УДК 518.9

Л.Г. Орехова

О ПЛАТОНОВЫХ ТЕЛАХ И ОДНОЙ МИНИМАКСИМИННОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрена функция преимущества убегающего над группой преследователей (функция Чикрия) для случая игрового взаимодействия в трехмерном пространстве. Получены точные значения функции для некоторых значений количества преследователей. Для остальных значений количества преследователей получена нижняя оценка функции. Также улучшена нижняя оценка функции преимущества убегающего для случаев игрового взаимодействия в многомерном пространстве.

Введение

В теории убегания хорошо известна задача убегания одного убегающего от группы преследователей [1]. Для обеспечения убегания из любых начальных положений на полубесконечном интервале должны выполняться определенные условия преимущества убегающего над каждым из преследователей. Эти условия удобно выражаются некоторой числовой функцией $\omega(n,\nu)$ [1]. Здесь n — размерность игрового пространства, ν — количество преследователей. Настоящая работа посвящена вычислению значений функции $\omega(n,\nu)$, а если сделать это не удается, то получению ее нижних оценок.

Постановка задачи

Определим $\omega(n,\nu)$ — функцию Чикрия [1]. Пусть p_i, $i=1,...,\upsilon$, и ν — единичные векторы из евклидового пространства R^n. Введем в рассмотрение функцию целочисленного аргумента

$$\omega(n,\nu) = \min_{\|p_i\|=1} \max_{\|V\|=1} \min_{i=1,...,\nu} |(p_i, V)|,\ n = 1,2,...;\ \nu = 1,2,... , \tag{1}$$

где $|(\cdot,\cdot)|$ — модуль скалярного произведения, принимающий значения между нулем и единицей.

Ранее в работах [2, 3] была получена нижняя оценка

$$\omega(n,\nu) \ge \sin\left(\frac{\pi}{2k}\right), \tag{2}$$

где $k = \max(n, \nu)$, $n, \nu \ge 2$. Эта оценка основывалась на том, что для двумерного пространства существует формула для точного вычисления функции «превосходства» $\omega(n,\nu)$:

$$\omega(n,\nu) = \sin\left(\frac{\pi}{2\nu}\right) \text{ для } \nu \ge n = 2,$$

а также на соображениях о том, что для фиксированного числа преследователей при увеличении размерности пространства возможности убегания расширяются, а значит, функция «превосходства» увеличивается.

В данной работе получены точные значения функции $\omega(n,\nu)$ для некоторых значений числа преследователей, а также описан процесс получения более строгой нижней оценки для размерностей пространства $n \geq 3$. Для нахождения значений функции $\omega(n,\nu)$ заметим, что векторы p_i и $-p_i$ лежат на одной прямой линии и все эти линии пересекаются в одной точке — начале координат, а вектор ν — единичный вектор, выходящий из начала координат. Прямые, пересекающиеся в нуле, образуют своеобразный «ежик». Для уяснения связи данной геометрической конструкции с прямыми и вставляемым вектором ν с функцией $\omega(n,\nu)$ проведем следующие рассуждения.

Для начала зафиксируем положение «ежика» и вектора ν и найдем угол между вектором и каждой прямой. Затем из всех этих углов найдем минимальный (внутренний min). Теперь, оставляя «ежик» неподвижным, переместим вектор в такое положение, чтобы обозначенный выше угол стал максимальным (max в формуле для $\omega(n,\nu)$). И, наконец, для получения значения функции $\omega(n,\nu)$ нужно изначально расположить прямые так, чтобы минимизировать найденный выше максимальный угол (внешний min).

Случай трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$

В данном случае «ежик» разбивает пространство на определенное количество пирамид, вершины которых совпадают с началом координат. Назовем эти пирамиды элементарными. Основаниями данных пирамид есть многогранники. Очевидно, что эти многогранники обладают следующими свойствами:

1) имеют четное число вершин;

2) для каждой вершины найдется одна и только одна вершина, симметричная ей относительно центра многогранника (центр многогранника в данном случае — точка пересечения прямых — преследователей).

Очевидно, что на основе конкретно взятого «ежика» можно построить не один многогранник (можно по-разному скомпоновать пирамиды. Например, две треугольные пирамиды с общей гранью можно объединить в одну четырехугольную).

Посмотрим на способ построения пирамид с точки зрения игрока, который распоряжается построением единичного вектора. Он стремится занять положение, «максимально далекое от ближайшей прямой». Под этим термином нужно понимать такое положение вектора убегающего, при котором минимальный из углов, который вектор образует с прямыми, будет максимальным. Идеальное положение для него — занять линию высоты правильной пирамиды, причем желательно, чтобы эта пирамида была как можно «шире», т.е. чтобы угол между ее высотой и боковым ребром был как можно больше, т.е. вектор будет «искать» правильные пирамиды, из них выберет самую «широкую» и станет на линию ее высоты.

Теперь посмотрим на способ построения пирамид с точки зрения преследователя, задающего построение «ежика». Выбранная вектором «самая широкая правильная пирамида должна быть как можно «уже», т.е., чтобы угол между ее высотой и боковым ребром был как можно меньше. Логично предположить, что оптимальная ситуация для «ежика» — когда он разбивает пространство на абсолютно одинаковые, как можно более «узкие», пирамиды.

В этом случае построенный многогранник будет правильным. Разумеется, эти рассуждения носят интуитивный характер, однако помогают понять аналитические возможности при нахождении значений функции $\omega(n,\nu)$.

Точные значения функции Чикрия для некоторых значений числа преследователей

Существует пять типов правильных многогранников [4]. Эти многогранники и их свойства описаны более двух тысяч лет назад древнегреческим философом Платоном, чем и объясняется их общее название.

Числовые характеристики платоновых тел приведены в табл. 1. Для нас наиболее важными будут такие характеристики, как форма грани и радиус описанной и вписанной окружностей [4].

Таблица 1. Числовые характеристики платоновых тел

Многогранник	*m*	R	r	*k*	*Г*	*В*	*Р*
Тетраэдр	3	$\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot a$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot a$	3	4	4	6
Гексаэдр (куб)	4	$\sqrt{3}\cdot a$	a	3	6	8	12
Октаэдр	3	$\sqrt{2}\cdot a$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot a$	4	8	6	12
Икосаэдр	3	$\frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$	$a\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$	5	20	12	30
Додекаэдр	5	$\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot(1+\sqrt{5})$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+\frac{22}{\sqrt{5}}}$	3	12	20	30

Примечание: m — число сторон грани, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, k — число граней, сходящихся в вершине, *Г* — число граней, *В* — число вершин, *Р* — число ребер

Из этих пяти многогранников тетраэдр не удовлетворяет определенному выше свойству 2, а значит, исключим его из рассмотрения.

Для каждого из видов многогранников нужно найти n — число диагоналей многогранника, проходящих через центр масс (оно же число преследователей) и $\sin(\alpha)$ — синус угла между боковым ребром и высотой, проведенной из вершины элементарной пирамиды (оценку функции «превосходства» $\omega(n,\nu)$). Будем искать $\sin(\alpha)$ из соотношения радиусов описанной и вписанной окружностей.

Покажем, что если α — угол между боковым ребром и высотой, проведенной из вершины элементарной пирамиды, то $\cos(\alpha)$ равен отношению радиуса вписанной в многогранник окружности к радиусу описанной вокруг многогранника окружности.

На рис. 1 изображен правильный многогранник. Точка O — центр многогранника, а учитывая его правильность — также центр вписанной и описанной сфер. OABCDE — элементарная пирамида, OF — высота, опущенная из вершины, угол FOD = α — угол между боковым ребром и высотой, проведенной из вершины элементарной пирамиды.

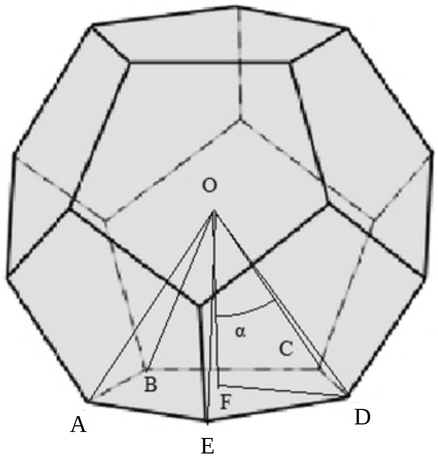

Рис. 1. Элементарная пирамида в составе правильного многогранника

Окружность, описанная вокруг многогранника, проходит через все его вершины, а значит, она проходит через вершины A, B, C, D и E. Так как O — центр окружности, проходящей через точки A, B, C, D и E, то OA = OB = = OC = PD = OE = R — радиус описанной окружности.

Точка O — центр вписанной окружности, отрезок OF перпендикулярен плоскости ABCDE (как высота пирамиды OABCDE, проведенная из точки O). Значит, ABCDE является касательной к вписанной окружности. А так как полученные результаты справедливы для всех элементарных пирамид в многограннике, отрезок OF = r является радиусом вписанной окружности.

Из треугольника FOD следует, что

$$\cos(\alpha) = \mathrm{OF}/\mathrm{OD} = \mathrm{r}/\mathrm{R}\,. \tag{3}$$

Проведем расчеты согласно формуле (3) и свойствам тригонометрических функций.

Расчеты для гексаэдра:

$$\omega(3,3) = \sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Расчеты для икосаэдра:

$$\omega(3,6) = \sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{a\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}}{\frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{6\sqrt{5}}}.$$

Расчеты для октаэдра и додекаэдра проводятся аналогично. Полученные результаты приведены в табл. 2.

Как видим, значения функции $\omega(n,\nu)$ совпадает для пар многогранников гексаэдр–октаэдр и икосаэдр–додекаэдр. Такое совпадение вызвано тем, что соответствующие пары многогранников двойственные, т.е. каждой грани исходного многогранника соответствует вершина двойственного и каждой вершине исходного — грань двойственного.

Таблица 2. Точное значение функции Чикрия для некоторых комбинаций входных параметров

Размерность пространства, n	Число преследователей, ν	Многогранник	Значение функции $\omega(n,\nu)$
3	3	Гексаэдр (куб)	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
3	4	Октаэдр	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
3	6	Икосаэдр	$2\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{6\sqrt{5}}}$
3	10	Додекаэдр	$2\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{6\sqrt{5}}}$

Нижняя оценка для функции $\omega(3,\nu)$

Как уже говорилось ранее, наилучшая ситуация для достижения внешнего «min» в записи функции Чикрия складывается, когда множество прямых, которые пересекаются в одной точке, разбивает пространство на абсолютно одинаковые, как можно более «узкие» элементарные пирамиды.

Логично, что пирамиды тем «уже», чем их больше. Однако количество пирамид ограничено количеством прямых, которые формируют боковые ребра пирамид. Значит, нужно формировать пирамиды так, чтобы каждая прямая служила ребром как можно большему числу разных пирамид, а значит, двугранный угол при ребре пирамиды должен быть как можно меньше. Из этого следует, что оптимальное решение — расположить прямые так, чтобы они разбивали все пространство на равные треугольные пирамиды.

Разумеется, не для каждого количества прямых (ν) такое расположение возможно. Но предположив, что оно существует, мы можем получить нижнюю оценку функции $\omega(n,\nu)$.

Итак, используя ν прямых, которые пересекаются в одной точке, мы разделили трехмерное пространство на равные правильные треугольные пирамиды. Для простоты вычислений примем длину всех боковых ребер всех пирамид равной 1. Одна из таких пирамид изображена на рис. 2.

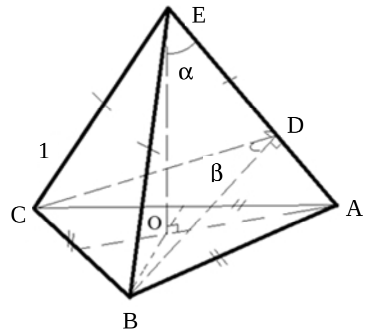

Рис. 2. Элементарная пирамида

Обозначим двугранный угол при ребре пирамиды буквой β. Угол между высотой пирамиды и ее боковым ребром обозначим α. Искомая величина — $\omega(3,\nu) = \sin(\alpha)$. Поскольку длина бокового ребра равна 1, $\sin(\alpha)$ равен длине отрезка OA. Обозначим эту длину символом *r*.

Решим простую задачу стереометрии. Пусть x — длина отрезка CD. В силу правильности пирамиды $BD = x$.

Применим теорему косинусов к треугольнику CDB: $CB = \sqrt{2x^2 - 2x^2\cos(\beta)}$. В силу правильности пирамиды имеем $CA = BA = \sqrt{2x^2 - 2x^2\cos(\beta)}$. Из треугольника ABD по теореме Пифагора

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{2x^2 - 2x^2\cos(\beta) - x^2} = \sqrt{x^2 - 2x^2\cos(\beta)}.$$

Из треугольника EBD по теореме Пифагора

$$ED = \sqrt{EB^2 - BD^2} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$ED + AD = AE = 1 = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 2x^2\cos(\beta)}.$$

Решив это уравнение, получим $x = \dfrac{\sqrt{1 - 2\cos(\beta)}}{1 - \cos(\beta)}$. В треугольнике ABC OA — радиус окружности, описанной около правильного треугольника. Значит, $OA = AB / \sqrt{3}$:

$$OA = r = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x^2\cos(\beta)}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{1 - 2\cos(\beta)}{1 - \cos(\beta)}}.$$

В результате получаем

$$\sin^2(\alpha) = r^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - 2\cos(\beta)}{1 - \cos(\beta)}.$$

Всего имеется ν прямых, которые пересекаются в одной точке. Они образуют 2ν лучей, которые начинаются в одной точке.

Пусть каждый луч является ребром одновременно для K_1 пирамид. Двугранный угол при ребре пирамиды равен β, сумма двугранных углов, вершиной которых является один луч, равна 2π, а значит, число K_1 может быть рассчитано по формуле $K_1 = 2\pi/\beta$. Всего имеем 2ν лучей, каждый является ребром для K_1 пирамид, для формирования одной пирамиды нужно три разных луча. Значит, количество пирамид может быть рассчитано по формуле

$$N = \frac{2\nu K_1}{3} = \frac{4\pi\nu}{3\beta}. \tag{4}$$

Телесный угол Θ трехгранного угла выражается через образующие его двугранные углы по формуле [5] $\Theta = \alpha1 + \alpha2 + \alpha3 - \pi$.

В нашем случае пирамида является правильной, а значит, двугранные углы при боковых ребрах пирамиды равны между собой: $\alpha1 = \alpha2 = \alpha3 = \beta$, значит,

$$\Theta = 3\beta - \pi. \tag{5}$$

Телесный угол в точке пересечения прямых равен 4π (полный телесный угол). Этот угол делится гранями пирамид на N равных трехгранных углов, каждый из которых равен:

$$\Theta = \frac{4\pi}{N}.$$

С учетом (4) и (5), получим

$$\frac{4\pi \cdot 3\beta}{4\pi\nu} = 3\beta - \pi.$$

Отсюда следует $\beta = \dfrac{\pi\nu}{3(\nu-1)}$. Подставив этот результат в (3), получим

$$\sin^2(\alpha) = r^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - 2\cos\left(\dfrac{\pi\nu}{3(\nu-1)}\right)}{1 - \cos\left(\dfrac{\pi\nu}{3(\nu-1)}\right)}.$$

Значит, нижняя новая оценка для значений функции Чикрия для трехмерного пространства будет выглядеть так:

$$\omega(3,\nu) \geq \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{1 - 2\cos\left(\dfrac{\pi\nu}{3(\nu-1)}\right)}{1 - \cos\left(\dfrac{\pi\nu}{3(\nu-1)}\right)}}, \text{ где } \nu \geq 3. \tag{6}$$

Эта оценка достижима для значений ν, при которых существует такое расположение в трехмерном пространстве ν прямых, пересекающихся в одной точке, при котором эти прямые разбивают все пространство на равные треугольные пирамиды. Для других значений ν эта оценка недостижима.

Из табл. 1 ясно, что существует всего два возможных преследователя, при этом пространство разбивается на равные правильные треугольные пирамиды. Соответствующее количество преследователей равно 3 и 6. Нетрудно убедиться, что для этих значений ν точное значение функции Чикрия совпадает с оценкой (6), что подтверждает достижимость оценки при оптимальном расположении преследователей. Для других известных значений $\omega(n,\nu)$ из табл. 2 легко убедиться, что точное значение функции больше оценки (6), что подтверждает недостижимость оценки в случае, когда не существует расположения прямых, при котором пространство разбивается на равные правильные треугольные пирамиды.

При увеличении размерности пространства при фиксированном количестве преследователей убегающий получает больше возможностей для маневров, а значит, его преимущество над преследователями растет. Исходя из этого, можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема. Для размерности пространства $n \geq 3$ и при наличии $\nu \geq 3$ преследователей нижняя оценка Чикрия будет выглядеть так:

$$\omega(n,\nu) \geq \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{1 - 2\cos\left(\frac{\pi k}{3(k-1)}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi k}{3(k-1)}\right)}}.$$

Заключение

Получены точные значения функции Чикрия для некоторых значений числа преследователей при взаимодействии участников игры в трехмерном пространстве. Получена нижняя оценка функции Чикрия для игр, происходящих в пространстве размерности $n \geq 3$ с количеством участников $\nu \geq 3$.

1. *Чикрий А.А.* Линейная проблема убегания от нескольких преследователей // Изв. Сов. Академии наук: Техн. киб. — 1978. — № 4. — С. 46–50.
2. *Chikrii A.A.* The problem of avoidance for controlled dynamic objects // J. of mathematics, game theory and algebra. Nova Sci. Publ., Inc. — 1998. — **7**, N 2/3. — P. 81–94.
3. *Орехова Л.Г., Терновая Е.В.* О двух проблемах в нелинейной теории убегания с группами участников // Кибернетика и вычислительная техника. — 2010. — Вып. 160. — С. 86–90.
4. *Платон.* Собр. соч. в 4-х т. Т. 3. — М.: Мысль, 1994. — 656 с.
5. *Изместьев И.В.* О сумме углов многогранника // Математическое просвещение. Сер. 3. — 2006. — **10**. — С. 132-150.

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»

Получено 06.09.2011