Жаркынбаев С.Ж., Жаукенова Б.А. **УДК 519.83**

ВЕКТОРНЫЕ ГАРАНТИИ В БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГРАХ ТРЕХ ЛИЦ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1. Виды векторных гарантий.

Рассмотрим бескоалиционную игру трех лиц при неопределенности

$$< \{1,2,3\}, \{X_i\}_{i=1,2,3}, Y_i \{f_i(x,y)\}_{i=1.2.3} >, \qquad (1)$$

здесь 1,2 и 3 – порядковые номера игроков: X_i - множество стратегий x игрока *i*, Y - множество неопределенности *y*, ситуация игры $x=(x_1,x_2,x_3)\in \mathrm{X}=\mathrm{X}_1 * \mathrm{X}_2 * \mathrm{X}_3$, $f(x,y)$ функция выигрыша i-го игрока.

При формализации решения игры (1) воспользуемся аналогом векторной седловой точки, предложенной в [1] для многокритериальных задач при неопределенности. Для игры (1) такой подход выглядит следующим образом: решение игры (1) есть пара $(\bar{x}, f(\bar{x},\bar{y}))$ такая, что

1^0. При фиксированной неопределенности $y=\bar{y}\in \mathrm{Y}$ ситуация $\bar{x}\in \mathrm{X}$ является равновесным (активно равновесным или равновесием возражений и контрвозражением, бескоалиционной игры

$$< \{1,2,3\}, \{X_i\}_{i=1,2,3}, \ \{f_i(x_1,x_2,x_3,\bar{y})\}_{i=1.2.3} >,$$

2^0. При фиксированной ситуации $x=\bar{x}$ неопределенность $\bar{y}$ является минимальным (в «векторном смысле») решением трехкритериальной задачи

$$< \mathrm{Y}, \ \{f_i(\bar{x},y)\}_{i=1.2.3} >, \qquad (2)$$

которую получаем из (1.1), фиксируя ситуацию $x=\bar{x}\in \mathrm{X}$.

Прежде всего рассмотрим пункт 2^0 и для задачи (2) сформулируем понятия минимальных решений по Слейтеру, по Парето, по Борвейну, по Джоффриону и А-минимальных, аналогичных [2].

В задаче (2) цель ЛПР (лица, принимающего решение) состоит в выборе такой неопределенности $y^*\in \mathrm{Y}$, при которой все критерии $f_i(\bar{x},y^*)(i=1.2.3)$ одновременно принимают возможно меньшие значения. К задаче (2) также сводиться ответ на следующий вопрос: на какие гарантий ориентируются игроки в игре (1), если следуют своим стратегиям из ситуации $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$.

Под векторной гарантией игры (1) при ситуации $\bar{x}\in \mathrm{X}$ понимается вектор $\bar{f}=(\bar{f}_1,\bar{f}_2,\bar{f}_3)$ такой, что для каждой неопределенности $y\in \mathrm{Y}$ не могут одновременно выполняться неравенства

$$\bar{f}_i > f_i(\bar{x},y)(i=1.2.3),$$

где, $\bar{f}_i = f_i(\bar{x},y^*)(i=1.2.3)$ при некоторой неопределенности $y^*\in \mathrm{Y}$

Таким образом, векторная гарантия – это такой набор выигрышей игроков, «порожденных» ситуацией $\bar{x}$, что при реализации любой неопределенности $y\in \mathrm{Y}$, появляющийся другой возможный в игре (1) набор выигрышей $f(\bar{x},y)=(f_1(\bar{x},y), f_2(\bar{x},y), f_3(\bar{x},y))$ не может быть меньше первого одновременно по всем компонентам. Далее как раз и будут сформированы различные виды векторных гарантий в игре (1) при фиксированной ситуации $\bar{x}\in \mathrm{X}$. Перейдем к формальным определениям.

Определения 1 Неопределенность $y^s\in \mathrm{Y}$ называется минимальной по Слейтеру для задачи (2), если при любых $y\in \mathrm{Y}$ несовместна система неравенств $f_i(\bar{x},y) < f_i(\bar{x},y^s)(i=1.2.3)$.

Вектор $f(\bar{x},y^s)=(f_1(\bar{x},y^s), f_2(\bar{x},y^s), f_3(\bar{x},y^s))$ называется слейтеревской гарантией, отвечающей ситуации $\bar{x}$ в игре (1). Из определения 1 и понятия векторной гарантии следует, что слейтеровская гарантия является векторной и обратно. Обозначим через Y^S множество всех минимальных по Слейтеру неопределенностей y^s задачи (2) и введем бинарные отношения: для любых двух векторов

$$f^{(j)}=\left(f_1^{(j)}, f_2^{(j)}, f_3^{(j)}\right)\in R^3 (j=1,2),$$

$$f^{(1)} \underset{S}{<} f^{(2)} \Leftrightarrow f_i^{(1)} < f_i^{(2)} (i=1,2,3),$$

$$f^{(1)} \underset{S}{\not<} f^{(2)} \Leftrightarrow \neg(f_i^{(1)} < f^{(2)}).$$

Тогда минимальная по Слейтеру неопределенность $y^s\in \mathrm{Y}$ в задаче (2) определяется условием $f(\bar{x},y) \underset{S}{\not<} f(\bar{x},y^s), \forall y\in \mathrm{Y}$.

Приведем геометрическую интерпретацию слейтеровской гарантии. Для этого введем множества

$$f(\bar{x},Y)=\bigcup_{y\in Y} f(\bar{x},y),\ f(\bar{x},Y^s)=\bigcup_{y\in Y^s} f(\bar{x},y),$$
$$R^3_{\geq}=\{f=(f_1,f_2,f_3)\,|\,f_i\geq 0,(i=1,2,3)\},$$
$$R^3_{\leq}=-R^3_{\geq}=\{f=(f_1,f_2,f_3)\,|\,f_i\leq 0,(i=1,2,3)\}. \qquad (3)$$

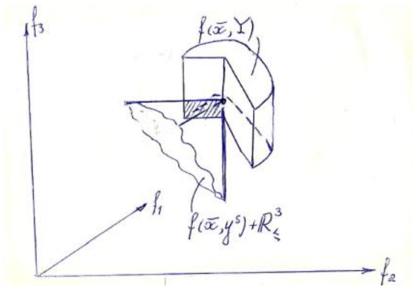

Рис. 1.

Из определения 1 следует : если $f(\bar{x},y^s)$- слейтеровская гарантия то, ни одна точек множества $f(\bar{x},Y)$ не может попасть внутрь трехгранного угла $f(\bar{x},y^s)+R^3_{\leq}$ (рис.1). При этом грани этого угла могут касаться множества $f(\bar{x},Y)$ (на рис.1 множество точек касания заштриховано). Сам угол $f(\bar{x},y^s)+R^3_{\leq}$ представляет собой сдвиг отрицательного октанта $R^3_{\leq}$ точку $f(\bar{x},y^s)$.

Определение 2 Неопределенность $y^p\in Y$ называется минимальной по Парето для задачи (2), если при любых $y\in Y$ несовместима неравенств $f_i(\bar{x},y)\leq f_i(\bar{x},y^p),(i=1,2,3)$, из которых по крайней мере, одно строгое. Вектор $f(\bar{x},y^p)$ называется паретовской гарантией, отвечающей ситуации $\bar{x}$ в игре (1).

Обозначим через Y^P множество минимальных по Парето неопределенностей y^p задачи (2) и построим

$$f(x,Y^P)=\bigcup_{y\in Y^P} f(x,y) \qquad (4)$$

Заметим, что из определений 1 и 2 следует включение

$$Y^P\subseteq Y^S \qquad (5)$$

Введем бинарные отношения для двух векторов

$$f^{(j)}=\left(f_1^{(j)},f_2^{(j)},f_3^{(j)}\right)\in R^3:$$
$$f^{(1`)}=f^{(2)}\Leftrightarrow f_i^{(1)}=f_i^{(2)}(i=1,2,3),$$
$$f^{(1`)}\neq f^{(2)}\Leftrightarrow\neg(\ f^{(1)}=f^{(2)}\ ),$$
$$f^{(1`)}\underset{P}{\leq} f^{(2)}\Leftrightarrow[(f^{(1)}\leq f^{(2)})\wedge(f^{(1)}\neq f^{(2)})],$$
$$f^{(1`)}\underset{P}{<} f^{(2)}\Leftrightarrow\neg(f^{(1)}<f^{(2)}).$$

Тогда минимальная по Парето неопределенность y^p в задаче (2) определится условием:

Приведем геометрическую интерпретацию паретовской гарантии . Из определения 2 получаем, что паретовская гарантия $f(\bar{x},y^p)$ обладает следующим свойством :

$$\{f(\bar{x},Y)\}\cap\{f(\bar{x},y^p)+R^3_{\leq}\}=\{f(\bar{x},y^p)\}$$

Здесь $f(\bar{x},y^P)+R^3_{\leq}=\{f(\bar{x},y^P)+f\,|\,f\in R^3_{\geq}\}$.

Таким образом, отрицательный координатный угол $R^3_{\leq}$, смещенный на вектор $f(\bar{x},y^P)$, имеет с множеством $f(\bar{x},Y)$ (определенный в (3) только одну общую точку $f(\bar{x},y^P)$ (рис. 2)). Заметим, что слейтеровская гарантия этому свойству, вообще говоря, не удовлетворяет (см. заштрихованное множество на рис.1) Таким оброзом паретовская гарантия более ограничивает возможное «расположение» множества $f(\bar{x},Y)$,чем слейтеровская.

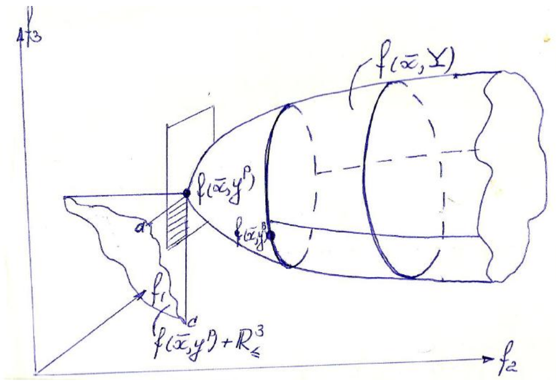

Рис. 2.

Для формализации минимальной по Борвейну неопределенности дополнительно к (3) введем множество

$$f^*(\bar{x}, Y) = f(\bar{x}, Y) + R^3_{\geq} = \{a + b \mid a \in f(\bar{x}, Y), b \in R^3_{\geq}\}.$$

Затем в каждой точке $f^{(0)} \in f^*(\bar{x}, Y)$ построим касательный конус $T\left(f^*(\bar{x}, Y), f_3^{(0)}\right)$, то есть множество всех векторов $W \in R^3$, которые являются предельными точками вида

$$W = \lim_{k \to \infty} \gamma_k \left(f^{(k)} - f^{(0)}\right)$$

где $\{\gamma_k\}$ какая-либо последовательность неотрицательных чисел, а $\{f^{(k)}\}$ -последовательность точек из $f^*(\bar{x}, Y)$, сходящаяся к $f^{(0)}$.

Определение 3 Неопределенность $y^s \in Y$ называется минимальной по Борвейну для задачи (2), если:

1^0.она минимальна по Парето в этой задаче:

2^0 справедливо соотношение

$$T\left(f^*(\bar{x}, Y), f(x, y^B)\right) \cap \{R^3_{\leq}\} = \{O_3\}, \tag{6}$$

где столбец вектор $O_3 = (O, O, O)$.

Вектор $f(\bar{x}, y^B)$ называется борвейновской гарантией, отвечающей ситуации $\bar{x}$ в игре (1). Обозначим через Y^B множество всех минимальных по Борвейну неопределенностей y^B задачи (2) и введем множество

$$f(\bar{x}, Y^B) = \bigcup_{y \in Y^B} f(\bar{x}, y) \tag{7}$$

Заметим, что из определения 3 следует включение

$$Y^B \subseteq Y^P \tag{8}$$

Для векторов $f^{(j)} \in f^*(\bar{x}, Y)(j = 1,2)$ введем бинарное отношение

$$f^{(1)} \underset{B}{<} f^{(2)} \Leftrightarrow \left[\left(f^{(1)} \underset{P}{<} f^{(2)}\right) \wedge \left(T\left(f(\bar{x}, Y), f^{(2)}\right)\right) \cap R^3_{\leq} = \{O_3\}\right]$$

Тогда минимальная по Борвейну неопределенность y^B в задаче (2) определится условием

$$f(\bar{x}, y) \underset{B}{<} f(x, y^B), \forall y \in Y.$$

Перейдем к геометрической интерпретаций борвейновской гарантий. Для этого отметим, что условие (1.6) эквивалентно.

$$\left\{T\left(f^*(\bar{x}, Y), f(\bar{x}, y^B)\right) + f(\bar{x}, y^B)\right\} \cap \left\{f(\bar{x}, y^B) + R^3_{\leq}\right\} = \left\{f(\bar{x}, y^B)\right\}. \tag{9}$$

Последнее соотношение означает, что сдвиги касательного конуса $T(f^*(\bar{x}, Y), f(\bar{x}, y^B))$ и отрицательного октанта $R^3_{\leq}$ в точку $(\bar{x}, y^B)$ для борвейновской гарантии $f(\bar{x}, y^B)$ имеют лишь одну общую точку $f(\bar{x}, y^B)$. Таким образом, паретовская гарантия $f(\bar{x}, y^P)$ (рис 2) не будет борвейнской, ибо результатом пересечения касательного конуса $T(f^*(\bar{x}, Y), f(\bar{x}, y^P))$ «перенесенного» в точку $f(\bar{x}, y^P)$ и множества $\{f(\bar{x}, y^P) + R^3_{\leq}\}$ является заштрихованная грань. В то же время отмеченная на рис 2 точка $f(\bar{x}, y^B)$ будет борвейновской гарантий, ибо для нее условие (9) выполнено. Таким образом, борвейновская гарантия $f(\bar{x}, y^B)$ «накладывает» более жесткие ограничения на «поведение» множества $f(\bar{x}, Y)$. (в окрестности точки $f(\bar{x}, y^B)$, чем паретовская).

Определение 4. Неопределенность $y^G \in \mathrm{Y}$ называтся минимальной по Джоффриону для задачи (2), если:
1 ^{0}. она минимально по Парето в этой задаче,

2 ^{0}. существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что если для некоторых номеров $i = \{1,2,3\}$ и неопределенности $y \in \mathrm{Y}$ выполнено строгое неравенство $f_i(\bar{x}, y) < f_i(\bar{x}, y^G)$ и всех $j \in \{1,2,3\}$ таких, что $f_j(\bar{x}, y) > f(\bar{x}, y^G)$, то имеет место

$$\frac{f_i(\bar{x}, y^G) - f(\bar{x}, y)}{f_j(\bar{x}, y) - f_j(\bar{x}, y^G)} \le \gamma . \tag{10}$$

Вектор $f(\bar{x}, y^G)$ называется джоффрионовской гарантией, отвечающей ситуации в $\bar{x}$ в игре (1).
Заметим, что согласно определению 2 минимальности по Парето, справедливо следующая импликация.

$$\left[f_i(\bar{x}, y) < f_i(\bar{x}, y^G)\right] \Rightarrow \left[\exists j \in \{1,2,3\} \,|\, f_j(\bar{x}, y) > f_j(\bar{x}, y^G)\right].$$

и потому дробь в левой части неравенства (10) положительна.

Обозначим через Y^G множество всех минимальных по Джоффриону неопределенностей y^G задачи (2) и

$$f(\bar{x}, \mathrm{Y}^G) = \mathop{\mathrm{Y}}_{y \in \mathrm{Y}^G} f(\bar{x}, y) . \tag{11}$$

Отметим, что в [3] доказано включение

$$\mathrm{Y}^G \subseteq \mathrm{Y}^B \tag{12}$$

Для двух векторов $f^{(j)} = (f_1^j, f_2^j, f_3^j)(j = 1,2)$ введём бинарное отношение:
$f^{(1)} \underset{G}{\le} f^{(2)} \Leftrightarrow [f^{(1)} \underset{P}{\le} f^{(2)}$ и $\exists \gamma = const > 0$ такая, что для любых $i \in \{1,2,3\}$, при которых $f_i^{(1)} < f_i^{(2)}$ и $j \in \{1,2,3\}$ таких, что $f_j^{(1)} > f_j^{(2)}$, имеет место

$$f_i^{(2)} - f_i^{(1)} \le \gamma\left(f_j^{(1)} - f_j^{(2)}\right) \;].$$

Тогда минимальная по Джоффриону неопределённость y^G задачи (2) определиться условием $f(\bar{x}, y) \underset{G}{\le} f(\bar{x}, y^G), \forall y \in \mathrm{Y}$.

Перейдём к геометрической интерпретации джоффрионовской гарантии. Минимакс джоффрионовской гарантии $f(\bar{x}, y^G)$ не только ограничивает «поведение» множества $f(\bar{x}, \mathrm{Y})$ в окрестности точки $f(\bar{x}, y^G)$, (аналогично борвейновской), но и ограничивает расположение этого множества «вдали» от $f(\bar{x}, y^G)$. Именно согласно определению 3, существует трехгранный конус, содержащий $R^3_{\le}$, и такой, что сдвиг этого конуса в точку $f(\bar{x}, y^G)$ имеет с множеством $f(\bar{x}, \mathrm{Y})$ лишь одну общую точку $f(\bar{x}, y^G)$.

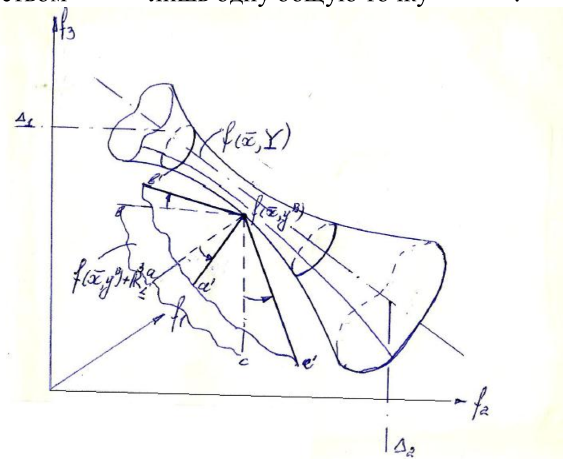

Рис. 3.

На рис. 3 асимптоты Δ_1 и Δ_2 параллельны осям f_1 и f_2 соответственно. Тогда точка $f(\bar{x}, y^B)$ не является джоффрионской гарантией, но будет борвейновской.

Отметим, что $f(\bar{x}, y^G)$ из рис.1.4, при $y^L = y^G$ является джоффрионовской гарантией, ибо существует трехгранный угол (a', b', c'), содержащий $\{f(\bar{x}, y^G) + R^3_{\le}\}$, который не имеет общих точек с $f(\bar{x}, \mathrm{Y})$, кроме $f(\bar{x}, y^G)$.

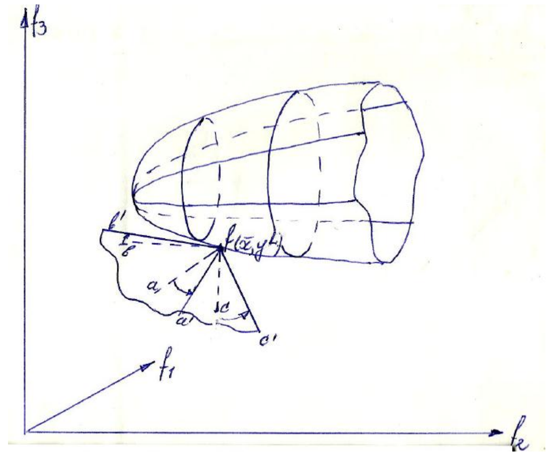

Рис. 4.

Перейдем к определению А- минимальной неопределенности. Пусть $A=(a_{ij})$ - постоянная 3х3 матрица с положительными элементами $a_{ij}\,(i,j=1,2,3)$. Задаче (2) поставим в соответствие трёхкритериальную задачу

$$\langle \mathrm{Y}, \mathrm{A}f(\bar{x},y)\rangle, \tag{13}$$

в которой критерии $f_i(\bar{x},y)=\sum_{j=1}^{3} a_{ij} f_j(\bar{x},y)\,(i=1,2,3).$

Определение 5 Неопределенность $y^A \in \mathrm{Y}$ называется А - минимальной для задачи (2), если она минимальна по Слейтеру для задачи (13), то есть при любых $y \in \mathrm{Y}$ несовместна система неравенств

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} f_j(\bar{x},y) < \sum_{j=1}^{3} a_{ij} f_j(\bar{x},y^A),\,(i=1,2,3)$$

Вектор $f(\bar{x},y^A)$ называется А – минимальной гарантией, отвечающей ситуации $\bar{x}$ в игре (1).

Обозначим через Y^A множество всех А – минимальных неопределенностей y^A в задаче (2) и $f(\bar{x},\mathrm{Y}^A)=\bigcup_{y\in \mathrm{Y}^A} f(\bar{x},y)$

Отметим что в [3] доказано включение

$$\mathrm{Y}^A \subseteq \mathrm{Y}^G, \tag{14}$$

а, с учетом отношения $\underset{S}{<}$ <, А – минимальная неопределенность y^A задачи (2) определяется условием $Af(\bar{x},y)\underset{S}{<} Af(\bar{x},y^A)$.

Можно также ввести бинарное отношение $\underset{A}{<}$ для двух векторов $f^{(j)} \in R^3$ с помощью эквиваленции $\left[f^{(1)}\underset{A}{<} f^{(2)}\right] \Leftrightarrow \left[Af^{(1)}\underset{S}{<} Af^{(2)}\right]$

Тогда А – минимальная неопределенность $y^A \in \mathrm{Y}$ задачи (2) определится следующим образом: $f(\bar{x},y)\underset{A}{<} f(\bar{x},y^A), \forall y \in \mathrm{Y}$

Наконец, геометрическая интерпретация А – минимальной гарантии $f(\bar{x},y^A)$ отличается от диффрионовской лишь тем, что «раствор » трехгранного конуса «объемляющего» $R^3_{\leq}$ фиксирован и определяется элементами a_{ij} матрицы (рис.4 при $L=A$). Подчеркнем также, что при формализации А – минимальности матрица А считается заданной.

2 Свойства векторных гарантий.

Утверждение 1 Для задачи (2) справедливы следующие цепочки включений

$$\mathrm{Y}^A \subseteq \mathrm{Y}^G \subseteq \mathrm{Y}^B \subseteq \mathrm{Y}^P \subseteq \mathrm{Y}^S \tag{15}$$

$$f(\bar{x},\mathrm{Y}^A) \leq f(\bar{x},\mathrm{Y}^G) \leq f(\bar{x},\mathrm{Y}^B) \leq f(\bar{x},\mathrm{Y}^P) \leq f(\bar{x},\mathrm{Y}^S) \tag{16}$$

В самом деле, справедливость (5) следует из (5), (2), (14), а (6) является следствием (5), так как $f(\bar{x},\mathrm{Y}^L)=\bigcup_{y\in \mathrm{Y}^L} f(\bar{x},y)\,(L=A,G,B,P,S)$

Следствие 1 Каждая из пяти введенных определениями 1 – 5 неопределенностей $y^L(L = A, G, B, P, S)$ порождает векторную гарантию $f(\bar{x}, y^L)$, отвечающую ситуации $\bar{x}$ в игре (1).

Действительно, определение слейтеровской гарантии (определение 1) совпадает с понятием векторной гарантии (см. начало пункта 1). Тогда согласно (6), паретовская, борвейновская, джоффрионовская и А – минимальная гарантия являются векторными гарантиями.

Замечание 1. Связь между минимальными неопределенностями, введенными определениями 1- 5, можно представить следующей схемой (5).

- минимальная по Слейтеру неопределенность y^S

↑

- минимальная по Парето неопределенность y^P

↑

- минимальная по Борвейну неопределенность y^B

↑

- минимальная по Джоффриону неопределенность y^G

↑

- А - минимальная неопределенность y^A

Рис. 5.

Из схемы, представленной на рис. 5 следует:

а) достаточные условия существования А – минимальной неопределенности (при хотя бы одной постоянной 3x3 матрице А с положительными элементами) являются достаточными и для всех остальных четырех видов (минимальных по Джоффриону, Борвейну, Парето и Слейтеру) ;

б) достаточные условия существования минимальной по Джоффриону неопределенности остаются достаточными и для минимальности по Борвейну, Парето и Слейтеру;

в) отсутствие в задаче (2) минимальных по Слейтеру неопределенностей влечет отсутствие всех четырех остальных;

c) существование А – минимальной неопределенности обеспечивает существование всех остальных четырех;

d) свойства минимальности по Слейтеру неопределенности присущи всем остальным;

e) необходимые условия, которым удовлетворяют минимальные по Слейтеру неопределенности остаются необходимыми для минимальных по Парето, по Борвейну, по Джоффриону и для А-минимальных.

Источники и литература:

1. Zhukovskiy V. I. The Vektor-Valued Maximin / V. I. Zhukovskiy, M. B. Salukvadze. – N. Y. ets : Academic Press, 1994.
2. Жуковский В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности / В. И. Жуковский. – М. : Международный НИИ проблем управления, 1997.
3. Подиновский В. В. Парето – оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука, 1982.