліномом, частковою сумою ряду Тейлора, поліномом найкращого квадратичного наближення і т. д. [1, 5, 6]. Кожен з цих способів має свої недоліки, зокрема, ряди Тейлора дають непогане наближення тільки в околі деякої точки, але не на усьому проміжку визначення $K(x,s)$.

Нами пропонується для побудови виродженого ядра застосовувати найкращу чебишовську апроксимацію функції $K(x,s)$, що дозволить забезпечити задану точність наближення ядра рівняння (2) на всьому проміжку його визначення. У цьому випадку функція $K(x,s)$ замінюється такою функцією $H^*(x,s)$ з класу $\{H\}$ узагальнених поліномів двох змінних $H(x,s)=\sum\limits_{k=1}^{n} z_k \psi_k(x,s)$ за системою лінійно незалежних базисних функцій $\psi_k(x,s)=A_k(x)B_k(s)$, для якого максимальне за модулем відхилення від функції $K(x,s)$ в області $D=\{a\le x\le b,\ a\le s\le b\}$ буде мінімальним

$$\max_{(x,s)\in D}\left|H^*(x,s)-K(x,s)\right|=\min_{\{H\}}\max_{(x,s)\in D}\left|H(x,s)-K(x,s)\right|. \tag{6}$$

Слід зазначити, що найкращий чебишовський апроксимант $H^*(x,s)$ дає меншу похибку (в максимум-нормі) наближення функції $K(x,s)$ в області *D*, ніж найкращий квадратичний апроксимант того ж класу [3].

Розглянемо більш детально метод найкращої чебишовської апроксимації ядра рівняння виродженим ядром на прикладі розв'язання такого інтегрального рівняння Фредгольма II роду

$$y(x)+\int_0^1 x\left(e^{xs}-1\right)y(s)ds=e^x-x. \tag{7}$$

Апроксимуємо ядро $K(x,s)=x\left(e^{xs}-1\right)$ рівняння (7) виродженим ядром вигляду $H(x,s)=z_1x^2s+z_2x^3s^2+z_3x^4s^3$. Функцію $H(x,s)$ можна розглядати як узагальнений поліном двох змінних за системою 3-х базисних функцій $\psi_1(x,s)=x^2s$, $\psi_2(x,s)=x^3s^2$, $\psi_3(x,s)=x^4s^3$. У результаті обчислень за програмою найкращого чебишовського наближення узагальненими поліномами [4] на двовимірній сітці з кроком 0,1 за кожною змінною отримуємо такі значення коефіцієнтів полінома $H(x,s)$: $z_1=1{,}011753$, $z_2=0{,}432039$, $z_3=0{,}273892$, при цьому похибка апроксимації ядра $K(x,s)$ не перевищує 0,0006.

Далі замість інтегрального рівняння (7) розв’язуємо рівняння

$$y(x)+\int\limits_0^1 H(x,s)y(s)ds = e^x - x \tag{8}$$

з виродженим ядром $H(x,s)=1{,}011753x^2s+0{,}432039x^3s^2+0{,}273892x^4s^3$. Розв’язком рівняння (8) згідно з (4) є функція $\tilde{y}(x)=e^x-x+c_1x^2+c_2x^3+c_3x^4$. Невідомі коефіцієнти c_i відповідно до формул (5) знаходимо з системи 3-х лінійних рівнянь: $c_1=0{,}4987,\ c_2=-0{,}16455,\ c_3=-0{,}05057$.

Таким чином, наближеним розв’язком інтегрального рівняння (7) є функція

$$\tilde{y}(x)=e^x-x-0{,}4987x^2-0{,}16455c_2x^3-0{,}05057c_3x^4. \tag{9}$$

Для порівняння апроксимуємо ядро $K(x,s)$ сумою перших 3-х членів його розкладу в ряд Тейлора $\overline{H}(x,s)=x^2s+\dfrac{x^3s^2}{2}+\dfrac{x^4s^3}{6}$. У цьому випадку наближений розв’язок матиме вигляд [5]

$$\bar{y}(x)=e^x-x-0{,}5010x^2-0{,}1671c_2x^3-0{,}0422c_3x^4. \tag{10}$$

Оскільки відомий точний розв’язок $y(x)=1$ рівняння (7) [5], то можна порівняти точність наближених розв’язків (9) і (10). Як видно з таблиці, абсолютна похибка $\delta_1=0{,}004$ розв'язку (9), для знаходження якого застосовувалась найкраща чебишовська апроксимація ядра $K(x,s)$, є удвічі меншою, ніж похибка δ_2 розв'язку (10), отриманого з використанням апроксимації функції $K(x,s)$ відрізком ряду Тейлора.

ТАБЛИЦЯ. Порівняння наближених розв’язків $\tilde{y}(x)$ і $\bar{y}(x)$ рівняння (7)

Значення x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Розв’язок $\tilde{y}(x)$	1,0	1,00006	1,0002	1,0005	1,001	1,004
Розв’язок $\bar{y}(x)$	1,0	0,99996	0,9999	1,0002	1,002	1,0080
Похибка $\delta_1=\lvert\tilde{y}-y\rvert$	0,0	0,00006	0,0002	0,0005	0,001	**0,004**
Похибка $\delta_2=\lvert\bar{y}-y\rvert$	0,0	0,00004	0,0001	0,0002	0,002	**0,008**

Метод мінімізації максимальної за модулем інтегральної нев’язки. Будемо шукати наближений розв'язок $y_n(x)$ рівняння Фредгольма (2) у вигляді

$$y_n(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x), \tag{11}$$

де $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ – деякі задані лінійно незалежні функції. У цьому випадку інтегральна нев’язка матиме вигляд

$$\mu(x;c_1,\ldots,c_n)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(s)ds-f(x). \qquad (12)$$

Мінімізувати нев'язку (12) можна різними методами, наприклад, методом колокацій, найменших квадратів, Бубнова–Гальоркіна та ін. [5, 6]. Пропонуємо знаходити невідомі параметри $c_1,\ldots,c_n$ з умови мінімуму максимальної за модулем інтегральної нев'язки (12)

$$\max_{a\le x\le b}\left|\mu(x;c_1,\ldots,c_n)\right|=\min. \qquad (13)$$

Запишемо нев'язку μ у вигляді

$$\mu(x;\,c_1,\ldots,c_n)=\Psi(x;c_1,\ldots,c_n)-f(x),$$

$$\Psi(x;c_1,\ldots,c_n)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(s)ds. \qquad (14)$$

Як видно з формули (14), функція Ψ лінійно залежить від c_k, тому її можна розглядати як узагальнений поліном за деякою системою функцій ψ_k :

$$\Psi(x;c_1,\ldots,c_n)=\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k(x). \qquad (15)$$

Отже, задача визначення параметрів c_k наближеного розв'язку (11) інтегрального рівняння Фредгольма з умови (13) еквівалентна задачі найкращого чебишовського наближення функції $f(x)$ на множині точок $x\in[a,b]$ узагальненим поліномом $\Psi^*(x;c_1,\ldots,c_n)$ вигляду (15), а саме:

$$\max_{a\le x\le b}\left|\Psi^*(x)-f(x)\right|=\min_{\{c_1,\ldots,c_n\}}\max_{a\le x\le b}\left|\Psi(x;c_1,\ldots,c_n)-f(x)\right|.$$

Коефіцієнти полінома $\Psi^*(x)$ і будуть шуканими значеннями параметрів c_k наближеного розв'язку $y_n(x)$ інтегрального рівняння (2).

Розглянемо два приклади розв'язання інтегральних рівнянь за цим методом.

Приклад 1. Знайти розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма I роду

$$\int_0^1 K(x,s)y(s)ds=x^4-2x^3+x,\ K(x,s)=\begin{cases}x(1-s) & (0\le x\le s\le 1)\\ s(1-x) & (0\le s\le x\le 1)\end{cases}. \qquad (16)$$

До аналогічного рівняння приходять у задачах визначення статичного навантаження, під дією якого закріплена на кінцях $x=0$ і $x=1$ струна одиничної довжини приймає форму, яка описується правою частиною рівняння [5].

Розв'язання. Наближений розв'язок рівняння (16) шукаємо у вигляді $y_3(x)=c_1+c_2x+c_2x^2$. У цьому випадку інтегральна нев'язка буде такою:

$$\mu(x)=\int_0^1 K(x,s)\left(c_1+c_2s+c_2s^2\right)ds-x^4+2x^3-x=$$

$$=\frac{c_1}{2}\left(x-x^2\right)+\frac{c_2}{6}\left(x-x^3\right)+\frac{c_3}{12}\left(x-x^4\right)-x^4+2x^3-x.$$

За методом мінімізації максимальної за модулем інтегральної нев'язки задача визначення невідомих c_1, c_2, c_3 зводиться до задачі найкращого чебишовського наближення функції x^4-2x^3+x на проміжку $[0, 1]$ узагальненим поліномом

$$\Psi=\sum_{k=1}^{3}c_k\psi_k,\ \psi_1(x)=\frac{1}{2}\left(x-x^2\right),\ \psi_2(x)=\frac{1}{6}\left(x-x^3\right),\ \psi_3(x)=\frac{1}{12}\left(x-x^4\right).$$

У результаті обчислень за програмою [4] на сітці з кроком 0,01 за x отримуємо такі результати: $c_1=0$, $c_2=12$, $c_3=-12$, $\mu=0$. Отже, шуканий наближений розв'язок має вигляд $y_3(x)=12x-12x^2$. Він є точним розв'язком інтегрального рівняння (16), що легко перевіряється прямою підстановкою $y_3(x)$ в (16).

Приклад 2. Знайти розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма II роду

$$y(x)-\int_{-1}^{1}sh(x+s)y(s)ds=x^2. \tag{17}$$

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді $y_2(x)=x^2+c_1+c_2x$. У цьому випадку інтегральна нев'язка є такою

$$\mu(x)=c_1(1-\alpha\, shx)+c_2\,(x-\beta\, chx)-\gamma\, shx,$$

$$\alpha=2sh1\approx 2{,}3504;\ \beta=2e^{-1}\approx 0{,}7358;\ \gamma=6sh1-4ch1\approx 0{,}8788.$$

Таким чином, задача знаходження невідомих c_1 і c_2 зводиться до задачі найкращого чебишовського наближення функції $\gamma\, shx$ на множині точок $-1\le x\le 1$ узагальненим поліномом $\Psi(x)=c_1\psi_1(x)+c_2\psi_2(x)$ за системою 2-х базисних функцій $\psi_1(x)=1-\alpha shx$ і $\psi_2(x)=x-\beta chx$. З використанням програми [4] на сітці з кроком 0,01 за x отримуємо такі результати: $c_1=-0,6128$, $c_2=-0,65996$, $|\mu|\le 0{,}1365$. Отже, наближеним розв'язком рівняння (17) є функція

$$y_2(x)=x^2-0{,}6128-0{,}65996x. \tag{18}$$

Оскільки ядро $K(x,s)=sh(x+s)=shxchs+chxshs$ рівняння (17) вироджене, то можна отримати його точний розв'язок [6]

$$y(x)=x^2+\overline{\alpha}shx+\overline{\beta}chx;\ \overline{\alpha}=\frac{6sh1-4ch1}{2-(0{,}5sh2)^2}\approx -0{,}6821;$$

$$\overline{\beta}=\overline{\alpha}(0{,}5sh2-1)\approx -0{,}5548.$$

Це дозволяє порівняти точність розв'язку (18), отриманого методом мінімізації максимальної за модулем інтегральної нев'язки, і розв'язку

$$\bar{y}_2(x)=x^2-0{,}5423-0{,}5613x, \tag{19}$$

знайденого методом найменших квадратів [6]. Обчислення показують, що абсолютна похибка наближеного розв'язку (18) в 1,4 рази менша, ніж похибка наближеного розв'язку (19). Отже, метод мінімізації максимальної за модулем інтегральної нев'язки дозволяє знаходити більш точний розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма, ніж метод найменших квадратів.

Висновки. Для наближеного розв'язання лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма було запропоновано два аналітичні методи з використанням найкращих чебишовських наближень. У першому методі, який є розвитком відомого методу заміни ядра близьким до нього виродженим ядром, передбачається застосування найкращої чебишовської апроксимації ядра інтегрального рівняння Фредгольма II роду узагальненими поліномами двох змінних за спеціальними системами базисних функцій. Показано, що використання чебишовської апроксимації забезпечує задану точність наближення в усій області визначення ядра і дозволяє отримати розв'язок інтегрального рівняння з більшою точністю, ніж при використанні інших видів наближень, зокрема, найкращих квадратичних наближень і часткових сум рядів Тейлора. В другому методі – мінімізації максимальної за модулем інтегральної нев'язки – розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма зводиться до побудови найкращих чебишовських наближень функцій однієї змінної. Ефективність методу було підтверджено на прикладах розв'язання рівняння Фредгольма I роду (задача про знаходження статичного навантаження, під дією якого закріплена на кінцях струна приймає задану форму), де вдалося отримати точний розв'язок, та рівняння Фредгольма II роду, для якого знайдений за цим методом наближений розв'язок є більш точним, ніж розв'язок, отриманий за методом найменших квадратів.

1. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. *Василенко Г.И.* Теория восстановления сигналов. – М.: Сов. радио, 1979. – 272 с.
3. *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближений. Чебышевские приближения. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
4. *Каленчук-Порханова А.О., Вакал Л.П.* Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних // Комп'ютерні засоби, мережі і системи. – 2007. – № 6. – С. 141–148.
5. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 2. – М.: Наука, 1966. – 640 с.
6. *Манжиров А.В., Полянин А.Д.* Методы решения интегральных уравнений. Справочник. – М.: Факториал, 1999. – 272 с.
7. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1975. – 304 с.

Отримано 05.09.2011