УДК 519.6:004.42

Л.П. ВАКАЛ

РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ ЧЕБИШОВСЬКИХ НАБЛИЖЕНЬ

L. Vakal

SOLVING OF BOUNDARY PROBLEMS USING SOFTWARE FOR CHEBYSHEV APPROXIMATIONS

Two methods using Chebyshev approximations for finding boundary problems solutions are considered. Examples of proposed methods application are given.
Key words: Chebyshev approximations, boundary problems, ordinary and partial differential equations.

Предлагаются два метода нахождения решений краевых задач с использованием чебышевских приближений. Приводятся примеры решения задач.
Ключевые слова: чебышёвские приближения, краевые задачи, дифференциальные уравнения обыкновенные и в частных производных.

Пропонуються два методи знаходження розв'язків крайових задач з використанням чебишовських наближень. Наводяться приклади розв'язання задач.
Ключові слова: чебишовські наближення, крайові задачі, диференціальні рівняння звичайні та з частинними похідними.

Вступ. За можливостями застосування в різних прикладних задачах найкращі чебишовські (рівномірні) наближення, на думку багатьох спеціалістів [1, 2], значно переважають інші, більш грубі, способи наближень – інтерполяційний і квадратичний. Проте широке використання чебишовських наближень на практиці довгий час гальмувалося через труднощі обчислювального характеру. Останнім часом завдяки появі ефективних програмних засобів рівномірні наближення стали активно використовуватися при розв'язанні прикладних задач у різних областях науки і техніки, наприклад, при розрахунку електричних фільтрів, при апроксимації температурної характеристики термодіодного сенсора, при математичній обробці дослідних даних, при стисненні чисельної інформації [1, 3, 4].

Такими ж важливими за своїм практичним значенням є різні можливі застосування чебишовських наближень для розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь як звичайних, так і з частинними похідними, до яких приходять при моделюванні різних фізичних процесів. Проте в науковій літературі це питання висвітлено недостатньо. В роботах [1, 2, 5] розглянуто лише декілька прикладів розв'язання крайових задач з використанням чебишовських наближень. Дана робота в деякій мірі має заповнити прогалини у цьому питанні.

У статті розглядаються два методи наближеного розв’язання крайових задач: метод чебишовських наближень і метод чебишовських наближень на межі. Перший метод описується у застосуванні до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння, другий – до крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними.

Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Серед крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь суттєва частка припадає на задачі для рівнянь і систем другого порядку. Такі задачі виникають у балістиці, теорії пружності та ін. Лінійна крайова задача для диференціального рівняння другого порядку полягає у знаходженні розв’язку рівняння

$$Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \tag{1}$$

який задовольняє дві крайові умови

$$l_1 u = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1, \; l_2 u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2, \tag{2}$$

де p, q, f – неперервні на $[a,b]$ функції; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – задані числа і $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1, 2$.

Знайти точний розв’язок крайової задачі (припускається, що розв’язок існує і він єдиний) вдається лише в окремих випадках. Тому були розроблені методи наближеного розв’язання задачі (1), (2). Серед них виділяють групу чисельних методів (метод скінченних різниць), які дозволяють отримати таблицю значень шуканої функції, та групу аналітичних методів (Гальоркіна, колокації, найменших квадратів), в яких розв'язок крайової задачі знаходять у вигляді аналітичного виразу.

Загальна ідея аналітичних методів є такою. Наближений розв’язок $y(x)$ рівняння (1) шукають у вигляді

$$y(x; c_1, \ldots, c_n) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x), \tag{3}$$

де φ_k – лінійно незалежні, двічі неперервно диференційовні на $[a,b]$ функції, що задовольняють однорідні крайові умови ($l_1\varphi_k = 0$, $l_2\varphi_k = 0$), а функція φ_0 задовольняє крайові умови (2). В якості функцій φ_k, які називаються базисними, часто вибирають поліноми, тригонометричні функції та ін. Далі вводять диференціальну нев’язку μ:

$$\mu(x; c_1, \ldots, c_n) = Ly - f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k L\varphi_k(x) + L\varphi_0(x) - f(x) \tag{4}$$

і параметри $c_1, \ldots, c_n$ наближеного розв’язку (3) визначають так, щоб зробити нев’язку (4) якомога меншою. Наприклад, у методі Гальоркіна ці параметри знаходять з умови ортогональності нев’язки (4) кожній базисній функції φ_k:

$$\int_a^b \mu(x; c_1, \ldots, c_n) \varphi_k(x) dx = 0, \; k = \overline{1,n},$$

у методі колокації – з умови рівності нев'язки (4) нулю в заданих точках $x_k \in (a,b),\ k=\overline{1,n}$, у методі найменших квадратів – з умови мінімуму інтегралу I (в інтегральному варіанті методу)

$$I=\int_a^b \mu^2(x;\ c_1,\ldots,c_n)dx$$

або мінімуму скінченної суми S (в дискретному або точковому варіанті)

$$S=\sum_{i=1}^{m}\mu^2(x_i;\ c_1,\ldots,c_n),\ x_i \in (a,b), m >> n.$$

У підсумку визначення параметрів c_k у цих методах зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь. Але обчислення матриці коефіцієнтів і координат вектора правих частин вимагає у ряді методів інтегрування по всьому відрізку. Явне обчислення інтегралів можливе тільки в тих випадках, коли функції p, q і f в рівнянні (1) мають дуже простий вигляд. Звичайно інтеграли доводиться обчислювати наближено (методами чисельного інтегрування), іноді можна скористатися комп'ютерними системами символьних обчислень.

Враховуючи сказане, для розв'язання крайової задачі (1), (2) пропонується аналітичний метод, який не потребує складних попередніх обчислень і передбачає використання ефективних програмних засобів. Це *метод чебишовських наближень*, в якому параметри c_k розв'язку (3) визначаються з умови мінімуму максимальної за модулем диференціальної нев'язки в точках $x_i \in (a,b),\ i=\overline{1,m}$:

$$\max_{1\le i\le m} |\mu(x_i;c_1,\ldots,c_n)| = \min_{c_1,\ldots,c_n},\quad m>>n, \tag{5}$$

тобто для знаходження невідомих параметрів застосовується чебишовський або мінімаксний критерій [1]. Якщо записати диференціальну нев'язку (4) у вигляді

$$\mu(x;\ c_1,\ldots,c_n)=\Psi(x;c_1,\ldots,c_n)-\tilde{f}(x), \tag{6}$$

де Ψ – узагальнений поліном за деякою системою функцій ψ_k:

$$\Psi(x;c_1,\ldots,c_n)\equiv\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k L\varphi_k(x), \tag{7}$$

а $\tilde{f}$ – функція вигляду

$$\tilde{f}(x)=f(x)-L\varphi_0(x),$$

то легко бачити, що задача знаходження параметрів c_k за мінімаксним критерієм (5) еквівалентна задачі найкращого чебишовського дискретного наближення функції $\tilde{f}(x)$ на множині точок $x_i \in (a,b),\ i=\overline{1,m}$, узагальненим поліномом вигляду (7), а саме:

$$\max_{1\le i\le m}\left|\Psi^*(x_i;c_1,\ldots,c_n)-\tilde{f}(x_i)\right|=\min_{c_1,\ldots,c_n}\max_{1\le i\le m}\left|\Psi(x_i;c_1,\ldots,c_n)-\tilde{f}(x_i)\right|. \tag{8}$$

Коефіцієнти полінома Ψ^* і будуть шуканими значеннями параметрів розв'язку (3) задачі (1), (2).

Далі наводиться приклад знаходження наближеного розв'язку лінійної крайової задачі із застосуванням програмних засобів найкращого чебишовського наближення функцій узагальненими поліномами [6].

Приклад 1. Знайти розв'язок крайової задачі

$$u^{//} + \left(1 + x^2\right)u = -1, \; u(-1) = u(1) = 0. \tag{9}$$

Розв'язання. З вигляду рівняння та крайових умов можна зробити висновок щодо парності розв'язку задачі (9). Тому наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$y(x;c_1,c_2) = c_1\left(1 - x^2\right) + c_2 x^2\left(1 - x^2\right). \tag{10}$$

Диференціальна нев'язка у цьому випадку запишеться так:

$$\mu(x;c_1,c_2) = c_1\left(-1 - x^4\right) + c_2\left(2 - 11x^2 - x^6\right) + 1. \tag{11}$$

Згідно з методом чебишовських наближень параметри c_1 і c_2 розв'язку (10) визначаємо як коефіцієнти узагальненого поліному

$$\Psi(x;c_1,c_2) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) = c_1\left(-1 - x^4\right) + c_2\left(2 - 11x^2 - x^6\right),$$

що здійснює найкраще чебишовське наближення функції $\tilde{f}(x) = -1$ на множині точок проміжку $(-1,\, 1)$.

Розрахунки виконувалися на комп'ютері за програмою [6], для роботи з якою необхідно задати тільки сітку $E_m = \left\{x_i, i = \overline{1,m}\right\} \subset (-1,1)$ та систему функцій $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$. Для сітки $E_{201} = \left\{x_i = -1 + (i-1)\cdot 0,01;\, i = \overline{1,201}\right\}$ було отримано такі значення коефіцієнтів:

$$c_1 = 0{,}946\,;\; c_2 = -\,0{,}079\,.$$

Для порівняння в табл. 1 наводяться параметри розв'язків крайової задачі (9), знайдені за іншими аналітичними методами [7]. Максимальне за модулем значення нев'язки (11) для цих методів є у 2–7 разів більшим, ніж для методу чебишовських наближень.

ТАБЛИЦЯ 1. Параметри наближених розв'язків задачі (9)

Метод	Коефіцієнти		Максимум нев'язки
	c_1	c_2	
Чебишовських наближень	0.946	– 0.079	0.104
Найменших квадратів (інтегральний)	0.985	– 0.078	0.190
Найменших квадратів (точковий)	0.932	– 0.047	0.389
Гальоркіна	0.988	– 0.054	0.436
Колокації	0.957	– 0.022	0.694

Крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Для розв’язання крайових задач для рівнянь з частинними похідними можна використовувати метод чебишовських наближень подібно до того, як він застосовувався для звичайних диференціальних рівнянь. Але в багатьох випадках доцільніше для знаходження наближеного розв'язку використовувати *метод чебишовських наближень на межі*. Опишемо цей метод на прикладі розв’язання крайової задач для диференціального рівняння з частинними похідними еліптичного типу. До таких задач приходять при вивченні стаціонарних процесів різної фізичної природи. Це, наприклад, стаціонарні електричні та магнітні поля, потенціальний рух нестисливої рідини, стаціонарні теплові поля тощо.

У випадку двох незалежних змінних x і y крайова задача для рівняння з частинними похідними еліптичного типу формулюється так: знайти функцію $u = u(x, y)$ класу $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, яка в області D задовольняє рівняння

$$Lu \equiv \Delta u + p(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + r(x, y)u = f(x, y), \tag{12}$$

а на її межі Γ – крайову умову

$$Su \equiv \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = w(x, y), \tag{13}$$

де Δu – оператор Лапласа, p, q, r, f, w – неперервні функції, $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до Γ, α і β – задані числа, причому $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Метод чебишовських наближень на межі розв’язання крайової задачі (12), (13) полягає у наступному. Задається функція $\Phi = \Phi(x,\ y; c_1, \ldots, c_n)$, що лінійно залежить від параметрів $c_1, \ldots, c_n$, а саме:

$$\Phi(x, y; c_1, \ldots, c_n) = \varphi_0(x, y) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x, y), \tag{14}$$

яка для будь-яких значень $c_1, \ldots, c_n$ точно задовольняє диференціальне рівняння (12). Невідомі параметри c_k визначають з умови мінімуму величини максимального за модулем відхилення функції $S\Phi$ на множині точок $(x_i, y_i) \in \Gamma$, $i = \overline{1, m}$, від функції крайових умов w, тобто:

$$\max_{1 \le i \le m} \left| S\Phi(x_i, y_i; c_1, \ldots, c_n) - w(x_i, y_i) \right| = \min_{c_1, \ldots, c_n}. \tag{15}$$

Позначимо Ψ функцію

$$\Psi(x,\ y; c_1, \ldots, c_n) = S\Phi(x, y) \equiv S\psi_0(x, y) + \sum_{k=1}^{n} c_k S\psi_k(x, y),$$

яку можна розглядати також як узагальнений поліномом

$$\Psi(x,\ y; c_1, \ldots, c_n) = \psi_0(x, y) + \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x, y), \tag{16}$$

за системою функцій $\psi_0 = S\varphi_0$, $\psi_k = S\varphi_k$, $k = \overline{1,n}$.

Таким чином, задача знаходження параметрів c_k за мінімаксним критерієм (15) зводиться до задачі найкращого чебишовського дискретного наближення функції w на множині точок $(x_i, y_i) \in \Gamma$ узагальненим поліномом (16)

$$\max_{1\le i\le m} \left|\Psi^*(x_i,y_i;c_1,\ldots,c_n) - w(x_i,y_i)\right| = \min_{c_1,\ldots,c_n} \max_{1\le i\le m} \left|\Psi(x_i,y_i;c_1,\ldots,c_n) - w(x_i,y_i)\right| \equiv \delta .$$

Коефіцієнти полінома найкращого наближення Ψ^* будуть шуканими значеннями параметрів розв’язку (14) задачі (12), (13).

Далі наводиться приклад застосування методу чебишовського наближення на межі для розв’язання крайової задачі про скрут балки.

Приклад 2. Знайти розв’язок задачі про скрут балки з поперечним перерізом D (див. рисунок):

$$\Delta u(x,y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \text{ в області } D,\ u(x,y) = 0 \text{ на межі } \Gamma. \qquad (17)$$

Межа Γ складається з двох відрізків прямих $y = \pm 1$ для $|x| \le 1$ та двох дуг півкіл одиничного радіуса з центрами у точках $x = \pm 1$, $y = 0$ для $|x| \ge 1$ [5].

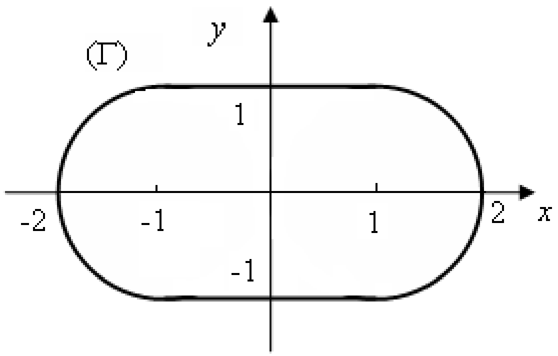

РИСУНОК. Поперечний переріз балки

Розв’язання. Наближений розв’язок шукаємо у вигляді

$$\Phi(x,y;c_1,\ldots,c_n) = \varphi_0(x,y) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x,y), \qquad (18)$$

$$\varphi_0(x,y) = -\frac{x^2+y^2}{4},\ \varphi_k(x,y) = Re(x+iy)^{2k-2},\ k = \overline{1,n}.$$

Відповідно до методу чебишовських наближень на межі параметри c_k визначаємо так, щоб максимальне за модулем відхилення функції (18) від нульових граничних значень на множині точок $(x_i, y_i) \in \Gamma$ була мінімально можливою.

З міркувань симетрії при обчисленнях обмежились чвертю контуру Г, при цьому розрахунки виконувались на сітці, що складалась з 51 точки (x_i, y_i), де $x_i = 0{,}05$, $y_i = 1$ для $i = \overline{0{,}19}$ і $x_i = 1 + \sin(i-20)\cdot\frac{\pi}{6}$, $y_i = \cos(i-20)\cdot\frac{\pi}{6}$ для $i = \overline{20{,}50}$. У табл. 2 наводяться значення коефіцієнтів розв'язків (18) та відповідні значення максимальних відхилень δ на межі, отримані за допомогою програмних засобів найкращого чебишовського наближення функцій декількох змінних для випадків n = 3, 5, 6 [6]. Слід зазначити, що коефіцієнт c_1 дає також наближене значення функції u у середній точці, тобто $c_1 - \delta \le u(0,0) \le c_1 + \delta$. Наприклад, для n = 6 має місце оцінка $0{,}4402 \le u(0,0) \le 0{,}4447$.

ТАБЛИЦЯ 2. Результати розв'язання задачі про скрут балки

Число коефіцієнтів n	Значення коефіцієнтів c_k	$\delta = \max\lvert\Phi\rvert$
3	c_1= 0,44916078; c_2 = 0,17384998; c_3 = – 0,009992441	0,015318
5	c_1= 0,44243973; c_2 = 0,18134111; c_3 = – 0,013958104; c_4= 0,00084237; c_5 = 0,00002068	0,003681
6	c_1= 0,44240959; c_2 = 0,18099185; c_3= – 0,013425684; c_4= 0,00044736; c_5 = 0,00018264; c_6= – 0,000028512	0,002244

Висновки. Для наближеного розв'язання крайових задач запропоновані два аналітичні методи з використанням чебишовських наближень. Наведені приклади підтверджують ефективність цих методів і відповідних програмних засобів при розв'язанні крайових задач як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для рівнянь з частинними похідними.

1. *Ремез Е.Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев: Наук. думка, 1969. – 623 с.
2. *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. *Андруник В., Малачівський П.* Неперервне мінімаксне сплайн-наближення температурної характеристики сенсора експоненційним виразом // Комп'ютерні технології друкарства. – 2007. – № 18. – С. 95–103.
4. *Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П.* Наилучшая чебышевская аппроксимация для сжатия численной информации // Компьютерная математика. – 2009. – № 1. – С. 99–107.
5. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 447 с.
6. *Каленчук-Порханова А.О., Вакал Л.П.* Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних // Комп'ютерні засоби, мережі і системи. – 2007. – № 6. – С. 141–148.
7. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.

Отримано 01.07.2010