УДК: 681.5

С.И. Доценко, О.К. Закусило

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА С «ЗАМИНИРОВАННЫМИ» ОБЪЕКТАМИ

Рассмотрена задача оптимального выбора при условии, что некоторые объекты, выбираемые по случайному закону, являются заминированными. Просмотр заминированного объекта приводит к принудительной остановке процесса просмотра. Установлено, что в рассматриваемом случае, оптимальная стратегия имеет пороговый вид. Выведено уравнение, корень которого является искомой величиной порога. Найдены оптимальные стратегии при разных способах и параметрах минирования.

Введение. В [1] была рассмотрена задача выбора наилучшего объекта, сформулированная следующим образом. Пусть некто в случайном порядке знакомится с n объектами и хочет выбрать среди них наилучший. При этом после ознакомления с очередным объектом нужно либо остановить на нем свой выбор, либо отвергнуть его; возвращаться к ранее просмотренным объектам нельзя. Объекты являются упорядоченными определенным образом по качеству, т.е. качества любых двух объектов сравнимы между собой. «Ознакомление в случайном порядке» означает, что изначально все $n!$ перестановок, задающих порядок просмотра объектов, равновероятны.

Объект, наилучший среди всех n, в дальнейшем будем называть *наилучшим*, а объект, лучший среди k просмотренных, — *максимальным*. Очевидно, что в ходе просмотра следует анализировать целесообразность остановки выбора на некотором объекте, только если он является максимальным. При этом оказывается, что первый объект является максимальным и индексы максимальных объектов образуют цепь Маркова с переходными вероятностями $p(k,\ j)=\dfrac{k}{j(j-1)},\ j>k$. Независимо от того, был ли k-й элемент максимальным или нет, вероятность того, что среди элементов с индексами $k+1,...,n$ минимальный индекс максимального элемента будет j, равна $\dfrac{k}{j(j-1)},\ j>k$ и с вероятностью $\dfrac{k}{n}$ в последовательности $k+1,...,n$ не встретится ни одного максимального элемента.

Доказано, что для того, чтобы выбрать наилучший объект из n, нужно придерживаться такой стратегии: вначале пропустить все элементы с индексами $1,...,k^*-1$ и затем остановить свой выбор на первом максимальном элементе, индекс которого не меньше k^*, где k^* определяется из двойного неравенства

$$\frac{1}{k^*}+...+\frac{1}{n-1}\le 1<\frac{1}{k^*-1}+...+\frac{1}{n-1}. \qquad (1)$$

Оказывается, что при $n\to\infty$ $\frac{k}{n}\to\frac{1}{e}$, а вероятность выбора наилучшего объекта при соблюдении описанной стратегии стремится к 1 / e. Множество индексов, на которых возможна остановка, будем обозначать $\Gamma^*=\{k^*,...,n\}$ и называть опорным множеством.

Постановка задачи оптимального выбора с заминированными объектами

Предположим, что среди всех объектов один или несколько являются «заминированными» (в дальнейшем будем сокращенно называть их з.о.). Количество и положение з.о. случайно и подчинено заданому распределению. *После просмотра з.о. следует принудительное прекращение дальнейшего просмотра и получение нулевого выигрыша* (предполагается, что подрыв на мине приводит лишь к прекращению просмотра и не несет иного ущерба).

Далее будет рассмотрено два варианта минирования:

1. Заминирован один объект, и его положение равновероятно для всех значений n.

2. Каждый из объектов минируется независимо от других с вероятностью α / n. Таким образом, число з.о. имеет биномиальное, а в пределе, при $n\to\infty$, пуассоновское распределение.

Интуитивно ясно, что «минирование» приведет к таким последствиям:

1. Вероятность нахождения наилучшего элемента уменьшится.

2. Оптимальная стратегия просмотра станет более «осторожной», и область просмотра сузится.

Дальнейшие выкладки подтвердят справедливость данных предположений и покажут, что оптимальная стратегия по-прежнему имеет пороговый вид, т.е. пропустить некоторое количество элементов и остановиться после этого на первом максимальном элементе, но значение порога (количество пропускаемых элементов) по сравнению с классическим случаем уменьшится.

Далее найдем множества элементов, на которых следует делать остановку при условии, что эти элементы являются максимальными. Проведем рассуждения методом обратной индукции.

Первый случай. Пусть заминирован один объект и его положение равновероятно для всех значений n.

Пусть просматривается (n – 1)-й элемент, он является максимальным и при этом ни он, ни предыдущие элементы не были заминированы. Если остановиться на данном элементе, то величина выигрыша составит $\frac{n-1}{n}$, а если продолжить просмотр, то следующий элемент будет заминирован и величина выигрыша составит 0. Таким образом, на (n – 1)-м элементе следует остановиться.

Предположим, что просматривается k-й элемент, который является максимальным и уже установлено, что на всех последующих элементах также следует делать остановку, если они оказались максимальными. Если сделать остановку на k-м элементе, то, как и в классическом случае, величина выигрыша составит $f(k)=\frac{k}{n}$. Если же продолжить просмотр, то согласно индукции следует остановиться на следующем максимальном элементе, и согласно формуле полной вероятности средняя величина выигрыша в классическом случае составляет

$$f'(k)=\sum_{j=k+1}^{n} p(k,\ j)\,f(j)=\frac{k}{n}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j-1}. \qquad (1)$$

В случае наличия мин каждое слагаемое в (1) следует умножить на условную вероятность того, что среди $k+1,\ldots,\ j$ нет з.о. при условии, что среди $1,\ldots,k$ также нет з.о. (обозначим этот множитель через $r(k,\ j)$), тогда

$$r(k,\ j)=P(k+1,\ldots,\ j-\text{не з.о.}\,|\,1,\ldots,k-\text{не з.о.})=\frac{P(1,\ldots,\ j-\text{не з.о.})}{P(1,\ldots,k-\text{не з.о.})}=\frac{n-j}{n-k}. \qquad (2)$$

Заметим, что $r(k,n)=0$, поэтому последнее слагаемое пропадает, и (1) приобретает вид

$$f'(k)=\sum_{j=k+1}^{n} p(k,\ j)r(k,\ j)\,f(j)=\frac{k}{n(n-k)}\sum_{j=k+1}^{n-1}\frac{n-j}{j-1}. \qquad (3)$$

Найдем множество индексов k, для которых справедливо неравенство $f(k)\geq f'(k)$. Данное неравенство равносильно

$$\frac{1}{n-k}\sum_{j=k+1}^{n-1}\frac{n-j}{j-1}\leq 1. \qquad (4)$$

Покажем, что левая часть (4) при любом фиксированном n монотонно убывает по k:

$$S(k,n)=\sum_{j=k+1}^{n-1}\frac{n-j}{n-k}\frac{1}{j-1}=\frac{n-(k+1)}{n-k}\frac{1}{(k+1)-1}+\frac{n-(k+2)}{n-k}\frac{1}{(k+2)-1}+\ldots \qquad (5)$$

$$S(k+1,n)=\sum_{j=k+2}^{n-1}\frac{n-j}{n-(k+1)}\frac{1}{j-1}=\frac{n-(k+2)}{n-(k+1)}\frac{1}{(k+2)-1}+\frac{n-(k+3)}{n-(k+1)}\frac{1}{(k+3)-1}+\ldots \qquad (6)$$

Сопоставим первое по порядку слагаемое из (5) с первым из (6), второе со вторым и т.д. Заметим, что все слагаемые положительные. Каждое слагаемое состоит из двух сомножителей, и каждый сомножитель из (5) не меньше соответствующего сомножителя соответствующего слагаемого из (6). Значит каждое слагаемое из (6) меньше соответствующего по порядку слагаемого из (5). Кроме того, в (5) на одно слагаемое больше. Отсюда $S(k,n) > S(k+1,n)$. Непосредственно легко показать, что $S(1,n) > 1$, а $S(n-1,n) < 1$. Значит неравенство (4) выполняется, начиная с некоторого k^* — это и есть согласно индукции множество индексов элементов, на которых следует остановиться при условии, что элемент является максимальным. На элементах с индексами, меньшими, чем k^*, останавливаться не следует, поскольку для них нарушается неравенство (4) и, следовательно, стратегия остановки на таком элементе заведомо хуже, чем стратегия, состоящая в том, чтобы сделать один шаг вперед и остановиться на следующем максимальном элементе.

Далее, найдем предел отношения $\frac{k^*}{n}$ при $n \to \infty$. Пусть x — некоторое число из интервала (0; 1), тогда $\sum_{j=[nx]}^{n-1} \frac{n-j}{n-(k-1)} \frac{1}{j-1} \xrightarrow{n\to\infty} \int_x^1 \frac{1-t}{1-x} \frac{1}{t} dt = -\frac{-\ln(x)}{1-x} - 1$ и искомый предел является корнем уравнения $\frac{-\ln(x)}{1-x} - 1 = 1$. Отсюда $2 - 2x + \ln(x) = 0$. Данное уравнение имеет единственный корень на интервале (0; 1), примерно равный 0,203. Значит при больших n следует придерживаться такой стратегии: пропустить первые $0{,}203\,n$ элементов и остановиться на первом максимальном элементе. При этом вероятность выбора наилучшего элемента составит

$$\begin{aligned} P^* &= P(\text{среди } 1-0{,}203n \text{ нет мин}) f'(0{,}203n) \\ &= P(\text{среди } 1-0{,}203n \text{ нет мин}) f(0{,}203n) = (1-0{,}203)\cdot 0{,}203 = 0{,}162. \end{aligned}$$

Приведем строгое доказательство того, что предел отношения $\frac{k^*}{n}$ равен меньшему корню уравнения $2 - 2x + \ln(x) = 0$ (поскольку данное доказательство громоздко, оно может быть пропущено при первом чтении).

Доказательство. Пусть $n \geq 3$, $k^* = k^*(n)$ — такой наименьший номер k, начиная с которого выполняется неравенство $\frac{1}{n-k} \sum_{j=k}^{n} \frac{n-j}{j} \leq 1$. Докажем, что при $n \to \infty$ $\frac{k^*}{n}$ стремится к меньшему корню уравнения $2 - 2x + \ln(x) = 0$ (этот корень примерно равен 0,203, второй, больший корень равен 1).

Обозначим $a_{nk} = \dfrac{1}{n-k}\sum_{j=k}^{n}\dfrac{n-j}{j}$, $1 \le k \le n-1$. Как было показано ранее, данная последовательность монотонно убывает по k при любом фиксированном n. Кроме того, $a_{n1} > \dfrac{1}{n-1}\dfrac{n-1}{1} = 1$, $a_{n,n-1} = \dfrac{1}{n-1}$, значит номер k существует, причем $2 \le k^* \le n-1$.

Таким образом, для индекса k^* должно выполняться двойное неравенство:

$$a_{n,k^*} \le 1 < a_{n,k^*-1}. \tag{7}$$

Представим последовательность $a_{n,k}$ в виде

$$a_{n,k} = \frac{1}{1-k/n}\frac{1}{n}\sum_{j:\frac{k}{n}\le\frac{j}{n}\le 1}\left(\frac{1}{j/n}-1\right) \tag{8}$$

Учитывая (7), можно выделить подпоследовательность номеров $\{n'\}$, для которой $\dfrac{k^*(n')}{n'} \to x$, где x — некоторое число из интервала [0; 1]. Заметим, что тогда также $\dfrac{k^*(n')-1}{n'} \to x$.

Далее, в выражении (8) положим $n = n' \to \infty$. Рассмотрим различные случаи возможных значений x:

1. $x = 0$. Тогда $a_{n,k^*} \sim \dfrac{1}{n}\sum_{j:\frac{k^*}{n}\le\frac{j}{n}\le 1}\left(\dfrac{1}{j/n}-1\right)$. Отсюда $\forall\, e \in (0;1):\ \varliminf_{n\to\infty} a_{n,k^*} \ge \int_e^1\left(\dfrac{1}{t}-1\right)dt \to +\infty, e \to 0^+$. Но, с другой стороны, из (7) следует, что $\varliminf_{n\to\infty} a_{n,k^*} \le 1$ (это противоречит предыдущему соотношению). Значит $x \ne 0$.

2. $x = 1$. Тогда $a_{n,k^*} \le \dfrac{1}{n-k^*}(n-k^*)\cdot\max_{j=k,n-1}\left(\dfrac{n-j}{j}\right) = \dfrac{n-k^*}{k^*} \to 0$, и аналогично $a_{n,k^*-1} \to 0$, что противоречит (7). Значит $x \ne 1$.

3. При $0 < x < 1$ имеем $a_{n,k^*} \to \dfrac{1}{1-x}\int_x^1\left(\dfrac{1}{t}-1\right)dt = \dfrac{-\ln(x)+x-1}{1-x}$, к этому же пределу сходится и a_{n,k^*-1}. С другой стороны, из (7) следует, что $a_{n,k^*} \to 1$, $a_{n,k^*-1} \to 1$, $\dfrac{-\ln(x)+x-1}{1-x} = 1$, $f(x) = 2x - 2 - \ln(x) = 0, 0 < x < 1$.

Имеем: $f(1)=0,\ f(+0)=+\infty,\ f'(x)=2-\frac{1}{x}=0$ при $x=\frac{1}{2}$. Функция $f(x)$ убывает на $\left(0;\frac{1}{2}\right]$, возрастает на $\left[\frac{1}{2};1\right]$, поэтому $f\left(\frac{1}{2}\right)< f(-1)=0$, тогда на промежутке $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ функция имеет единственный нуль x_0.

Таким образом, $\frac{k^*(n')}{n'}\to x_0$. Предел не зависит от выбора подпоследовательности номеров, для которой $\frac{k^*(n')}{n'}$ сходится. Значит ограниченная последовательность $\left\{\frac{k^*(n)}{n}, n\ge 3\right\}$ имеет единственную предельную точку x_0, отсюда $\frac{k^*(n)}{n}\to x_0,\ n\to\infty$. ■

Второй случай. Пусть каждый из объектов минируется независимо от других с вероятностью $\alpha\ /\ n$, где α — параметр, задающий среднее количество мин. Проведем рассуждения аналогично предыдущему случаю, методом обратной индукции. В этом случае, в отличие от предыдущего, возможна ситуация, когда просматривается самый последний элемент и этот элемент является максимальным. Очевидно, на таком элементе следует остановиться.

В данном случае $r(k,\ j)=\left(1-\frac{a}{n}\right)^{j-k}$, тогда

$$f'(k)=\sum_{j=k+1}^{n} p(k,\ j)r(k,\ j)f(j)=\frac{k}{n}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j-1}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{j-k}. \tag{9}$$

Как и в предыдущем случае $f(k)=\frac{k}{n}$, тогда неравенство $f(k)\ge f'(k)$ приобретает вид

$$\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j-1}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{j-k}\le 1. \tag{10}$$

Покажем, что левая часть (10) монотонно убывает по k при фиксированных значениях α и n. Обозначим $q=1-\frac{\alpha}{n}$, тогда

$$S(k,n)=\frac{q}{k}+\frac{q^2}{k+1}+\ldots+\frac{q^{n-k}}{n-1}, \tag{11}$$

$$S(k+1,n)=\frac{q}{k+1}+\frac{q^2}{k+2}+\ldots+\frac{q^{n-k-1}}{n-1}. \tag{12}$$

Аналогично предыдущему случаю, все слагаемые положительны, каждое слагаемое в (11) больше соответствующего по порядку слагаемого в (12) и (11), содержит на одно слагаемое больше, отсюда $S(k,n) > S(k+1,n)$. Легко показать, что при фиксированном α и достаточно большом n $S(1,n) > 1$, а $S(n-1,n) < 1$. Значит неравенство (4) выполняется, начиная с некоторого k^*, которое, естественно, будет отличаться от соответствующего значения в предыдущем случае.

Найдем предел отношения $\frac{k^*}{n}$ при $n \to \infty$. Пусть x — некоторое число из интервала (0; 1), тогда

$\sum_{j=[nx]}^{n-1} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{j-k} \frac{1}{j-1} \xrightarrow{n\to\infty} \int_x^1 \exp(-a(t-x)) \frac{1}{t} dt$ и искомый предел является корнем уравнения $\int_x^1 \exp(-a(t-x)) \frac{1}{t} dt = 1$.

При этом вероятность выбора наилучшего элемента составит

$$P^* = P(\text{среди } 1-k^* \text{ нет мин}) f'(k^*) =$$
$$= P(\text{среди } 1-k^* \text{ нет мин}) f(k^*) = \exp\left(-a\frac{k^*}{n}\right)\frac{k^*}{n}.$$

В таблице приведены предельные значения $\frac{k^*}{n}$ и P^* для некоторых значений параметра α.

α	0,01	0,05	0,1	0,5	1	2	5	10
k^*/n	0,367	0,363	0,358	0,319	0,271	0,192	0,087	0,043
P^*	0,366	0,356	0,346	0,272	0,207	0,131	0,056	0,028

Выводы. Проделанные расчеты подтверждают следующие тенденции: $\frac{k^*}{n}$ и P^* стремятся к $\frac{1}{e}$ при малых α и к 0 при больших α. При α = 1 величины $\frac{k^*}{n}$ и P^* больше, чем соответствующие величины в первом случае (0,271 и 0,207 против соответственно 0,203 и 0,162). Это может быть объяснено тем, что пуассоновское распределение с параметром 1 менее регулярно, чем 1 с вероятностью 1. «Минирование» менее регулярным образом при том же среднем количестве мин оказывается менее эффективным.

Кроме того, были подтверждены изначальные гипотезы о том, что интуитивно «минирование» приведет к следующему: вероятность нахождения наилучшего элемента по сравнению с классическим случаем уменьшится, а оптимальная стратегия просмотра станет более «осторожной» и область просмотра сузится.

Интересным направлением дальнейших исследований будет рассмотрение кооперативных и некооперативных игровых задач поиска наилучшего элемента в «заминированной» среде.

1, *Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А.* Теоремы и задачи о процессах Маркова. — М.: Наука, 1967. — С. 91–102.
2, *Гусейн-Заде С.М.* Задача выбора и оптимальное правило остановки последовательности независимых испытаний. Теория вероятностей и ее приложения. — 1966. — 11 (3). — С. 534–537.
3, *Доценко С.* Задача выбора наилучшего объекта как игра двух лиц // Кибернетика и вычисл. техника. — 2011. — Вып. 164.— С. 43–53.

Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко

Получено 01.11.2012