

УДК 004.942 + 623.454.862

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ВЕКТОРА ПАРАМЕТРОВ ПУТЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ К СИСТЕМЕ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Е.Г. Ревунова

*Международный научно-учебный центр информационных технологий
и систем. Украина, Киев, пр. Глушкова, 40.
helab@i.com.ua*

Запропонований метод, що дозволяє за рахунок перетворення лінійної системи до системи із заданими властивостями розширити клас базисних функцій, використовуваних для розрідженої апроксимації. Проведений експериментальний аналіз точності оцінки параметрів з використанням запропонованого методу в сукупності з методом пошуку відповідності.

Ключові слова: лінійна система, розріджена апроксимація, метод пошуку відповідності.

We propose a method to extend the class of basis functions used for a sparse approximation. The accuracy of parameter estimates has been experimentally analyzed for the proposed method using matching pursuit.

Keywords: linear system, sparse approximation, matching pursuit.

Предложен метод, позволяющий за счет преобразования линейной системы к системе с заданными свойствами расширить класс базисных функций, используемых для разреженной аппроксимации. Проведен экспериментальный анализ точности оценки параметров с использованием предложенного метода в совокупности с методом поиска соответствия.

Ключевые слова: линейная система, разреженная аппроксимация, метод поиска соответствия.

Введение

Проблема эффективного анализа зашумленных смесей сигналов возникает при решении класса задач, связанных с обработкой информации, получаемой от разного рода датчиков (задачи защиты от помех, идентификации, диагностики, интерпретации и др.).

В целом ряде таких задач измеряемые данные являются результатом суммирования воздействий, порождаемых физическим процессом и взвешенных некоторыми коэффициентами, что обуславливает использование линейных по параметрам моделей вида

$$y = \sum_{j=1, N} \varphi_j(z) \theta_j. \quad (1)$$

Здесь $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = \boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^N$ – вектор параметров, $(\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_N(z)) = \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N$ – вектор значений базисных функций φ_j от z .

Задача линейной аппроксимации рассматривается в [1] как восстановление функции (1) путем оценки $\boldsymbol{\theta}$ по L парам наблюдений $D_L = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1, L}$ входа \mathbf{x}_i и выхода y_i . Значения y_i искажены аддитивным шумом ε_i ($y_i = y_0 + \varepsilon_i$). Векторы

входа x_i формируют $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^{L \times N}$ – матрицу входов, значения выхода y_i формируют вектор выхода $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^L$.

Если известен возможный набор базисных функций, но неизвестно, какие из них сформировали наблюдаемый выход, решение задачи аппроксимации может быть получено методами выбора модели и разреженной аппроксимации.

Для вектора выхода \mathbf{y}_0 , не искаженного шумом, решение задачи разреженной аппроксимации

$$\boldsymbol{\theta}^* = \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\boldsymbol{\theta}\|_0 \text{ при условии } \mathbf{y}_0 = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} \quad (2)$$

получают методами: l_1 -аппроксимации [2], m -членного разложения [3], методом поиска соответствий (МПС) (*matching pursuit*) [4].

Метод поиска соответствий получил широкое распространение в связи с низкой вычислительной сложностью (по сравнению с методами l_1 -аппроксимации и m -членного разложения) и быстрой сходимостью: для ортонормальных базисов метод сходится после L шагов [5]. МПС рекурсивно выбирает базисные функции и параметры так, чтобы минимизировать квадрат нормы остатка на каждой итерации до исчерпания остатка.

Трудность использования МПС в прикладных задачах связана с тем, что для вектора выхода \mathbf{y} , искаженного шумом, равенство $\mathbf{y}_0 = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$ в (2) не достигается. Возникает проблема останова – необходимость задания порога нормы остатка.

При искаженном шумом векторе выхода задача разреженной аппроксимации приобретает следующий вид:

$$\boldsymbol{\theta}^* = \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\boldsymbol{\theta}\|_0 \text{ при условии } \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}\|_2 \leq \delta, \quad (3)$$

где δ – (малая) величина, пропорциональная норме вектора шума $\boldsymbol{\varepsilon}$.

В связи с решением задачи (3) в работе [6] введено понятие " l_0 -оптимального решения" – решения, обеспечивающего одновременно минимальную ошибку аппроксимации и максимально возможную разреженность. Проверить решение $\boldsymbol{\theta}^*$, полученное некоторым алгоритмом, на l_0 -оптимальность позволяет тест, предложенный в [6]. Использование теста на l_0 -оптимальность на каждой итерации МПС позволяет производить останов на модели с минимальной ошибкой аппроксимации и максимальной разреженностью.

Недостатком подхода к решению задачи разреженной аппроксимации с использованием теста на l_0 -оптимальность является то, что тест применим далеко не для всякой системы базисных функций. Требуется разработка методов, позволяющих использовать для разреженной аппроксимации более широкий класс базисных функций.

1. Метод поиска соответствий с преобразованием выхода линейной системы к системе с заданными свойствами

При зашумленном векторе выхода МПС работает следующим образом: начиная с $\mathbf{f}_0=0$ ($\mathbf{f} \in \mathcal{R}^L$), на $(k+1)$ -м проходе вычисляют $\mathbf{f}_{k+1}=\mathbf{f}_k+\theta_{k+1}\boldsymbol{\varphi}_{k+1}$, выбирая $\boldsymbol{\varphi}_{k+1} \in \mathcal{R}^L \subset \mathbf{X}$ и θ_{k+1} , минимизирующие квадрат нормы остатка $(\mathbf{r}_k-\theta\boldsymbol{\varphi})$:

$$(\theta_{k+1}, \boldsymbol{\varphi}_{k+1}) = \operatorname{argmin}_{\theta, \boldsymbol{\varphi}} \|\mathbf{r}_k - \theta\boldsymbol{\varphi}\|^2, \mathbf{r}_k = \mathbf{y} - \mathbf{f}_k, k = \|\boldsymbol{\theta}\|_0. \quad (4)$$

Решение $\boldsymbol{\theta}_k^*$, формируемое МПС на k -м проходе, проверяется на l_0 -оптимальность. Если условия теста удовлетворяются, работа МПС завершается.

Проверка на l_0 -оптимальность состоит в следующем: решение $\boldsymbol{\theta}_k^* = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ является решением (3) с максимально возможной разреженностью и наименьшей ошибкой аппроксимации, если

$$\mu(2k-1) < 1, |\mathbf{r}|_1 + |\mathbf{r}|_{2k} < 0.5(1 - \mu(2k-1)) \min_j |\theta_j|, \quad (5)$$

где $\mu(\cdot)$ – функция кумулятивной связности, \mathbf{r} – остаток при представлении \mathbf{y} k -членной линейной моделью и $|\mathbf{r}|_k = (\sum_{j \in K} |\langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}_j \rangle|^2)^{1/2}$.

Функция кумулятивной связности $\mu(\cdot)$ имеет вид:

$$\mu(s) = \sup_{\operatorname{card}(I) \leq s} \sup_{j \notin I} \sum_{i \in I} |\langle \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle|, \boldsymbol{\varphi}_j \in \boldsymbol{\Phi} \subset \mathbf{X}, \|\boldsymbol{\varphi}_j\|_2 = 1. \quad (6)$$

где $s \leq N$, s – разреженность [5], т.е. число членов в линейном разложении (1); I – множество индексов функций, образующих подпространство; i – индексирует элементы подпространства, для всех возможных $\operatorname{card}(I)$ -членных разложений \mathbf{y} ($\operatorname{card}(I) = 1, \dots, s$, $i = 1, \dots, \operatorname{card}(I)$), $i \in I$, $\operatorname{card}(I) \leq s$ означает, что мощность множества индексов (размерность подпространства) варьируется от 1 до s .

Индекс i индексирует функции $\boldsymbol{\varphi}_i$ внутри подпространства ($i \in I$). Индекс j индексирует функции $\boldsymbol{\varphi}_j$ вне подпространства $j \notin I$. Например, для $s = 4$:

$$\operatorname{card}(I) = 1: i = \{1\} \ j = \{2, 3, 4\}; i = \{2\} \ j = \{1, 3, 4\}; i = \{3\} \ j = \{1, 2, 4\}; i = \{4\} \ j = \{1, 2, 3\}.$$

$$\operatorname{card}(I) = 2: i = \{1, 2\} \ j = \{3, 4\}; i = \{1, 3\} \ j = \{2, 4\}; i = \{1, 4\} \ j = \{2, 3\}; i = \{2, 3\} \ j = \{1, 4\}; i = \{2, 4\} \ j = \{1, 3\}; i = \{3, 4\} \ j = \{1, 2\}.$$

Поскольку "условие связности базиса" $\mu(2k-1) < 1$ удовлетворяется не для всякой системы базисных функций, в работе [7] было предложено производить остановку МПС по критерию выбора модели. Сравнительные исследования точности оценки вектора параметров МПС с остановкой по критерию выбора модели и по тесту на l_0 -оптимальность показали [8], что точность восстановления вектора параметров по критерию выбора модели хуже, чем по тесту на l_0 -оптимальность. Это заставляет искать пути расширения класса базисных функций, используемых для разреженной аппроксимации.

В контексте расширения класса базисных функций мы предлагаем производить преобразование имеющегося вектора выхода к выходу линейной

системы, сформированному системой базисных функций, удовлетворяющих условию связности базиса.

Пусть сигнал y получен с выхода линейной системы $A \{A, \Omega\}$. На вход линейной системы подан сигнал θ . Линейная система A выполняет преобразование $A\theta = y_0$. С учетом шума $y = y_0 + \varepsilon$.

В работе [9] предложен метод, позволяющий преобразовать y к выходу линейной системы $B \{B, \Omega\}$, выполняющей преобразование

$$B\theta = y_{01}. \quad (7)$$

Преобразование вектора выхода к выходу линейной системы с заданными свойствами производится путем умножения на матрицу редукции R

$$Ry = R A\theta + R\varepsilon. \quad (8)$$

Из сопоставления (7) и (8) видно, что $B = R A$.

В [9] показано, что если матрица $AA^T + \Omega$ невырождена и известна корреляционная матрица шума Ω , матрицу преобразования R можно найти следующим образом:

$$R = B(M)^+ A^T \Omega^{-1}, M = A^T \Omega^{-1} A, M^+ = M^T (MM^T)^{-1}. \quad (9)$$

В данной работе матрица преобразования R вычислялась следующим образом:

$$R_k = B A_k^+, \quad (10)$$

$$A_k^+ = V \text{diag}(\varphi_i / \sigma_i) U^T, \text{ iff } \sigma_i > \text{tresh } \varphi_i = 1, \text{ otherwise } \varphi_i = 0. \quad (11)$$

Здесь $A_k = U S V^T$, – приближение матрицы A ($m \times n$), полученное по k ($k < n$) компонентам сингулярного разложения. $U = (u_1, \dots, u_k)$ – матрица левых сингулярных векторов, $V = (v_1, \dots, v_k)$ – матрица правых сингулярных векторов, $S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ – матрица сингулярных чисел. Таким образом,

$$R_k = B V \text{diag}(\varphi_i / \sigma_i) U^T \quad (12)$$

Число компонент сингулярного разложения k выбирается таким, чтобы минимизировать ошибку восстановления сигнала y_{01} [10]:

$$d_y = \|e_y\| = \|Ry - y_{01}\|, e_y = e_{y1} + e_{y2} + e_{y3}, \quad (13)$$

$$e_{y1} = (A_k A_k^+ - I) y_0; e_{y2} = A_k A_k^+ \varepsilon; e_{y3} = D A^+ y_0 - D A_k^+ y_0 - D A_k^+ \varepsilon; \quad (14)$$

где $D = A - B$.

Алгоритм МПС с преобразованием вектора выхода представляет собой следующую последовательность действий:

Шаг 1.1. Сформировать матрицу входов $A \in \mathcal{R}^{L \times N}$, $L \ll N$.

Шаг 1.2. Для исходного набора базисных функций A вычислить функцию связности $\mu(\cdot)$.

Шаг 1.3. Проверить условие связности базиса: $\mu(2s-1) < 1$ для $s=1, \dots, 0.5N$. Если условие связности не выполняется, перейти к шагу 1.5.

Шаг 1.4. Инициализировать матрицу входов $\mathbf{X} = \mathbf{A}$ и перейти к шагу 2.1.

Шаг 1.5. Сформировать матрицу входов $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{L \times N}$, $L \ll N$.

Шаг 1.6. Получить матрицу преобразования \mathbf{R} .

Шаг 1.7. Произвести преобразование вектора выхода к системе базисных функций \mathbf{B} , удовлетворяющих условию связности базиса.

Шаг 1.8. Инициализировать матрицу входов $\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Шаг 2.1. Инициализировать $\mathbf{f}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_k = \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_L)$.

Нормировать матрицу входов: $\mathbf{X}(\cdot, i) = \boldsymbol{\varphi}_i / \|\boldsymbol{\varphi}_i\|_2$, где $\mathbf{X}(\cdot, i)$ – столбец i матрицы входов, $\mathbf{X}(\cdot, i) \in \mathcal{R}^L$, $\boldsymbol{\varphi}_i \in \mathcal{R}^L$.

Шаг 2.2. В матрице входов \mathbf{X} найти базисную функцию i , для которой скалярное произведение вектора $\boldsymbol{\varphi}_i$ и вектора текущего остатка \mathbf{r}_k максимально:

$$\gamma_k = \operatorname{argmax}_{i=1, \dots, N} |\langle \mathbf{X}(\cdot, i), \mathbf{r}_k \rangle|; \quad (15)$$

γ_k – индекс базисной функции в матрице входов $\gamma_k \in \{1, \dots, N\}$.

Шаг 2.3. Определить значение вектора параметров как

$$\boldsymbol{\theta}_k = (\boldsymbol{\Phi}_k^T \boldsymbol{\Phi}_k)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_k^T \mathbf{r}_k, \text{ где } \boldsymbol{\Phi}_k = \{\boldsymbol{\Phi}_{k-1}, \boldsymbol{\varphi}_{\gamma_k}\}. \quad (16)$$

Шаг 2.4. Вычислить новый вектор остатка

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \theta_{\gamma_k} \mathbf{X}(\cdot, \gamma_k) \quad (17)$$

путем вычитания из вектора остатка базисной функции с индексом γ_k ($\boldsymbol{\varphi}_k = \mathbf{X}(\cdot, \gamma_k)$), умноженной на соответствующий коэффициент $\theta_{\gamma_k} = \boldsymbol{\theta}_k(\gamma_k)$.

Шаг 2.5. Вычислить

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}|_1 + |\mathbf{r}|_{2k}, \text{ где } |\mathbf{r}|_1 = |\mathbf{r}_{k+1}|_1 = (|\langle \mathbf{r}_{k+1}, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle|^2)^{1/2}, \\ |\mathbf{r}|_{2k} = |\mathbf{r}_{k+1}|_{2k} = (\sum_{i \in I_{2k}} |\langle \mathbf{r}_{k+1}, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle|^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где I_{2k} – множество индексов $2k$ наибольших скалярных произведений $|\langle \mathbf{r}_{k+1}, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle|$.

Шаг 2.6. Вычислить

$$0.5(1 - \mu(2k-1)) \min_i |\theta_i|, \quad (19)$$

где i – индекс параметра, минимального по модулю; k – число отобранных базисных функций.

Шаг 2.7. Проверить выполнение $|\mathbf{r}_{k+1}|_1 + |\mathbf{r}_{k+1}|_{2k} < 0.5(1 - \mu(2k-1)) \min_i |\theta_i|$.

Если неравенство удовлетворяется, полученная k -членная линейная модель является решением с максимально возможной разреженностью и наименьшей ошибкой аппроксимации на основании теста оптимальной разреженности.

В противном случае продолжить формирование модели, перейдя на следующую итерацию – шаг 2.2.

Исследуем экспериментально точность восстановления вектора параметров методом поиска соответствий с преобразованием выхода линейной системы к системе с заданными свойствами.

2. Экспериментальное исследование

В экспериментальном исследовании линейные системы A и B представлены матрицами \mathbf{A} и \mathbf{B} , столбцы которых сформированы радиальными базисными функциями: $f_n(z) = \exp(-k_1(z-c)^2)$, $c = dn + b$, ($d=5$, $b=20$), $z = \{1, 5, 10, \dots, 100\}$, n – номер базисной функции. Для A $k=0.05$, для B $k=0.1$. Вектор θ в экспериментах был следующим: $\theta_5 = 1$, $\theta_6 = 0.5$, $\theta_{10} = 1$, $\theta_{11} = 0.26$, $\theta_{12} = 0.25$, другие компоненты вектора θ нулевые. Сигналы y_0 и y_{01} получены как $\mathbf{A}\theta$, $\mathbf{B}\theta$ соответственно. Уровень шума $\{0, 0.01, 0.02, \dots, 0.19\}$.

Функции кумулятивной связности для \mathbf{A} и \mathbf{B} приведены на рис. 1. Как видно из рисунка, для базиса \mathbf{A} значения функции связности больше единицы. Это значит, что при использовании базиса \mathbf{A} мы не можем останавливать МПС по условию l_0 -оптимальности. В этом случае возможна остановка алгоритма только по критерию выбора модели. Для базиса \mathbf{B} значения функции связности меньше единицы, но больше 0.5; поэтому для остановки жадного алгоритма может использоваться условие l_0 -оптимальности.

Исследуем точность восстановления вектора параметров θ по вектору выхода y_1 линейной системы B и вектору y_1' , полученному в результате преобразования $\mathbf{R}y$ выхода системы A , при уровнях шума $\{0, 0.01, 0.02, \dots, 0.19\}$. Линейную систему, выход которой является результатом преобразования $\mathbf{R}y$, будем далее называть системой B' . Для восстановления вектора параметров систем B и B' используем МПС как с остановкой по КВМ, так и по условию l_0 -оптимальности. Поскольку точность восстановления сигнала непосредственно зависит от того, модель какой сложности будет получена в результате остановки алгоритма аппроксимации, исследуем также зависимость сложности модели от уровня шума при восстановлении вектора параметров линейных систем B и B' .

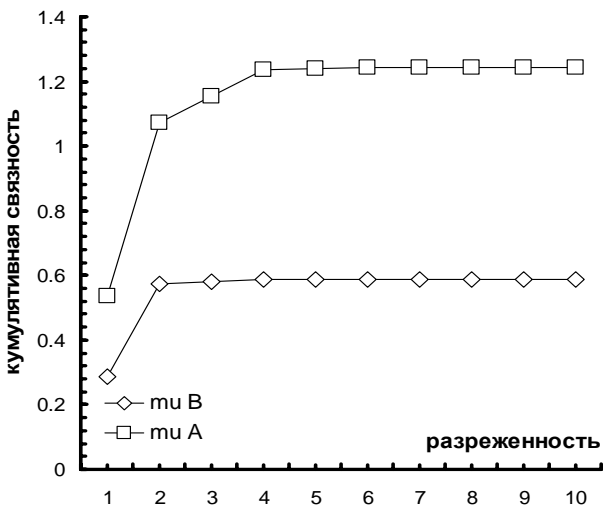


Рис.1 Функция кумулятивной связности для \mathbf{A} и \mathbf{B} .

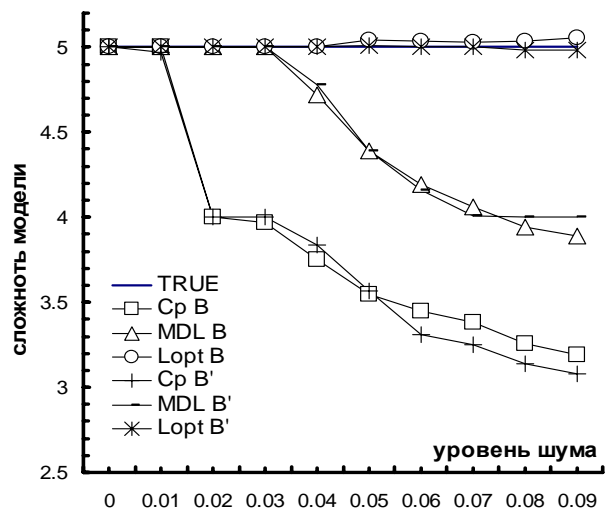


Рис.2 Зависимость сложности модели от уровня шума для систем B и B' .

Зависимости сложности модели, полученной по вектору выхода исходной системы B и преобразованной B' , от уровня шума для МПС с остановкой по условию l_0 -оптимальности $Lopt$, критерию Маллоуза [11] Cp и минимальной длины описания [12] MDL приведены на рис.2.

Сложность истинной модели, т.е. число ненулевых компонент в векторе параметров, равна пяти и не меняется в зависимости от уровня шума. Зависимость сложности модели, полученной МПС с остановкой по критериям выбора модели, имеет сходную тенденцию как для системы B , так и для преобразованной системы B' : до некоторого уровня шума сложность модели равна истинной, а затем начинает убывать. Отличие состоит в том, при каком уровне шума начинается убывание, т.е. до какого уровня шума сохраняется истинная структура модели. Наиболее быстро убывает сложность модели, полученной МПС с остановкой по критерию Маллоуза, затем - по критерию минимальной длины описания. Дольше всего истинную структуру модели удерживает МПС с остановкой по тесту на l_0 -оптимальность. При этом, сложность модели МПС с остановкой по тесту на l_0 -оптимальность для системы B' в исследованном диапазоне шумов не убывает, а колеблется около истинной сложности модели.

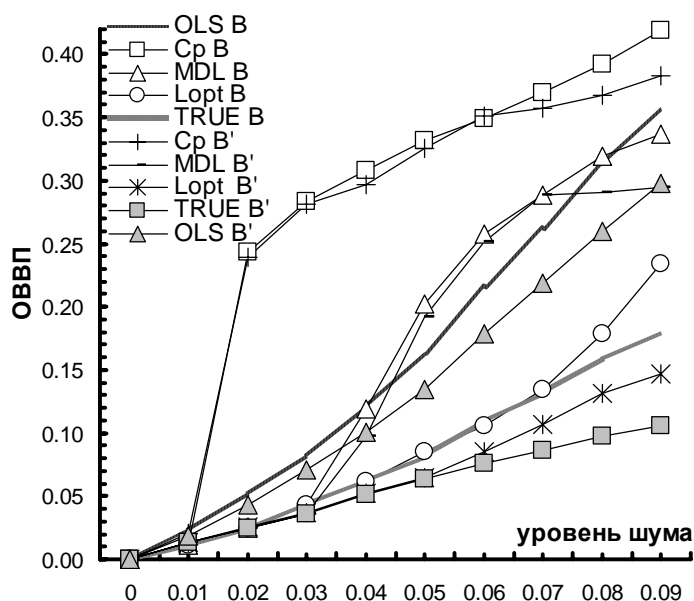


Рис.3 Зависимость ОВВП от уровня шума для систем B и B'

Ошибка восстановления вектора параметров (ОВВП) вычислялась как математическое ожидание нормы разности истинного и восстановленного векторов параметров. Исследовалась точность восстановления вектора параметров θ по вектору выхода y_1 линейной системы B и вектору y_1' , полученному в результате преобразования Ry выхода системы A , при уровнях шума $\{0, 0.01, 0.02, \dots, 0.19\}$. Зависимости значений ошибки восстановления вектора параметров по вектору выхода систем B и B' от уровня шума для МПС

с остановкой по условию l_0 -оптимальности $Lopt$, критериям Маллоуза Cr и минимальной длины описания MDL приведены на рис.3.

Анализ зависимостей показал следующее. Ошибка восстановления вектора параметров для всех методов возрастает с нарастанием уровня шума. Среди всех методов значения ОВВП истинной модели – наименьшие, а для метода наименьших квадратов с истинной моделью – наибольшие. Под истинной моделью (*TRUE*) будем понимать линейную модель с фиксированной структурой из пяти базисных функций $\{\Phi_5, \Phi_6, \Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{12}\}$.

При начальных уровнях шума ОВВП для Cr и MDL близки к ОВВП истинной модели. С нарастанием уровня шума ОВВП для Cr и MDL становится больше, чем ОВВП метода наименьших квадратов с полной моделью. При этом значения ОВВП для оценок по вектору выхода y_1 линейной системы B и вектору y_1' , полученному в результате преобразования, близки между собой.

Значения ОВВП для МПС с остановкой по условию l_0 -оптимальности $Lopt B$ близки к ОВВП истинной модели во всем диапазоне шумов, а для $Lopt B'$ - близки к ОВВП истинной модели по вектору y_1' . Как ОВВП для $Lopt B$, так и для $Lopt B'$ далеки от ОВВП метода наименьших квадратов с истинной моделью.

Таким образом, наибольшую точность восстановления вектора параметров (наименьшую ОВВП) обеспечивает МПС с остановкой по условию l_0 -оптимальности. При этом, точность оценок параметров по вектору y_1' , полученному в результате преобразования, выше, чем для оценок, полученных по исходному вектору выхода y_1 линейной системы B .

Сопоставление зависимостей ОВВП и сложности модели от уровня шума показало, что методы остановки МПС, позволяющие при нарастающем шуме как можно дольше удерживать истинную структуру модели, обеспечивают наибольшую точность оценки вектора параметров.

3. Выводы

Наибольшую точность восстановления вектора параметров (наименьшую ОВВП) обеспечивает МПС с остановкой по условию l_0 -оптимальности. Точность для оценок параметров по вектору y_1' , полученному в результате преобразования, выше, чем для оценок, полученных по исходному вектору выхода y_1 линейной системы B .

Сопоставление зависимостей ОВВП и сложности модели от уровня шума показало, что методы остановки МПС, позволяющие при нарастающем шуме как можно дольше удерживать истинную структуру модели, обеспечивают наибольшую точность оценки вектора параметров.

Предложенный метод позволяет использовать для разреженной аппроксимации более широкий класс базисных функций за счет

преобразования линейной системы к системе с заданными свойствами, а также обеспечивает повышение точности за счет использования теста на l_0 -оптимальность.

Литература

1. Cucker F., Smale S. On the mathematical foundations of learning // Bulletin of the American Mathematical Society. – 2001. – V. 39, № 1. – P. 1-49.
2. Chen S.S., Donoho D.L., Saunders M.A. Atomic decomposition by Basis Pursuit // SIAM J. Sci. Comp. – 1999. – V. 20, № 1. – P. 33-61.
3. Temlyakov V. Nonlinear methods of approximation // Foundations of Comp. Math. – 2003. – V. 3. – P. 33-107.
4. Mallat S., Zhang Z. Matching pursuit with time frequency Dictionaries // IEEE Trans. Signal Proc. – 1993. – V. 41, № 12. – P. 3397-3415.
5. Tropp J. A. Greed is good: Algorithmic results for sparse approximation // IEEE Trans. Info. Theory. – 2004. – V. 50, № 10. – P. 2231-2242.
6. Gribonval R., Figueras i Ventura R.M., Vandergheynst P. A simple test to check the optimality of sparse signal approximations // Tech. Rep., IRISA. – 2004. – PI-1661.
7. Ревунова Е.Г. Информационная технология анализа данных с помощью линейных моделей в условиях неопределенности // Адаптивные системы автоматического управления. – 2007. – № 11(31). – С.72-80.
8. Забулонов Ю.Л., Лисиченко Г.В., Ревунова Е.Г. Повышение точности идентификации радионуклидов методом поиска соответствия // Сборник научных трудов ИПМЭ НАН Украины “Моделирование и информационные технологии”. – 2009. – вып.53. – С.108-114
9. Пытьев Ю.П. Математические методы интерпретации эксперимента. М: Высшая школа. – 1989. – 351 с.
10. Ревунова Е.Г., Забулонов Ю.Л. Исследование составляющих ошибки для решения задачи редукции измерений с использованием сингулярного разложения // Сб. научн. тр. СНИЭиП. – Севастополь. – 2011. – Подано.
11. Mallows C.L. Some comments on Cp // Technometrics. – 1973. – V. 15, № 4. – P. 661-675.
12. Hansen M., Yu B. Model selection and minimum description length principle // J. Amer. Statist. Assoc. – 2001. – V. 96. – P. 746-774.