УДК 517.925.51

Ф.Г. Гаращенко, В.Р. Кулян, Ю.И. Солошенко

ЗАДАЧА О ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ

Рассматривается задача построения математической модели динамического хеджирования проданного опциона колл на корзину акций с учетом транзакционных издержек. Исследована динамика стоимости инвестиционного портфеля при транзакционных затратах. Сформулирована задача управления динамическим хеджированием портфеля.

Введение. Динамическое хеджирование опционных позиций — одна из важнейших задач, возникающих при торговле опционами. Проблема динамического хеджирования состоит в необходимости торговли базовым активом (корзиной акций) для хеджирования выплаты по опциону на дату экспирации. Идея хеджирования выплаты по опциону с помощью торговли базовой корзиной акций рассматривалась в работах Блэка-Шоулза [1] и Мертона [2] по ценообразованию опционов. Данные теории утверждают, что «честная» (теоретическая) цена опциона и есть стоимость операций хеджирования портфеля.

Актуальность предмета исследований продиктована введением в 2011 г. на Украинской бирже опционов на фьючерс на индекс Украинской биржи, которые, по сути, являются опционами на корзину акций. При построении риск-нейтральных стратегий использования опционов дает возможность построения объемных позиций с минимальным уровнем преддепонирования и требует разработки новых методов анализа и управления инвестиционными портфелями.

В данной статье рассматривается задача построения математической модели динамического хеджирования проданного опциона колл на корзину акций с учетом транзакционных издержек.

Европейский опцион колл на корзину акций дает право (но не обязует) покупки базовой корзины акций по определенной цене $\overline{K}$ (страйк опциона) и в определенное время (дата экспирации). Очевидно, что чем ниже страйк опциона, тем он более ценный. Целью данной работы является построение математической модели динамического хеджирования проданного опциона колл на корзину акций с учетом транзакционных издержек для решения важных прикладных задач ценообразования опционов.

Рассмотрим проблему продажи опциона колл на корзину акций. Если на дату экспирации цена корзины меньше страйка $\overline{K}$ опциона, то владелец не будет его экспирировать, а продавец не будет иметь обязательств перед владельцем. С другой стороны, если цена корзины акций будет больше, чем страйк опциона, то владелец экспирирует опцион и получит от продавца корзину акций по цене страйка опциона. Соответственно продавец опциона потеряет сумму, равную цене корзины акций минус страйк на дату экспирации.

Для того чтобы уменьшить потенциальный риск, продавец опциона может его хеджировать, используя деньги, полученные от продажи опциона (премию по опциону), для торговли акциями из корзины и безрисковым активом (облигацией). Продавец должен торговать корзиной акций так, чтобы (в идеальном случае), если цена корзины будет меньше страйка на дату экспирации, стоимость портфеля будет больше нуля, а если цена

© Ф.Г. Гаращенко, В.Р. Кулян, Ю.И. Солошенко, 2012

корзины в день экспирации будет больше страйка — стоимость портфеля будет большей, чем цена корзины минус страйк опциона. Таким образом, независимо от результата торгов продавец опциона хотел бы получить прибыль в день экспирации. Это — основная проблема динамического хеджирования.

Сформулируем математически задачу динамического хеджирования как стохастическую задачу управления с дискретным временем.

Активы и динамика стоимости портфеля при транзакционных затратах. Будем рассматривать классические модели [3] динамики цен облигации $B(t)$ и акции $S_i(t)$, $i=1,...,n$.

$$dB(t) = \hat{r}B(t)dt, \tag{1}$$

$$dS_i(t) = \hat{\mu}_i S_i(t)dt + S_i(t)dz_i(t),\ i = 1,..., n, \tag{2}$$

где $\hat{r}$ — процентная ставка с нулевым риском, $\hat{\mu}_i$ — ожидаемая доходность акции i, $z(t) = (z_i(t),...,z_n(t))^T$ — вектор броуновского движения с ковариационной матрицей $E[dz(t)dz(t)^T] = \hat{\Phi}dt$, где $\hat{\Phi} > 0$.

Рассмотрим дискретную версию данных уравнений. На шаге $k+1$ получим

$$B((k+1)\Delta t) = (1+\hat{r}\Delta t)B(k\Delta t), \tag{3}$$

$$S_i((k+1)\Delta t) = (1+\hat{\mu}_i\Delta t + z_i((k+1)\Delta t) - z_i(k\Delta t))S_i(k\Delta t),\ i=1,...,n. \tag{4}$$

Перепишем уравнения в виде

$$B(k+1) = (1+r_f)B(k), \tag{5}$$

$$S_i(k+1) = (1+\mu_i + \tilde{w}_i(k))S_i(k),\ \ i=1,...,n. \tag{6}$$

где $r_f = \hat{r}\Delta t$, $\mu_i = \hat{\mu}_i\Delta t$ и $\tilde{w}_i(k) = z_i((k+1)\Delta t) - z_i(k\Delta t)$. Предполагаем, что $\tilde{w}(k)$ — гауссовский процесс с $E[\tilde{w}_i(k)] = 0$ и ковариационной матрицей $E[\tilde{w}(k)\tilde{w}^T(k)] = \Phi = \hat{\Phi}\Delta t$, где $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2,..., \tilde{w}_n)^T$.

Далее построим модель динамики стоимости портфеля, где первые $l \le n$ акций торгуются с помощью самофинансирования в дискретные моменты времени $k = 1,..., N$. Под самофинансируемой будем понимать торговлю ценными бумагами, при которой денежные средства не добавляются и не выводятся из портфеля.

Пусть $W(k^-)$ — стоимость портфеля до операций в момент k, а $W(k)$ — стоимость портфеля после операций в момент k. При этом, с учетом возникновения транзакционных затрат, $W(k)$ и $W(k^-)$ будут связаны следующим образом:

$$W(k) = W(k^-) - \sum_{j=1}^{l} \tau_j(k), \tag{7}$$

где $\tau_j(k)$ — транзакционная стоимость, которая появилась в результате торговых действий акцией j в момент k.

Пусть $u_j(k)$ — стоимость акции j сразу после операций в момент k. Запишем уравнение стоимости портфеля:

$$W(k) = \beta B(k) + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j S_j(k).$$

Используя (5) и (6), запишем:

$$\begin{aligned} W(k+1^-) &= \beta(1+r_f)B(k) + \sum_{j=1}^{l}(1+\mu_j + \widetilde{w}_j(k))\alpha_j S_j(k) = \\ &= (1+r_f)(\beta B(k) + \sum_{j=1}^{l}\alpha_j S_j(k)) + \sum_{j=1}^{l}(\mu_j - r_f + \widetilde{w}_j(k))\alpha_j S_j(k) \cdot \end{aligned}.$$

Откуда

$$W(k+1^-) = (1+r_f)W(k) + \sum_{j=1}^{l}(\mu_j - r_f + \widetilde{w}_j(k))u_j(k). \tag{8}$$

Уравнение динамики стоимости портфеля запишем следующим образом:

$$W(k+1^-) = (1+r_f)W(k^-) + \sum_{j=1}^{l}\{(\mu_j - r_f + \widetilde{w}_j(k))u_j(k) - (1+r_f)\tau_j(k)\}. \tag{9}$$

В данной модели будем рассматривать транзакционные затраты пропорционально денежной стоимости транзакции. Так как $u_j(k-1)/S_j(k-1)$ — это количество акций j в портфеле в момент $k-1$, то денежная стоимость акций до торговли в момент k равна $S_j(k)(u_j(k-1)/S_j(k-1))$. Отсюда транзакционные затраты на акции j в k:

$$\tau_j(k) = k_j \left| u_j(k) - u_j(k-1)\frac{S_j(k)}{S_j(k-1)} \right|, \tag{10}$$

где k_j — комиссия за торговлю акциями j.

Выплаты по Европейскому опциону колл на корзину акций. Рассмотрим проблему хеджирования Европейского опциона колл, который экспирируется в момент N. Корзина — это набор акций с соответствующими весами:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i S_i(k) = a^T S(k), \tag{11}$$

где $a = (a_1, a_2, ..., a_n)^T \in R^n$ — множество весов и $S(k) = (S_1(k), S_2(k), ..., S_n(k))^T$.

Пусть $\overline{K}$ — цена страйка опциона, тогда выплаты по опциону составят

$$c(N) = (a^T S(N) - \overline{K})^+, \tag{12}$$

где $X^{+}=\max(X,0)$. Т.е., если на дату экспирации цена корзины акций $a^{T}S(N)$ меньше страйка $\overline{K}$, то стоимость опциона равна нулю, но если цена корзины больше, чем страйк, то стоимость опциона составит разницу между ценой корзины и страйком.

Постановка задачи управления динамического хеджирования портфеля. Рассмотрим проблему хеджирования, в которой продавец опциона колл желает воспроизвести противоположную позицию. В частности, если продавец получил денежные средства от продажи опциона $W(0^{-})$, то может торговать ими, для того чтобы хеджировать выплату по опциону (12). Допустим, хеджер желает торговать так, чтобы на момент экспирации его капитал максимально превышал выплату по опциону. Сформулируем задачу управления динамическим хеджированием портфеля.

Запишем уравнение динамики стоимости портфеля, динамики цены акции и транзакционных затрат:

$$W(k+1^{-})=(1+r_f)W(k^{-})+\sum_{j=1}^{l}\{(\mu_j-r_f+\widetilde{w}_j(k))u_j(k)-(1+r_f)\tau_j(k)\},$$

$$S_i(k+1)=(1+\mu_i+\widetilde{w}_i(k))S_i(k),\ \ i=1,\dots,n, \tag{13}$$

$$\tau_j(k)=k_j\left|u_j(k)-u_j(k-1)\frac{S_j(k)}{S_j(k-1)}\right|,\ \ j=1,\dots,l.$$

Запишем начально-краевые условия:

$$\begin{gathered}W(0^{-})=W_0,\ S_t(0)=S_0^{i},\\ i=1,\dots,n,\ u_j(0)=0,\ \ u_j(N)=0,\ \ j=1,\dots,l.\end{gathered} \tag{14}$$

Сформулируем критерий

$$\max_{u_j(k)}\delta, \tag{15}$$

где

$$\delta=\begin{cases}E[W(N)]-\gamma\sqrt{\mathrm{Var}(W(N))},(a^{T}S(N)-\overline{K})\le 0,\\ E[W(N)-(a^{T}S(N)-\overline{K})]-\gamma\sqrt{\mathrm{Var}(W(N^{-})-(a^{T}S(N)-\overline{K}))},(a^{T}S(N)-\overline{K})>0.\end{cases}$$

Данный критерий разветвляется на два случая, в зависимости от разности цены корзины акций и страйка. В первом случае требуется, чтобы δ была равной средней конечной стоимости портфеля минус гамма стандартных отклонений конечной стоимости портфеля. Это соответствует случаю выплаты по опциону, в котором цена базового актива (корзины акций) не превышает страйка опциона и покупатель его не экспирирует. Второй случай требует, чтобы среднее $W(N)-(a^{T}S(N)-\overline{K})$ минус гамма стандартных отклонений было равно δ. Это ограничение соответствует случаю, когда цена корзины будет больше страйка.

Отметим, что в данной модели заложено несколько смягчающих предположений. Во-первых, рассматриваются только первые два момента разности стоимости портфеля и выплат по опциону. Это сделано для того, чтобы дать возможность найти решение в течение реального времени. Во-вторых, на начало хеджирования и дату экспирации портфель не содержит акций $u_j(0)=0$, $u_j(N)=0$. Это предусматривает денежную выплату по опциону. Допустим также, что известна величина денежных средств от продажи опциона (премия): $W(0^-)=W_0$.

Введем обозначения

$$x(k)=[S_1(k),S_2(k),..,S_n(k),W(k^-)]^T,\ u(k)=[u_1(k),u_2(k),..,u_l(k)]^T,$$

а также, пусть $\tau(k)=[\tau_1(k),..,\tau_l(k)]^T$ будет вектором транзакционных затрат в момент k.

Запишем задачу управления в терминах введенных обозначений:

$$\max_{u_j(k)} \delta,$$

$$\delta = E[a_i^T x(N) - g_i^T \tau(N)] - \gamma\sqrt{\mathrm{Var}(a_i^T x(N) - g_i^T \tau(N))},\ \ i=1,2;$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) - F\tau(k) + \sum_{j=1}^{n}\{(C_j x(k) + D_j u(k))w_j(k)\}, \tag{16}$$

$$\tau_j(k) = k_j\left|u_j(k) - u_j(k-1)\frac{S_j(k)}{S_j(k-1)}\right|,\ \ j=1,...,l,$$

$$x(0) = x_0,\ u(0) = u(N) = 0,$$

с соответствующими A, B, C_j, D_j, F, g_i и a_i где $w=(w_1(k),w_2(k),..,w_n(k))^T$ — случайный процесс с $E[w(k)]=0$ и $E[w(k)w(k)^T]=I.$

Таким образом, задача динамического хеджирования портфеля сформулирована как стохастическая задача управления с дискретным временем. В дальнейшем для ее решения предполагается применить подход, частично описанный в [4, 5].

Заключение. В статье сформулирован новый подход к построению математической модели динамического хеджирования Европейского опциона колл на корзину акций с учетом транзакционных издержек. В данном подходе введено столь немаловажное для практики уточнение, как учет транзакционных издержек. Сформулирована задача стохастического управления портфелем ценных бумаг с дискретным временем и определены подходы к ее решению. Предложенные критерии имеют некоторые ограничения, но оптимально подходят для решения прикладных задач. Построенная математическая модель позволяет производить практические эксперименты при решении задач динамического хеджирования проданного опциона колл на корзину акций, а также может быть использована для исследования более сложных опционных позиций.

1. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. 1973. — N 81. — P. 637–659.
2. *Merton R.C.* Theory of rational option pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. — 1973. — N 4. — P. 142–183.
3. *Hull J.* Options, Futures, and Other Derivatives. — Prentice Hall, — 2000. — 888 p.

4. *Herzog F., Dondi G., Geering H.* Stochastic Model Predictive Control and Portfolio Optimization // International Journal of Theoretical and Applied Finance. — 2007. — N 10 (2). — P. 203–233.
5. *Meindl P., Primbs J. A.* Dynamic Hedging of Single and MultiDimensional Options with Transaction Costs: A Generalized Utility Maximization Approach // Quantitative Finance. — 2008. — N 8 (3). — P. 299–312.
6. *Atkinson C., Alexandropoulos C.A.* Pricing a European basket option in the presence of proportional transaction costs // Applied Mathematical Finance. — 2006. — N 13. — P. 191–214.
7. *Edirisinghe C., Naik V., Uppal R.* Optimal replications of options with transactions costs // Journal of Financial and Quantitative Analysis. — 1993. — N 28. — P. 117–138.
8. *Hoggard T., Whalley A.E., Wilmott P.* Hedging option portfolios in the presence of transaction costs // Advances in Futures and Options Research. — 1994. — N 7. — P. 21–35.
9. *Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутицкая В.В.* Моделирование и анализ динамики инвестиций // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 6. — С. 12–24.
10. *Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутицкая В.В.* Качественный анализ процессов инвестиционного менеджмента на основе динамических моделей // Кибернетика и вычислительная техника. — 2005. — № 148. — С. 3–10.

Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко
Получено 17.07.2012