Каніовська І.Ю., Агєєва І.В. **УДК 519.24**

ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ КОПУЛА ПРИ ОЦІНЦІ ФІНАНСОВИХ ПОКАЗНИКІВ

ВСТУП.

На етапі формування бюджету банку казначейство повинно оцінити цільові показники позицій в основних валютах з урахуванням того, щоб валютний ризик не став причиною суттєвих збитків або навіть банкрутства. Визначення цільових показників є по суті задачею портфельної оптимізації, де відповідно вкладом в актив є розмір позиції в валюті; активами, з котрих відбувається вибір, є безпосередньо самі валюти, а цінами активів – обмінні курси валют [1]. Таким чином, для визначення оптимальних розмірів позицій можна використовувати основний аналітичний спосіб, що припускає нормальний розподіл рядів логарифмічних доходностей обмінних курсів, або скористатися іншим способом, що дозволяє більш гнучко моделювати багатомірний розподіл. Такий інструментарій є доступним, зокрема, за допомогою застосування теорії копул. Це по суті є новим напрямком портфельної оптимізації [2], [3], [4].

Необхідно відмітити доцільність даного дослідження, а саме вказати та обґрунтувати, які кроки будуть в ньому вжиті. По-перше, дане дослідження не спирається на функцію корисності інвестора, що обирає розмір відкритої валютної позиції. Тому цільовою функцією буде очікувана доходність, а не очікувана корисність. По-друге, в подальших дослідженнях можна буде порівнювати стандартний підхід, що базується на припущенні гаусівського сумісного розподілу, та підхід, оснований на теорії копул. По-третє, для обґрунтування вибору копули завжди буде будуватися ретроспективний прогноз, що базується на даних, котрі не входять в навчальну вибірку. Таким чином, вибір копули обґрунтуємо візуальним аналізом даних та верифікацією моделей, отриманих на даних за 2008 рік. Розв'яжемо поставлену оптимізаційну задачу на даних за 2009 рік.

ПОНЯТТЯ ВАЛЮТНОГО РИЗИКУ.

Валютний ризик – це різновид ринкового ризику, що погрожує комерційному банкові майбутніми втратами внаслідок несподіваних змін валютних курсів на ринку. Важливо відмітити, що валютний ризик виникає відносно обраної валюти. Як правило її називають привілейованою. Валютний ризик також можна розраховувати відносно функціональної валюти, тобто основної валюти розрахунків. Для більшості банків на території України такою валютою є гривня. Саме зміни валютних курсів відносно гривні породжують валютний ризик для банку.

Відповідно валютний ризик виникає, коли існує ненульова позиція, що йому схильна. Така позиція називається **відкритою валютною позицією (ВВП)**, котра являє собою різницю активних та пасивних залишків банка в даній валюті.

$$ВВП_j = A_j - П_j$$, де:

$ВВП_j$ – відкрита валютна позиція банко по *j*-ій валюті або дорогоцінному металі (*j=1,2, ... m*), виражена в гривні;

$A_j, П_j$ – активи та обов'язки (пасиви) в *j*-ій валюті (дорогоцінному металі).

Відкрита валютна позиція зводиться в нуль при складанні підсумкового балансу, тобто має місце наступна рівність: $\sum_j ВВП_j = 0$.

ПОСТАНОВКА ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ.

Введемо спочатку позначення, котрі будемо використовувати при постановці оптимізаційної задачі:

FX_j – обмінний курс *j*-ої валюти до української гривні;

$FX(t)_j$ – її реалізація в момент часу *t;*

η_j - випадкова величина (логарифмічна доходність FX_j);

$\eta_j(t) = \ln\left(\frac{FX(t)_j}{FX(t-1)_j}\right)$ – її реалізація за період [*t-1,t*];

$x^{(j)}$ – розмір ВВП в *j*-ій валюті (*j=1...n*), виражений в *j*-ій валюті;

$x^{(j)} \cdot FX(t)_j$ – розмір ВВП в *j*-ій валюті (*j=1...n*), виражений у гривні;

$X = \left(x^{(1)},...,x^{(n)}\right)^T$ – вектор ВВП по всім валютам (він містить гривню, хоча ВВП по гривні не складає ризику для банку);

$R^{(j)} = \eta_j \cdot x^{(j)}$ – випадкова величина, що дорівнює добутку ВВП в *j*-ій валюті на логарифмічну доходність обміного курсу даної валюти до гривні;

$R^{(j)}(t) = \eta_j(t) \cdot x^{(j)}$ – реалізація випадкової величини в момент часу *t*;

$f_R^{(j)}(y^{(j)})$ – щільність розподілу випадкової величини $R^{(j)}$ в точці $y^{(j)}$;

$F_R^{(j)}(y^{(j)})$ – функція розподілу випадкової величини $R^{(j)}$ в точці $y^{(j)}$;

$\overline{R} = \sum_j R^{(j)}$ – цільова логарифмічна доходність ;

$f_{\overline{R}}(y)$ – щільність розподілу $\overline{R}$ в точці $y^{(j)}$;

$F_{\overline{R}}(y)$ – функція розподілу $\overline{R}$ в точці $y^{(j)}$;

$ГВ(\alpha) = -F_{\overline{R}}^{-1}(\alpha)$ – величина валютного ризику банка (границя втрат рівня α), квантиль функції розподілу $\overline{R}$.

В даному досліджені вводиться припущення: при розв'язанні задачі не вводиться умова обмеження на додатні значення параметрів (на розміри ВВП). Таким чином, при розв'язанні задачі припускається від'ємна валютна позиція , котра пояснюється як перевищення пасивів над активами банка в даній валюті.

За розглянутими позначеннями можна ввести наступну оптимізаційну задачу по керуванню валютним ризиком банку [1]:

$$\begin{cases} E(R/X) \to \max\limits_X \\ ГВ(\alpha) \le K \\ \sum\limits_j x^{(j)} FX_j = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

де *К* – капітал банка, а $\sum\limits_j x^{(j)} FX_j = 0$ - умова складання підсумкового балансу.

МЕТОДОЛОГІЯ ДОСЛІДЖЕННЯ.

Для розв'язку оптимізаційної задачі (1) використаємо наступний алгоритм аналізу даних.

Спочатку всі дані о тижневих катуваннях валют з 1 січня 2000 року по 1 січня 2010 року розділимо на три частини:

1. **А** - з 1 січня 2000 р. по 31 грудня 2007 р. – 401 точка;
2. **В** - з 1 січня 2008 р. по 31 грудня 2008 р. – 51 точка;
3. **С** - з 1 січня 2009 р. по 31 грудня 2009 р. – 51 точка;

Ціль даного розбиття – сформувати навчальну та контрольну вибірки, котрі необхідні для проведення наступних етапів дослідження:

- На першому етапі частина А використовується як навчальна вибірка для попередньої оцінки параметрів кожного з типів копул, що будуть розглядатись.
- На другому етапі частина В є контрольною вибіркою, що дозволяє обрати тип (сімейство) копули.
- На третьому етапі формується навчальна вибірка з частин А+В, котра дозволяє провести остаточну оцінку параметра вибраного типу копули.
- На кінцевому етапі частина С використовується для розв'язання розглянутої оптимізаційної задачі в рамках застосування копул.

Коротко нагадаємо поняття копули сумісного розподілу та її основні сімейства, використовуючи поняття, введені в даній роботі. Теорема Скляра [5] постулює можливість запису функції розподілу $F_R\left(y^{(1)},\dots,y^{(m)}\right)$ багатомірної випадкової величини як функції *С* від часткових розподілів її компонент $F_{R^{(j)}}\left(y^{(j)}\right)$ у вигляді: $F_R(y) = C\left(F_{R^{(1)}}\left(y^{(1)}\right);\dots;F_{R^{(m)}}\left(y^{(m)}\right)\right)$, де $y = \left(y^{(1)};\dots;y^{(m)}\right)^T$.

Тоді функція зв'язки часткових розподілів *С* и буде називатися **копулою**, вона визначається за формулою (2).

$$F_R(y) = C\left(F_{R^{(1)}}\left(y^{(1)}\right);\dots;F_{R^{(m)}}\left(y^{(m)}\right)\right) \qquad (2)$$

де $u = \left(u^{(1)};\dots;u^{(m)}\right)^T$, $u^{(j)} = F_{R^{(j)}}\left(y^{(j)}\right)$ – значення часткової кумулятивної функції розподілу.

Таким чином підібравши вигляд функції $C\left(u^{(1)};\dots;u^{(m)}\right)$ (котра за своєю природою повинна задовольняти умовам, що накладаються на функцію розподілу) за частковими розподілами $F_{R^{(j)}}\left(y^{(j)}\right)$ можна відновити багатомірну функцію розподілу $F_R\left(y^{(1)},\dots,y^{(m)}\right)$.

Видокремлюють декілька основних сімейств копул: еліпсоподібні, архімедові, екстремальні. Еліпсоподібні копули походять від аналітичних форм запису багатомірного гаусівського розподілу та розподілу Стьюдента. Вони дозволяють відновлювати симетричні спільні розподіли.

Архімедові копули можна представити у вигляді:

$$C\left(u^{(1)};\dots;u^{(m)}\right) = \varphi^{-1}\cdot\left(\varphi(u^{(1)}) + \varphi(u^{(2)}) + \dots + \varphi(u^{(m)})\right),$$

де $u^{(j)}$ - обернена функція розподілу *j*-ої випадкової величини; $\varphi(\ )$ – функція – генератор копули.

Свою назву архімедові копули отримала через аналогію з архімедовою аксіомою, котра говорить, що для будь-яких цілих додатних чисел a та b завжди знайдеться таке ціле число *n*, що буде вірне наступне співвідношення $n \cdot a > b$. Для копули введемо наступне позначення $u_c^1 = u$ та $u_c^{n+1} = C\left(u; u_c^n\right)$. Тоді $\forall u, v \in (0;1) \exists n : u_c^n > v$, що є аналогічним до аксіоми Архімеда [6].

Екстремальні копули створені на основі одномірних законів розподілу екстремумів. Для них повинно виконуватись наступне співвідношення:

$$C\left(\left[u^{(1)}\right]^t; \left[u^{(2)}\right]^t; ...; \left[u^{(m)}\right]^t\right) = C^t\left(u^{(1)}; ...; u^{(m)}\right), \ \forall t > 0.$$

Також відмітимо поняття незалежної копули, або копули добутку. Дана копула відповідає випадку незалежності випадкових величин та вводиться наступним чином: $C\left(u^{(1)}; ...; u^{(m)}\right) = u^{(1)} \cdot u^{(2)} \cdot ... \cdot u^{(m)}$.

Для відновлення сумісного розподілу розглянемо основні сімейства копул: еліпсоподібні (гаусівська, Стьюдента з 3 та 7 ступенями свободи), архімедові (Клейтона, Франка), екстремальні (Гумбеля-Хугарда, Коші). Їх функціональні форми буде наведено в таблиці 1 [1].

Таблиця 1. Сімейства копул.

Назва копули	Формула копули $C\left(u^{(1)}; ...; u^{(m)}\right)$, α– параметр копули, для архімедових копул – приведена функція-генератора $\varphi(\ )$.
Гаусівська	$\int_{-\infty}^{N_2^{-1}\left(u^{(2)}\right)} \int_{-\infty}^{N_1^{-1}\left(u^{(1)}\right)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \exp\left(1 + \frac{\left(u^{(1)}\right)^2 + \left(u^{(2)}\right)^2 - 2 \cdot \alpha \cdot u^{(1)} \cdot u^{(2)}}{2 \cdot \left(1-\alpha^2\right)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} \partial u^{(1)} \partial u^{(2)}$, де N_j– функція розподілу нормального закону розподілу випадкової величини *u(j)*;
Стьюдента	$\int_{-\infty}^{t_{v,2}^{-1}\left(u^{(2)}\right)} \int_{-\infty}^{t_{v,1}^{-1}\left(u^{(1)}\right)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \exp\left(1 + \frac{\left(u^{(1)}\right)^2 + \left(u^{(2)}\right)^2 - 2 \cdot \alpha \cdot u^{(1)} \cdot u^{(2)}}{2 \cdot \left(1-\alpha^2\right)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} \partial u^{(1)} \partial u^{(2)}$ де $t_{v,j}$ – функція розподілу Стьюдента випадкової величини *u(j)*; *v* – число ступенів свободи копули;
Франка	$-\frac{1}{\alpha} \log\left[1 + \frac{\prod_{j=1}^{m}\left(e^{-\alpha \cdot u^{(j)}} - 1\right)}{\left(e^{-\alpha} - 1\right)^{m-1}}\right]$, $\varphi\left(u^{(j)}\right) = -\frac{1}{\alpha} \log\left[1 + e^{\alpha \cdot u^{(j)}}\left(e^{-\alpha} - 1\right)\right]$;
Клейтона	$\left\{\left[\sum_{j=1}^{m}\left(u^{(j)}\right)^{-\alpha}\right]^{1/\alpha} - m + 1\right\}^{1/\alpha}$, $\varphi\left(u^{(j)}\right) = \left(u^{(j)} + 1\right)^{-1/\alpha}$;
Гумбеля-Хугарда	$\exp\left\{-\left[\sum_{j=1}^{m}\left(-\log u^{(j)}\right)^{\alpha}\right]^{1/\alpha}\right\}$, $\varphi\left(u^{(j)}\right) = \exp\left(-\left[u^{(j)}\right]^{1/\alpha}\right)$.

Для відновлення багатомірного розподілу застосовується напівпараметричний метод, коли копула оцінюється параметрично (методом рангової кореляції Кендалла, що реалізовані в програмі R, оскільки метод максимальної правдоподібності працює не в усіх випадках та зупиняється при отриманні нескінченних значень функції правдоподібності), а в якості часткових розподілів використовуються їх емпіричні функції розподілу [1].

Перед оцінкою копулою було проведено тест на незалежність [7], що перевіряє, чи є вихідна копула багатомірного розподілу незалежною копулою. Використано варіант, що перевіряє на незалежність всі можливі комбінації випадкових величин. Для кожної комбінації вираховується статистика і порівнюється з критичним значенням (графічно результати тесту представляються у вигляді «діаграми залежності», або від англ. «dependogram»; назва графіку депендограми аналогічно корелограмі, як і принцип його аналізу – якщо статистика перевищує критичне значення, гіпотеза про незалежність відкидається).

Для розв'язку оптимізаційної задачі при наявності повністю відновленого багатомірного розподілу було використано метод пошуку на сітці. Суть алгоритму полягає в послідовному переборі всіх значень змінних параметрів з заданим кроком з заданої множини перебору з записом в пам'ять лише тих комбінацій всіх параметрів, котрі дають більшу, ніж вираховувалось на попередньому кроці, доходність, що, в свою чергу, не перевищує «поріг» в розмірі капіталу оцінки границь втрат.

ВІЗУАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ.

Для розв'язку оптимізаційної задачі (1) було використано тижневі котирування трьох валют: швейцарського франка (CHF, *j*=1), євро (EUR, *j*=2) та фунта Об'єднаного Королівства Великобританії (GBP, *j*=3). Ці валюти були обрані, тому що рідше аналізувались в дослідженнях. Як наслідок, їх сумісна динаміка мало вивчена. Крім того щоденний горизонт не є реалістичним, з точки зору керування валютною позицією банку, на суттєві зміни для яких потрібно в середньому тиждень. Саме тому перевага була віддана на користь тижневих даних, котрі відповідають реальному горизонту керування валютною позицією та по кількості достатні для подальшого аналізу [1].

Нижче наведена динаміка обраних курсів за весь період з 1 січня 2000 р. по 1 січня 2010 р.

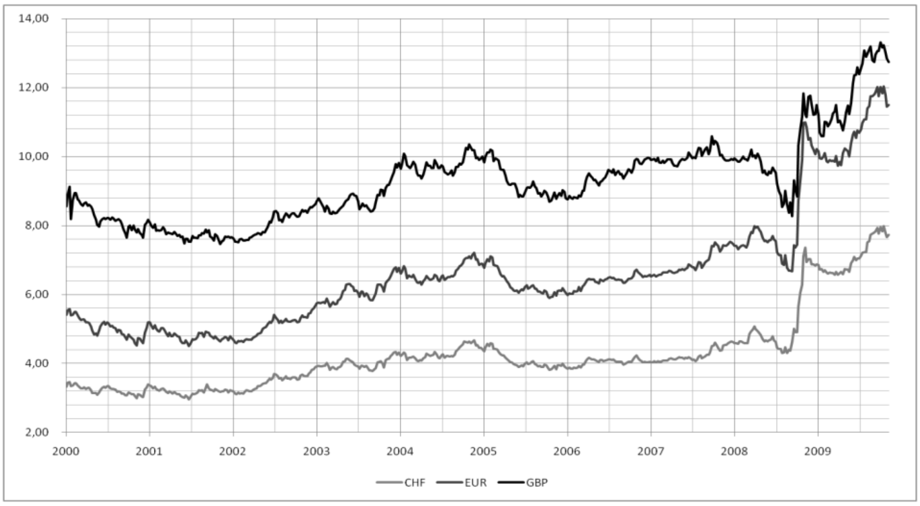

Рис. 1. Графік динаміки обмінних курсів в період з січня 2000 р. по січень 2010 р.

Використання копул зумовлено насамперед тим, що гіпотеза про багатомірну нормальність розподілу логарифмічних доходностей відкидається через негаусівський характер часткових розподілів (значення коефіцієнтів асиметрії, ексцесу та статистики Харкі-Бера, що використовуються для перевірки гіпотези о нормальності розподілу випадкової величини на основі значень коефіцієнтів асиметрії, ексцесу, котрі у випадку нормальності дорівнюють 0 та 3 відповідно).

Таблиця 2. Дані перших 8 років (в логарифмах приросту).

	CHF	**EUR**	**GBP**
Асиметрія	0,42	0,34	-0,79
Ексцес	1,34	0,76	10,6401
Статистика Харкі-Бера (p-value, в %)	42,91 ($4,81*10^{-10}$)	18,13 (0,00011)	1952,76 ($2,2*10^{-16}$)

Перед оцінкою копул, необхідно досконало проаналізувати доступну статистику, що характеризує поведінку обраних обмінних курсів. Тому наведено діаграми в логарифмах приросту валютних курсів та в кумулятивних ймовірностях, що відповідають відповідним частковим функціям розподілу, побудованих методом накоплених емпіричних частот.

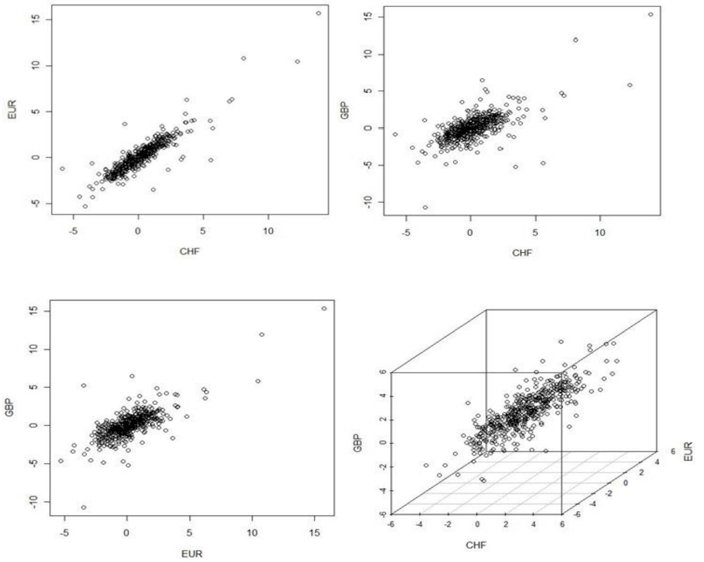

Рис. 2. Парні та тримірні кореляційні поля логарифмічних доходностей трьох валют.

Слід зауважити, що через особливість програмного продукту R 2.12.0 логарифмічні доходності були помножені на 100. Відповідні значення наведені на рис. 3.

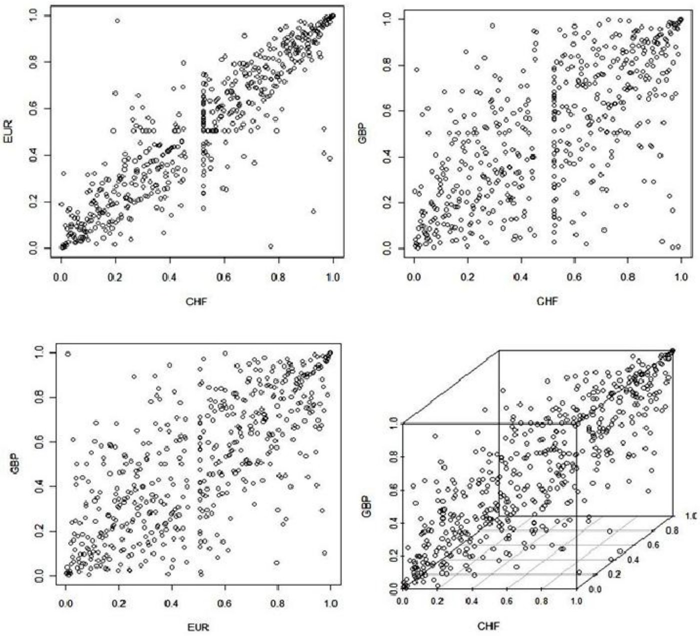

Рис. 3. Квантильні хмари логарифмічних доходностей приростів трьох валют.
Дані в кумулятивних ймовірностях.

На рис. 3 кожна точка відповідає має своїми координатами значення кумулятивних ймовірностей логарифмічних доходностей по кожній валюті. Для ілюстрації принципу побудови рисунка наведемо такий приклад. Розглянемо рисунок, що відповідає кумулятивним ймовірностям логарифмічних доходностям обмінних курів євро (відкладено на осі абсцис) та англійського фунта (відкладено на осі ординат), тобто $[u^{(1)};u^{(2)}]$. Візьмемо точку, що відповідає даті 5 лютого 2000 року курси євро та фунта були відповідно 5,41 та 8,74 за 1 одиницю. На попередню дату 29 січня 2000 року їх курси були 5,39 та 8,19 за 1 одиницю відповідно. Таким чином, 5 лютого 2000 року логарифмічні тижневі доходності помножені на 100 становили відповідно 0,378 та 6,4508. Щоб визначити координати точки за 5 лютого 2000 року на відповідному рисунку необхідно добути емпіричні функції розподілу логарифмічних доходностей. Так ймовірність, що логарифмічна доходність не перевищить по євро 0,378 становить 84,46%; ймовірність, що по фунту вона не перевищить 6,4508 становить 99,6%. Таким чином на рисунку спостереженню від 3 лютого 2000 року буде відповідати точка з координатами [0,8446;0,996].

При роботі з панельними даними крайні значення, найпевніше за все, були б виключені з розгляду. Наведені графіки дають розуміння, що такі значення мали місця, а відповідно є і доходності. Тому такі спостереження неможна трактувати як «викиди» та їх є умисним залишити для подальшого розгляду.

З діаграм розподілу ймовірностей (рис. 3) можна зрозуміти наступне. Найбільш сильний зв'язок спостерігається між кумулятивними ймовірностями приросту євро та швейцарським франком. До того ж найбільша концентрація точок в області високих значень (більше за 90%). Залежність між англійським фунтом та євро менш виражена, хоча має місце концентрація як і в низьких так і в високих значеннях ймовірностей. Співвідношення ймовірностей англійського фунта та євро більш рівномірне, ніж в інших двох випадках.

РЕЗУЛЬТАТИ ЕКОНОМЕТРІЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ.

Аналіз депендограми (графік 3) не дозволяє прийняти гіпотезу про те, що копула для франка, євро та фунта є незалежною. Адже значення статистики Крамера-фон-Мізеса перевищує критичне значення (таблиця 3).

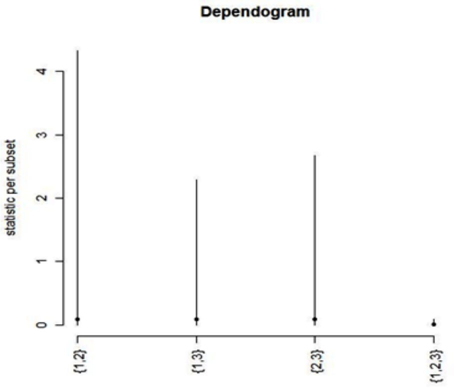

Рис. 4. Депендограма тесту на незалежність. Дані 2000-2009 рр. Позначення пар змінних:
1 – CHF, 2 – EUR, 3 – GBP

Таблиця 3. Аналіз депендограми.

	Статистика Крамера-фон-Мізеса	p-value	Критичне значення
{CHF, EUR}	4.33	0.0005	0.08
{CHF, GBP}	2.29	0.0005	0.08
{EUR, GBP}	2.67	0.0005	0.08
{CHF, EUR, GBP}	0.09	0.0005	0.01

Для проведення ретроспективного прогнозу були обрані довільні значення позицій в трьох валютах. А саме, +10 одиниць у франках; -20 в євро; +10 в фунтах. В результаті моделювання сумісного багатомірного розподілу були отримані наступні дані. Найбільша значущість виявлена при оцінці еліпсоподібних копул (значущість оцінки z-value=52,877), хоча найменша помилка прогнозу відповідає копулі Клейтона (RMPSE=13,283). В той же час значимість параметра копули Клейтона – найменша з розглянутих копул (z-value=13,298), хоча значно перевищує критичний поріг в 2 одиниці.

Таблиця 4. Результати оцінки параметрів моделей.

Модель	**Характеристики отриманої оцінки моделі на масиві A**				**Критерій моделі на масиві B**		
	Параметр $\hat{\alpha}$	**Помилка** $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}$	**z-value** $\frac{\hat{\alpha}-\alpha_{\Pi}}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}}$	**Значення ф-ії МП**	**Кількість пробоїв**	**RMPSE**	**Макс. відх. від VaR**
Гумбеля	2,981	0,149	20,001	-Inf	10	13,442	-4,795
Клейтона	3,961	0,298	13,298	-1483,78	9	**13,283**	-4,719
Франка	9,857	0,611	16,134	277,759	8	13,768	**-4,419**
Гаусівська	0,812	0,015	**52,877**	-Inf	8	14,257	-4,451
Коші	0,812	0,015	**52,877**	-Inf	8	13,959	-4,609
Стьюдента (3 ст.)	0,812	0,015	**52,877**	-Inf	8	14,091	-4,573
Стьюдента (7 ст.)	0,812	0,015	**52,877**	-Inf	8	14,148	-4,462

При цьому найменше відхилення у випадку пробою дає копула Франка. Враховуючи візуальний аналіз даних (наявність високої концентрації точок в області високих ймовірностей реалізації приростів фунта і франка, що еквівалентно високій залежності верхніх (правих) "хвостів" розподілу), а також факт меншої помилки $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}$, ніж у випадку копули Клейтона, а також меншої середньоквадратичної помилки прогнозу, ніж у випадку копули Франка, вибір моделі для розв'язку оптимізаційної задачі було віддано копулі Гумбеля.

Перед розв'язком оптимізаційної задачі необхідно змоделювати багатомірний розподіл. Для цього спочатку оцінімо копулу по всій вибірці з 1 січня 2000р. по 31 грудня 2008р, потім напівпараметричним способом відновимо сумісний розподіл на основі 10000 генерацій копули та відомих емпіричних часткових розподілів доходностей обмінних курсів.

Оцінка копули Гумбеля за 9 років дає параметр, що дорівнює 2,79399. На рис. 5 наведено генеровані копула та сумісний розподіл. Справа на рис.5 зображено генерована копула, по вісям відкладені кумулятивні ймовірності (значення оберненої функції розподілу) логарифмічних доходностей $u^{(j)}$. Зліва – тримірний розподіл логарифмічних доходностей обмінних курсів, помножених на 100, що побудовано на основі генерованої копули.

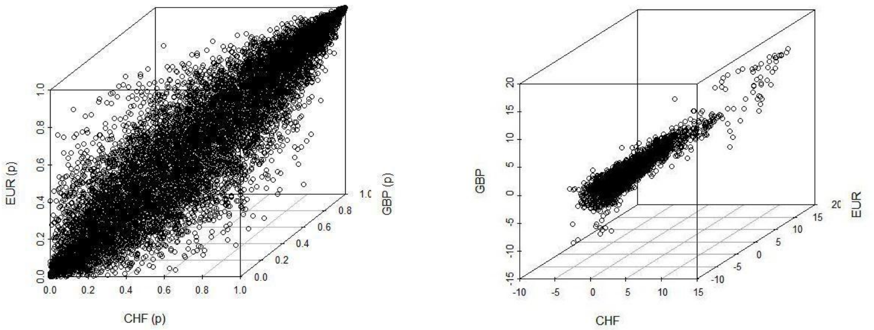

Рис. 5. Змодельовані розподіли на основі копули Гумбеля.

Далі наведемо розв'язки оптимізаційної задачі, отримані на основі генерованого за допомогою копули розподілу. Для побудови ретроспективного прогнозу були взяті прирости величин обмінних курсів до дати прийняття інвестиційного рішення (31 січня 2008 р.). Дане припущення зумовлено тим, що інвестора цікавить кінцева доходність. Відповідно, якщо в один з тижнів знизилась на меншу суму, ніж виросла в попередню, то результуюче значення доходу буде додатнім, а не від'ємним. В таблиці 5 всі дані, крім рівнів значимості, вказані у відсотках від капіталу.

ВИСНОВКИ.

В роботі було використано підхід до розв'язку оптимізаційної задачі на пошук таких відкритих валютних позицій, котрі не несуть втрату для банку від валютного ризику у значенні, що більше капіталу банка з заданою ймовірністю. Підхід ґрунтувався на відновленні сумісного розподілу на основі копули та емпіричних часткових розподілів.

Таблиця 5. Розв’язок оптимізаційної задачі.

№ п/п	Рівень значимості, в %	Оптимальний розмір ВВП			Фактична доходність	Границя втрат VaR
		CHF	EUR	GBP		
1	99,00	-10,00	20,00	90,00	2,05	-99,91
2	98,50	-10,00	10,00	100,00	2,06	-99,10
3	98,00	-10,00	0,00	110,00	2,08	-99,59
4	97,50	-20,00	30,00	90,00	2,16	-99,93
5	97,00	-20,00	20,00	100,00	2,17	-99,26
6	96,50	-20,00	10,00	110,00	2,19	-99,16
7	96,00	-30,00	80,00	50,00	2,22	-99,91
8	95,50	-30,00	30,00	100,00	2,29	-99,67
9	95,00	-30,00	20,00	110,00	2,31	-99,45
10	94,50	-30,00	10,00	120,00	2,32	-99,55
11	94,00	-40,00	70,00	70,00	2,36	-99,67
12	93,50	-40,00	40,00	100,00	2,41	-99,55
13	93,00	-40,00	30,00	110,00	2,42	-99,49
14	92,50	-40,00	20,00	120,00	2,44	-99,16
15	92,00	-50,00	60,00	90,00	2,51	-99,68
16	91,50	-50,00	50,00	100,00	2,52	-99,46
17	91,00	-50,00	30,00	120,00	2,55	-99,73
18	90,50	-60,00	80,00	80,00	2,61	-99,96
19	90,00	-60,00	60,00	100,00	2,64	-99,42
20	89,50	-60,00	40,00	120,00	2,67	-99,84

По-перше, в ході дослідження було показано, що сумісний розподіл тижневих приростів валютник курсів (франка, євро та фунта) за 9 років з 2000 по 2008 рр. не є незалежним та гаусівським, а найкращим чином описується архімедовою копулою Гумбеля, котра характеризується наявністю залежності верхніх (правих) «хвостів» розподілу, тобто високою ймовірністю одночасного росту обмінних курсів, або тенденції до девальвації гривні [1].

По-друге, даний підхід дав розв’язок, що задовольняє обмеженню на розмір валютного ризику. Границі втрат не були перевищені ні в одному з двадцяти розглянутих рівнів значимості.

Необхідно відмітити, що реалізована доходність виявляється нижче очікуваної, тобто модельної. Це, напевно, відкриває потенційну область поліпшення моделі, що тем не менш складає предмет даного дослідження.

Джерела та література:

1. Пеникас Г. И. Модели «копула» в управлении валютным риском банка / Г. И. Пеникас // Прикладная эконометрика. – 2010. – № 1 (17). – С. 62-87.
2. Hennessy D. The Use of Archimedian Copulas to Model Portfolio Allocations / D. Hennessy, H. Lapan // Mathematical Finance. – 2002. – № 12. – P. 143-154.
3. Natale F. Optimization With Tail-Dependence and Tail Risk : A Copula Based Approach for Strategic Asset Allocation. – 2006 : [Электронный ресурс] / F. Natale. – Режим доступа : http://ssrn.com/abstract=942275.
4. Алексеев В. В. Логико-вероятностное моделирование портфеля ценных бумаг с использованием копул / В. В. Алексеев, В. В. Шоколов, Е. Д. Соложенцев // Управление финансовыми рисками. – 2006. – № 3. – С. 272-283.
5. Sklar A. Fonctions de repartition a n dimensions et leurs margers / A. Sklar // Publication de l’Institute de Statistique de l’Universite de Paris. – 1959. – № 8. – P. 229-231.
6. Cherubini U. Copula methods in finance / U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato. – Chichester : John Wiley & Sons, 2004. – 308 p.
7. Genest Ch. Tests of Independence and Randomness Based on the Empirical Copula Process / Ch. Genest, B. Remmilard // Test. – 2004. – № 2. – P. 335-369.