УДК 517.929.4

**Я.Н. Линдер, В.В. Пичкур**

# ОПТИМАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ПРАКТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С МНОГОЗНАЧНЫМ ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Доказывается компактность максимальных множеств сильной практической устойчивости дифференциальных включений с импульсным воздействием, изучаются свойства границы и внутренних точек данных множеств. Для линейного включения с импульсным воздействием получена функция Минковского, обратная функция Минковского и опорная функция максимального множества, а также критерий принадлежности точки к ее границе. Результаты имеют алгоритмическую направленность.

## Введение

Системы, на которые влияют кратковременные, но существенные внешние силы, целесообразно описывать дифференциальными уравнениями с импульсным воздействием. Такие соотношения на данный момент достаточно изучены. В работах [1–4] исследуются вопросы существования, единственности, продолжимости, непрерывной зависимости решений от начальных условий, а также устойчивость систем с импульсным воздействием. Задачи практической устойчивости для таких соотношений с импульсами рассматриваются в [5]. В работах [5–8] построены критерии практической устойчивости систем с импульсным воздействием, получены алгоритмы для нахождения экстремальных областей начальных условий и их оптимальных оценок.

При условии постоянно действующих возмущений правая часть системы дифференциальных уравнений приобретает многозначный характер [1, 9–11]. Задачи, связанные с дифференциальными включениями с импульсным воздействием, на данный момент интенсивно исследуются. В [1, 4] рассматриваются вопросы существования, непрерывной зависимости от начальных условий, продолжимости решений дифференциальных включений с импульсным воздействием. В [7] изучены свойства максимального по включению множества для сильной и слабой устойчивости дифференциальных включений, приведены методы аппроксимации этого множества.

В статье обосновываются свойства множества начальных условий, для каждой точки из которого все решения дифференциального включения с импульсным воздействием принадлежат фазовым ограничениям на заданном временно́м интервале. Импульсные воздействия рассматриваются в фиксированные моменты времени. В случае линейного дифференциального включения с линейным импульсным воздействием получен критерий принадлежности точки границе оптимального множества, найден функционал Минковского и опорный функционал. Полученные результаты имеют алгоритмическую направленность.

Используем следующие обозначения: T — транспонирование; $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathrm{R}^n$; comp $(\mathrm{R}^n)$ — совокупность всех непустых компактных множеств из $\mathrm{R}^n$; conv $(\mathrm{R}^n)$ — совокупность всех непустых выпуклых компактов из $\mathrm{R}^n$; $f(x^-), f(x^+)$ — соответственно левая и правая границы функции $f$ в точке $x \in \mathrm{R}^1$; $\operatorname{int} A$ — внутренность, $\partial A$ — граница множества $A$; $S = \{x \in \mathrm{R}^n : \| x \| = 1\}$ — единичная сфера; $K_\varepsilon(\alpha) = \{x \in \mathrm{R}^n : \| x - \alpha \| \le \varepsilon\}$ — замкнутый шар радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $\alpha$; $A^\varepsilon = A + K_\varepsilon(0)$ — $\varepsilon$-расширение множества $A$; $A^{<\varepsilon>} = \{x \in \mathrm{R}^n : K_\varepsilon(x) \subset A\}$ — $\varepsilon$-сужение множества $A$; $\rho(\alpha, A) = \inf\limits_{x \in A} \| \alpha - x \|$ — расстояние от точки $a$ к множеству $A$; $\beta(A, B) = \sup\limits_{a \in A} \rho(\alpha, B)$ — полуметрика Хаусдорфа между множествами $A$ и $B$; $\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$ — метрика Хаусдорфа; $\limsup\limits_{t \to \tau} \Phi(t) = \left\{ x \in \mathrm{R}^n : \liminf\limits_{t \to \tau} \rho(t, \Phi(t)) \right\}$ — верхняя топологическая граница отображения $\Phi$; $\Gamma(F)$ — график отображения $F$; $\Delta(F)$ — трубка отображения $F$; $c(A, \psi) = \sup\limits_{x \in A} x^{\mathrm{T}} \psi$ — опорная функция множества $A \subset \mathrm{R}^n$.

**Свойства оптимального множества начальных условий**

Рассмотрим дифференциальное включение с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} \in F_i(x,t),\ t \in [\tau_{i-1}, \tau_i),\ i \in \{1,2,...,N\},\ \tau_0 = t_0,\ \tau_N = T, \tag{1}$$

$$x(\tau_i) \in G_i(x(\tau_i^-)),\ i \in \{1,2,..., N-1\}, \tag{2}$$

где $x \in \mathrm{R}^n$ — вектор фазовых координат, $(x,t) \in D$, $D$ — область в $\mathrm{R}^{n+1}$. Кроме того, для любого $i \in \{1, 2, \mathbf{K}, N\}$ отображение $F_i : D \to \operatorname{conv}(\mathrm{R}^n)$ удовлетворяет основным условиям на $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, т.е. множество его значений непусто, ограничено, замкнуто и выпукло, а само отображение полунепрерывно сверху по $t$ [9]. Также существуют непрерывные положительные функции $L_i(t)$ такие, что $\alpha(F_i(u,t), F_i(v,t)) \le L_i(t) \| u - v \|$, если $(u,t), (v,t) \in D$. Отображения $G_i : \mathrm{R}^n \to \operatorname{conv}(\mathrm{R}^n)$ непрерывны, $i \in \{1, 2, \mathbf{K}, N-1\}$.

Решением дифференциального включения с импульсным воздействием (1) , (2) назовем абсолютно непрерывную на промежутках, которые не содержат $\tau_i$, $i \in \{1, 2, \mathbf{K}, N-1\}$, функцию $x(t, x_0, t_0)$, которая удовлетворяет дифференциальному включению (1) почти всюду, а в точках $\tau_i$ удовлетворяет условия (2) [1].

Рассмотрим многозначное отображение $\Phi : t\ \mathbf{a}\ \Phi(t)$, которое задает фазовые ограничения. Отображение $\Phi : t \to \Phi(t)$ компактозначно и полунепрерывно сверху на интервалах $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i \in \{1, 2, \mathbf{K}, N\}$. График $\Gamma(\Phi) \subset D$, $0 \in \Phi(t)$, $0 \in F_i(0,t)$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i \in \{1, 2, \mathbf{K}, N\}$. Кроме этого, $0 \in G_i(0)$,

$i \in \{1,2,\mathbf{K}, N-1\}$, т.е. точка 0 принадлежит $\Phi(t)$ для всех $t \in [t_0, T]$ и является решением включения (1), (2).

Нулевое решение дифференциального включения (1), (2) называется $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-устойчивым, если для произвольной точки $x_0 \in G_0$ и решения $x(t, x_0, t_0)$ включения (1), (2), а также для любого $t \in [t_0, T]$ выполняется соотношение $x(t, x_0, t_0) \in \Phi(t)$.

Совокупность $G_* \subseteq \Phi(t_0)$ называется максимальным по включению множеством при исследовании практической устойчивости решения $x(t) \equiv 0$ включения (1), (2) с фазовыми ограничениями, заданными отображением $\Phi$, если нулевое решение $\{G_*, \Phi(t), t_0, T\}$-устойчиво и $G_0 \subseteq G_*$ для всех множеств $G_0 \subseteq \Phi(t_0)$, для которых имеет место $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-устойчивость решения $x(t) \equiv 0$ включения (1), (2). Другими словами, множество $G_*$ состоит из всех начальных условий, для которых значения соответствующих решений (1), (2) принадлежат образам отображения $\Phi$ на интервале $[t_0, T]$. Цель настоящего исследования — анализ свойств множества $G_*$. Будем считать, что $0 \in \operatorname{int} G_*$. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Если $\Phi : [t_0, T]$ **а** $\operatorname{comp}(\mathsf{R}^n)$ — компактозначное отображение, то множество $G_*$ — компакт, $t \in [t_0, T]$.

*Доказательство***.** Ограниченность $G_*$ следует из ограниченности $\Phi(t_0)$, так как $G_* \subseteq \Phi(t_0)$. Докажем замкнутость $G_*$. Выберем последовательность $\{x_k\} \subset G_*$, $\lim x_k = x_0$, где $k \to \infty$. Покажем, что $x_0 \in G_*$. Предположим от противного, что существует $\tau \in [t_0, T]$ такое, что некоторое решение $z = x(\tau, x_0, t_0) \notin \Phi(\tau)$. Вследствие того, что $\{x_k\} \subset G_*$, $\lim x_k = x_0$ открыто, существует $r > 0$ такое, что $K_r(z) \subset \mathsf{R}^n / \Phi(\tau)$. Зафиксируем $\varepsilon = r/2$. Пусть $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Согласно [10] для траектории $x(t, x_0, t_0)$ существует решение $x(t, x_k, t_0)$ такое, что $\| x(\tau, x_0, t_0) - x(\tau, x_k, t_0) \| < \varepsilon$. Следовательно, значение $x(\tau, x_k, t_0) \notin \Phi(\tau)$, $k > k_0$. Получили противоречие.

Теорема доказана.

**Лемма 1.** Пусть отображение $G : \mathsf{R}^n \to \operatorname{conv}(\mathsf{R}^n)$ непрерывно, опорная функция $c(G(x), \psi)$ непрерывна на $D \subseteq \mathsf{R}^n$ и не имеет на этом множестве максимумов. Тогда для любого $x \in D$ и для как угодно малого $\varepsilon > 0$ имеет место включение $G(x) \subseteq \operatorname{int} G(K_\varepsilon(x))$, где $G(K_\varepsilon(x)) = \mathbf{U}_{y \in K_\varepsilon(x)} G(y)$.

*Доказательство.* Пусть, от противного, $G(x) \cap \partial G(K_\varepsilon(x)) \neq \varnothing$. Тогда существует такое направление $\psi \in S$, что $c(G(x), \psi) = c(G(K_\varepsilon(x)), \psi)$ [13]. Из этого следует, что для любого $y \in K_\varepsilon(x)$ выполняется неравенство $c(G(x), \psi) \geq c(G(y), \psi)$. Следовательно, точка $x$ — локальный максимум функции $c(G(x),\psi)$. Получаем противоречие условию отсутствия максимумов функции $c(G(x),\psi)$.

Лемма доказана.

*Следствие 1.* Пусть выполняются условия леммы 1. Тогда для любых ограниченных множеств $X,Y \subset \mathrm{R}^n$ таких, что $X \subseteq \operatorname{int} Y$, и для как угодно малого $\varepsilon > 0$ выполняется $G(X) \subseteq \operatorname{int} G(Y)$.

*Следствие 2.* В условиях леммы 1 отображение $G$ является открытым, т.е. для любого открытого множества $U$ множество $G(U)$ также открыто.

*Следствие 3.* Пусть отображение $G$ непрерывно дифференцируемо, т.е. для каждого $\psi \in S$ опорная функция $c(G(x),\psi)$ гладкая по $x$. Тогда условие отсутствия максимумов эквивалентно следующему условию: в точках, в которых градиент по $x$ опорной функции нулевой, матрица Гессе от $c(G(x),\psi)$ положительно определена. В частности, если для каждого $x \in D$ градиент опорной функции $c(G(x),\psi)$ ненулевой, лемма 1 выполняется.

Обозначим $X(t,x_0,t_0)$ множество достижимости дифференциального включения (1), (2), которое соответствует начальному условию $x(t_0) = x_0$. Другими словами, $X(t,x_0,t_0) = \bigcup x(t,x_0,t_0)$, где объединение осуществляется по всем решениям дифференциального включения (1), (2). На каждом отрезке $[\tau_{i-1},\tau_i]$, $i \in \{1,2,...,N\}$ введем отображения $\widetilde{X}_i(t,x_0,t_0) = X(t,x_0,t_0)$, $t \in [\tau_{i-1},\tau_i)$ и $\widetilde{X}_i(\tau_i,x_0,t_0) = \limsup\limits_{t\to\tau_i} X(t,x_0,t_0)$. Также введем отображения $\widetilde{\Phi}_i(t) = \Phi(t)$, $t \in [\tau_{i-1},\tau_i)$ и $\widetilde{\Phi}_i(\tau_i) = \limsup\limits_{t\to\tau_i} \Phi(t)$. Пусть $(p,t_0) \in D$. Обозначим

$$M_i^r(t) = \widetilde{X}_i(t,K_r(p),t_0) = \bigcup_{x_0 \in K_r(p)} \widetilde{X}_i(t,x_0,t_0), i \in \{1,2,...,N\}.$$

Из определения следует, что $M_i^r(t) \subseteq \operatorname{int} M_i^h(t)$, $r < h$, $t \in [\tau_{i-1},\tau_i]$, $i \in \{1,2,..., N\}$. Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 2.** Пусть для отображений $G_i(x)$, $i \in \{1,2,...,N-1\}$, выполняются условия леммы 1. Тогда справедливы включения $M_i^r(t) \subseteq \operatorname{int} M_i^h(t)$, $r < h$, $t \in [\tau_{i-1},\tau_i]$, $i \in \{1,2,..., N\}$.

*Доказательство.* На отрезке $[\tau_0,\tau_1]$ утверждение верно, исходя из свойств решений дифференциальных включений [7]. В момент времени $t = \tau_1$ имеем $M_1^r(\tau_1) \subseteq \operatorname{int} M_1^h(\tau_1)$. Согласно следствию 1 леммы 1 получаем

$$M_2^r(\tau_1) = G_1(M_1^r(\tau_1)) \subseteq \operatorname{int} G_1(M_1^h(\tau_1)) = M_2^h(\tau_1).$$

Из $M_2^r(\tau_1) \subseteq \operatorname{int} M_2^h(\tau_1)$ и свойств решений дифференциальных включений [7] следует $M_2^r(t) \subseteq \operatorname{int} M_2^h(t)$, $t \in [\tau_1,\tau_2]$. Продолжая аналогичные рассуждения, последовательно переходим из интервала $[\tau_1, \tau_2]$ на $[\tau_2, \tau_3]$ и т.д. к $[\tau_{N-1}, \tau_N]$, доказываем на каждом из них включение $M_i^r(t) \subseteq M_i^h(t),\ r < h$.

Лемма доказана.

**Теорема 2.** Пусть $\Phi$ — полунепрерывное сверху компактозначное отображение. Для того чтобы $x_0 \in \partial G_*$, необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma(X(x_0)) \subseteq \Gamma(\Phi)$ и существовало $i \in \{1,2,..., N\}$ такое, что $\Delta(\tilde{X}_i(x_0)) \cap$ $\cap\ \Delta(\tilde{\Phi}_i) \neq \varnothing$.

*Доказательство. Необходимость.* Пусть $x_0 \in \partial G_*$. Предположим от противного, что для каждого $i \in \{1,2,..., N\}$ $\Delta(\tilde{X}_i(x_0)) \cap \Delta(\tilde{\Phi}_i) = \varnothing$. Покажем, что отображение $\tilde{X}_i^r(x_0) : t \mapsto (\tilde{X}_i(t, x_0, t_0))^r$ полунепрерывно сверху на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ и для каждого $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ множество $(\tilde{X}_i(t, x_0, t_0))^r$ — компакт. Действительно, отображение $\tilde{X}_1(x_0)$ полунепрерывно сверху и компактозначно в каждой точке первого интервала, а следовательно, $\tilde{X}_1^r(x_0)$ тоже владеет этими свойствами. Значит, $(\tilde{X}_1(\tau_1, x_0, t_0))^r$ — компакт и $G_1((\tilde{X}_1(\tau_1, x_0, t_0))^r) =$ $= (\tilde{X}_2(\tau_1, x_0, t_0))^r$ — компакт, принимая во внимание непрерывность и компактозначность отображения $G_1(\cdot)$. Тогда $\tilde{X}_2^r(x_0)$ полунепрерывно сверху и компактозначно в каждой точке из $[\tau_1, \tau_2]$. Продолжая рассуждения, доказываем справедливость утверждения на каждом интервале $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i \in \{1,2,..., N\}$. Следовательно, для каждого отрезка $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ существует $\rho_i > 0$, для которого $\Gamma(\tilde{X}_i^r(x_0)) \subseteq \Gamma(\tilde{\Phi}_i)$, $\Delta(\tilde{X}_i^r(x_0)) \cap \Delta(\tilde{\Phi}_i) = \varnothing$ при $r \in [0, \rho_i]$. Таким образом, $(X(t, x_0, t_0))^r \subset \Phi(t),\ t \in [t_0, T],\ r \in [0,\ \min\{\rho_i, i \in \{1,2,..., N\}\}]$. Выберем последовательность $\{x_k\} \to x_0, x_k \notin G_*$. По теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных включений с импульсным воздействием от начальных условий [1] мы можем выбрать $\delta > 0$ такое, что как только $\| x_0 - x_k \| < \delta$, для произвольного решения $x(t, x_k, t_0)$ существует решение $x(t, x_0, t_0)$, для которого $\| x(t, x_0, t_0) - x(t, x_k, t_0) \| \leq r$. Следовательно, $x(t, x_k, t_0) \in \Phi(t)$. Получили противоречие определению $G_*$.

*Достаточность.* От противного. Пусть $\Gamma(X(x_0)) \subseteq \Gamma(\Phi)$ и существует $i \in \{1,2,..., N\}$ такое, что $\Delta(\tilde{X}_i(x_0)) \cap \Delta(\tilde{\Phi}_i) \neq \varnothing$, но $x_0 \notin \partial G_*$. Тогда существует окрестность $x_0^r \subset \operatorname{int} G_*$. По лемме 2 $\tilde{X}_i(t, x_0, t_0) \subset \operatorname{int} M_i^r$ при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i \in \{1,2,..., N\}$. Поскольку $\Gamma(\tilde{X}_i(x_0)) \subseteq \Gamma(M_i^r) \subseteq \Gamma(\tilde{\Phi}_i)$, $\Delta(\tilde{X}_i(x_0)) \cap \Delta(M_i^r) = \varnothing$, то $\Delta(\tilde{X}_i(x_0)) \cap \Delta(\tilde{\Phi}_i) = \varnothing,\ t \in [\tau_{i-1}, \tau_i],\ i \in \{1,2,..., N\}$.

Теорема доказана.

*Следствие 1.* Пусть $G_*^{(i)}$ — максимальные по включению множества практической устойчивости дифференциального включения $\dfrac{dx}{dt} \in F_i(x, t)$,

$t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$. Тогда $x_0 \in \partial G_*$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \{1,2,...,N\}$ выполняется $X(\tau_i, x_0, t_0) \subseteq G_*^{(i)}$ и существует $i \in \{1,2,...,N\}$ такое, что $\partial X(\tau_i, x_0, t_0) \cap \partial G_*^{(i)} \neq \varnothing$.

*Следствие 2.* Точка $x_0 \in \mathrm{int} G_*$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \{1,2,..., N\}$ выполняется $X(\tau_i, x_0, t_0) \subseteq \mathrm{int} G_*^{(i)}$.

*Следствие 3.* Точка $x_0 \in \mathrm{int} G_*$ тогда и только тогда, когда $\Gamma(X(x_0)) \subseteq$ $\subseteq \Gamma(\Phi)$ и для каждого $i \in \{1,2,..., N\}$ пересечение $\Delta(\tilde{X}_i(x_0)) \cap \Delta(\tilde{\Phi}_i) = \varnothing$.

**Свойства оптимального множества в случае линейных дифференциальных включений с импульсным воздействием**

Рассмотрим линейное дифференциальное включение с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} \in A_i(t)x + U_i(t),\ t \in [\tau_{i-1}, \tau_i),\ \ i \in \{1,2,..., N\},\ \tau_0 = t_0,\ \tau_N = T, \tag{3}$$

$$x(\tau_i^+) \in B_i x(\tau_i^-) + V_i,\ i \in \{1,2,..., N-1\}, \tag{4}$$

где $A_i(t), B_i \in \mathrm{R}^{n \times n}$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$, $V_i$ — выпуклый компакт. Кроме того, $A_i(t)$ — непрерывные на $(\tau_{i-1}, \tau_i)$, $B_i$ — невырожденные матрицы. Условие невырождености необходимо в результате следующих соображений. Запишем опорную функцию импульсного воздействия $c(B_i x + V_i, \psi) = x^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} \psi + c(V_i, \psi)$. Тогда для выполнения леммы 1 необходимо, чтобы $c_x' = B_i^{\mathrm{T}} \psi \neq 0$ для каждого $\psi \in S$, т.е. чтобы матрица $B_i$ была невырожденной.

Обозначим $Q_i(t) = \int_{\tau_i}^{t} \Theta_i(t,s) U_i(s)\, ds$, где $\Theta_i(t,s)$ — фундаментальная матрица системы $\dfrac{dx}{dt} = A_i(t)x$, нормированная в точке $s$, интеграл рассматриваем в смысле Ауманна [13]. Анализируем включение (3), (4) на практическую устойчивость, предполагая, что отображение $\Phi : t \mapsto \Phi(t)$, которое задает фазовые ограничения, выпуклозначно и непрерывно по Хаусдорфу на $(\tau_{i-1}, \tau_i)$.

На интервале $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$ решение будет иметь вид $X(t, x_0, t_0) =$ $= H(t)x_0 + M(t)$, где

$$M(t) = \Theta_i(t, \tau_{i-1}) \sum_{k=2}^{i} \left( \prod_{j=i-1}^{k} B_j \Theta_j(\tau_j, \tau_{j-1}) \right) \times$$

$$\times (B_{k-1} Q_{k-2}(\tau_{k-1}) + V_{k-1}) + Q_{i-1}(t),$$

$$H(t) = \Theta_i(t, \tau_i) \left( \prod_{j = i-1}^{1} B_j \Theta_j(\tau_j, \tau_{j-1}) \right), \ t \in [\tau_{i-1}, \tau_i).$$

Оператор произведения в выражениях для $H(t)$, $M(t)$ является произведением с обратным порядком умножения:

$$\prod_{i=a}^{b} B_i = \begin{cases} B_a B_{a-1} \dots B_b, & a \geq b, \\ 1, & a < b. \end{cases}$$

В данной формуле $H(t), M(t)$ являются разрывными в точках переключения. В таком случае отображения $\tilde{X}_i(t, x_0, t_0)$ запишем $\tilde{X}_i(t, x_0, t_0) = \{H_i(t) x_0\} + M_i(t)$, где $H_i(t) = H(t)$, $M_i(t) = M(t)$ для всех $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$, а

$$H_i(\tau_i) = \lim_{t \to \tau_i^-} H(t), M_i(\tau_i) = \lim_{t \to \tau_i^-} M(t). \quad (5)$$

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 3.** Множество $G_*$ выпукло.

*Доказательство*. Возьмем две произвольные точки $a$ и $b$ из множества $G_*$. Поскольку $X(t, a, t_0) \subseteq \Phi(t)$, $X(t, b, t_0) \subseteq \Phi(t)$, то вследствие выпуклости множества $\Phi(t)$ $\lambda X(t, a, t_0) + (1 - \lambda) X(t, b, t_0) \subseteq \Phi(t)$. С другой стороны, $\lambda X(t, a, t_0) + (1 - \lambda) X(t, b, t_0) = H(t)(\lambda a + (1 - \lambda) b) + M(t)$, $\lambda \in [0,1]$. Значит, $\lambda a + (1 - \lambda) b \in G_*$.

Теорема доказана.

Согласно теореме 2 для того чтобы $x_0 \in \partial G_*$, необходимо и достаточно, чтобы $X(t, x_0, t_0) \subseteq \Phi(t)$ и существовали $i \in \{1,2,\dots,N\}$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ такие, что $\Delta(\tilde{X}_i(x_0)) \cap \Delta(\tilde{\Phi}_i) \neq \varnothing$. Итак, исходя из свойств опорной функции [13], получим

$$c(\tilde{X}_i(t, x_0, t_0), \psi) \leq c(\tilde{\Phi}_i(t), \psi) \ \ \forall \, i \in \{0,1,\dots, N-1\}, \psi \in S, \ t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]. \quad (6)$$

Но, с другой стороны, существует $\xi \in S$ такое, что

$$c(\tilde{X}_i(t, x_0, t_0), \xi) = c(\tilde{\Phi}_i(t), \xi). \quad (7)$$

Выписав опорный функционал для $\tilde{X}_i(t, x_0, t_0)$, получим

$$c(\tilde{X}_i(t, x_0, t_0), \psi) = c(\{H_i(t) x_0\}, \psi) + c(M_i(t), \psi) =$$

$$= \psi^{\mathrm{T}} \{H_i(t) x_0\} + c(M_i(t), \psi).$$

Из (6), (7) следует, что для каждого $i \in \{1,2,\dots, N\}$, $\psi \in S$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$

$$\psi^{\mathrm{T}}\{H_i(t)x_0\} \le c(\tilde{\Phi}_i(t),\psi) - c(M_i(t),\psi) \tag{8}$$

и существуют $\xi \in S$, $i \in \{1,2,..., N\}$, $\tau \in [\tau_{i-1},\tau_i]$ такие, что

$$\xi^{\mathrm{T}}\{H_i(\tau)x_0\} = c(\tilde{\Phi}_i(\tau),\xi) - c(M_i(\tau),\xi)\,. \tag{9}$$

Систему (8), (9) при условии

$$c(\tilde{\Phi}_i(t),\psi) - c(M_i(t),\psi) > 0 \tag{10}$$

можно переписать в виде

$$\frac{\psi^{\mathrm{T}}\left(\Theta_i(t,\tau_i)\prod_{j=i-1}^{1} B_j\Theta_j(\tau_j,\tau_{j+1})\right)x_0}{c(\tilde{\Phi}_i(t),\psi) - c(M_i(t),\psi)} \le 1,$$

$i \in \{1,2,..., N\}$, $t \in [\tau_{i-1},\tau_i], \psi \in S$; при этом для некоторого $\xi \in S$, $i \in \{1,2,...,N\}$, $\tau \in [\tau_{i-1},\tau_i]$ будет достигаться равенство. Условие (10) эквивалентно принадлежности нулевого решения задачи (1), (2) множеству $G_*$.

**Критерий.** Для того чтобы $x_0 \in \partial G_*$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\max_{i\in\{1,2,\mathbf{K},N\}}\ \max_{t\in[\tau_{i-1},\tau_i]}\ \max_{\psi\in S}\frac{\psi^{\mathrm{T}}\left(\Theta_i(t,\tau_i)\prod_{j=i-1}^{1} B_j\Theta_j(\tau_j,\tau_{j+1})\right)x_0}{c(\tilde{\Phi}_i(t),\psi) - c(M_i(t),\psi)} = 1, \tag{11}$$

где $M_i(t)$ определяются согласно (5).

*Следствие 1.* Функция

$$m_*(x_0) = \max_{i\in\{1,2,\mathbf{K},N\}}\ \max_{t\in[\tau_{i-1},\tau_i]}\ \max_{\psi\in S}\frac{\psi^{\mathrm{T}}\Theta_i(t,\tau_i)\left(\prod_{j=i-1}^{1} B_j\Theta_j(\tau_j,\tau_{j+1})\right)x_0}{c(\tilde{\Phi}_i(t),\psi) - c(M_i(t),\psi)}$$

является функцией Минковского множества $G_*$, при этом $G_* = \{x_0 \in \mathrm{R}^n : m_*(x_0) \le 1\}$.

*Доказательство.* По определению функционал Минковского $m(x,G_*) = \inf\{t > 0 : x/t \in G_*\}$ [12]. Пусть $x \in \mathrm{R}^n$. Тогда в результате компактности и выпуклости множества $G_*$ и критерия 1 имеем $x/m(x,G_*) \in \partial G_*$ и $m_*(x/m(x,G_*)) = 1$. Вследствие положительной однородности функционала Минковского получаем $m_*(x) = m(x,G_*)$.

Следствие доказано.

*Следствие 2.* Функция деформации множества $G_*$ имеет вид

$$k_*(l) = \min_{i\in\{1,2,\ldots,N\}} \min_{t\in[\tau_{i-1},\tau_i]} \min_{\psi\in S'} \frac{c(\tilde{\Phi}_i(t),\psi) - c(M_i(t),\psi)}{\psi^{\mathrm{T}}\Theta_i(t,\tau_i)\left(\prod_{j=i-1}^{1} B_j\Theta_j(\tau_j,\tau_{j+1})\right)l}, \quad l\in S, \quad (12)$$

где $S'$ — совокупность всех $\psi\in S,$ для которых знаменатель выражения (12) положительный. Тогда $G_* = \{x\in \mathrm{R}^n : k = kl, k\in[0,k_*(l)],\ l\in S\}.$

**Замечание.** Если выпуклозначное отображение $\Phi$ кусочно непрерывное на отрезке $[t_0,T],$ $\Phi(t^-),$ $\Phi(t^+)$ ограничены, $t\in[t_0,T],$ то формула (11) имеет вид

$$\max_{i\in\{1,2,\ldots,N\}} \max_{t\in[\tau_{i-1},\tau_i]} \max_{\psi\in S} \max\{K^-(t,i,\psi), K^+(t,i,\psi)\} = 1, \text{ где}$$

$$K^-(t,i,\psi) = \frac{\psi^{\mathrm{T}}\Theta_i(t,\tau_i)\left(\prod_{j=i-1}^{1} B_j\Theta_j(\tau_j,\tau_{j+1})\right)x_0}{c(\tilde{\Phi}_i(t^-),\psi) - c(M_i(t),\psi)},$$

$$K^+(t,i,\psi) = \frac{\psi^{\mathrm{T}}\Theta_i(t,\tau_i)\left(\prod_{j=i-1}^{1} B_j\Theta_j(\tau_j,\tau_{j+1})\right)x_0}{c(\tilde{\Phi}_i(t^+),\psi) - c(M_i(t),\psi)},$$

причем $c(\tilde{\Phi}_i(t^-),\psi) - c(M_i(t),\psi) > 0,$ $c(\tilde{\Phi}_i(t^+),\psi) - c(M_i(t),\psi) > 0,$ $i\in\{1,2,\ldots,N\},$ $t\in[\tau_{i-1},\tau_i],$ $\psi\in S$. В этом случае функция деформации множества $G_*$ записывается таким образом:

$$\bar{k}(l) = \min_{i\in\{1,2\ldots N\}} \min_{t\in[\tau_{i-1},\tau_i]} \min_{\psi\in S'} \frac{\min\{c(\tilde{\Phi}_i(t^-),\psi), c(\tilde{\Phi}_i(t^+),\psi)\} - c(M_i(t),\psi)}{\psi^{\mathrm{T}}\Theta_i(t,\tau_i)\left(\prod_{j=i-1}^{1} B_j\Theta_j(\tau_j,\tau_{j+1})\right)l}.$$

Из соотношения (8) следует, что $\psi_0^{\mathrm{T}} x_0 \le c(\tilde{\Phi}_i(t),\psi) - c(M_i(t),\psi),$ где $\psi_0 = H_i^{\mathrm{T}}\psi,$ $\psi\in S,$ $t\in[\tau_{i-1},\tau_i].$ Матрицы $H_i(t)$ являются невырожденными, поэтому $\psi = (H_i^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\psi_0$. Затем получаем

$$\psi_0^{\mathrm{T}} x_0 \le c(\tilde{\Phi}_i(t),(H_i^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\psi_0) - c(M_i(t),(H_i^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\psi_0),$$

$$t\in[\tau_{i-1},\tau_i],\ i\in\{1,2\ldots N\},$$

$$\psi_0^{\mathrm{T}} x_0 \le \min_{i\in\{1,2\ldots N\}} \min_{t\in[\tau_{i-1},\tau_i]} \left(c(\tilde{\Phi}_i(t),(H_i^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\psi_0) - c(M_i(t),(H_i^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\psi_0)\right)$$

$$\forall\,\psi_0\in \mathrm{R}^n.$$

Функция в правой части неравенства положительно однородна, и это неравенство однозначно определяет точки множества $G_*$. По теореме о взаимосвязи между опорной функцией и выпуклым множеством [12]

$$c(G_*, \psi_0) =$$

$$= \overline{co} \min_{i \in \{1,2,\ldots,N\}} \min_{t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]} (c(\tilde{\Phi}_i(t), (H_i^{-1}(t))^{\mathrm{T}} \psi_0) - c(M_i(t), (H_i^{-1}(t))^{\mathrm{T}} \psi_0)). \quad (13)$$

Здесь $\bar{c}o(\cdot)$ — выпуклая оболочка функции [12]. Таким образом, получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.** Опорная функция множества $G_*$ имеет вид (13).

**Выводы.** В данной работе анализируются свойства максимального по включению множества практической устойчивости дифференциальных включений с импульсным воздействием. Обоснована компактность и теорема о внутренних и граничных точках множества $G_*$. Доказан критерий принадлежности точки границе множества $G_*$ в случае линейного дифференциального включения с линейным импульсным воздействием, найден функционал Минковского, функция деформации и опорная функция такого множества.


1. *Перестюк Н.А., Плотников В.А, Самойленко А.М., Скрипник Н.В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.
2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща шк., 1987. — 286 с.
3. *Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of impulsive differential equations. — World Sci., 1989. — 273 с.
4. *Benchora M., Henderson J.* Impulsive differential equations and inclusions. — Contemporary Mathematics and its Appl. — **2.** — USA: Hindawi Publish. Corpor., 2006. — 366 с.
5. *Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Критерії практичної стійкості для динамічних систем з імпульсним впливом // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Кібернетика. — 2002. — Вип. 3. — С. 35–37.
6. *Гаращенко Ф.Г., Хитько И.В.* Максимальные по включению множества практической устойчивости импульсных систем // Кибернетика и вычислительная техника. — 2004. — Вып. 142. — С. 65–72.
7. *Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Практична стійкість, оцінки та оптимізація. — Київ: Київ. нац. ун-т імені Тараса Шевченка, 2008. — 383 с.
8. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. — Київ: Наук. думка, 1985. — 304 с.
9. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями и дифференциальные включения // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Физматлит, 2003. — С. 265–288.
10. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 223 с.
11. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. — Boston: Birkhauser, 1990. — 460 с.
12. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004. — 416 с.
13. *Благодатских В.И.* Теория дифференциальных включений. — М.: Изд-во МГУ, 1979. — 88 с.



Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко



Получено 18.10.2011