УДК 519.81

В.М. МИХАЛЕВИЧ

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПРАВИЛ ВЫБОРА ПРЕДПОЧТЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

Ключевые слова: *статистическая закономерность, ситуация задачи решения, ненаблюдаемый параметр, правило выбора предпочтений, модель, принцип гарантируемого результата.*

Исследуемая система принятия решений [2] рассматривается в виде пары — того, кто принимает решение (ТПР), и объекта системы принятия решения — ситуации принятия решения (СПР). В результате действия (природа которого нас не интересует) ТПР в СПР возникает последствие, природа которого опять-таки вне нашего внимания. Под решением будем понимать выбор, который принимает ТПР с целью выявления элемента из множества для него возможных действий.

H. Raiffa сказал: «Особенно заботят нас ситуации, в которых последствия любых действий, которые мы можем предпринять, неизвестны в точности из-за того, что они зависят еще и от некоторых событий, которые мы не можем контролировать или предвидеть, а их исходы неизбежно отразятся на результате наших действий». И тем не менее, «...индивидуум, столкнувшийся с проблемой выбора в условиях неопределенности, должен выйти из этого положения, выбрав действие, наилучшим образом отвечающее его индивидуальным оценкам и предпочтениям» [4].

Совокупность «событий, которые мы не можем контролировать или предвидеть», в дальнейшем будем называть множеством значений ненаблюдаемого параметра и обозначать Θ, а ситуацию в случае известного множества Θ назовем параметрической. При этом множество Θ рассматривается в паре с некоторой фиксированной (произвольной) алгеброй Σ своих подмножеств, элементы которой будем называть случайными событиями для пространства ненаблюдаемого параметра Θ. В случае, когда алгебра Σ не задается, по умолчанию предполагается, что $\Sigma = 2^{\Theta}$.

Кроме того, множество возможных для анализируемого ТПР последствий, обозначаемое X, также рассматривается в паре с некоторой фиксированной (произвольной) алгеброй Ξ своих подмножеств. Алгебра Ξ всегда либо будет присутствовать в контексте, либо по умолчанию полагаем $\Xi = 2^{X}$.

ТПР в достижении указанной цели использует моделирование системы принятия решений, рассмотренное в настоящей работе. Введем необходимые определения и понятия, начиная с важнейшего понятия статистической закономерности, данного в [1], которое обобщает понятие вероятностного распределения.

Определение 1. Статистической закономерностью на Θ, где Θ — произвольное множество с заданной алгеброй подмножества Σ (если Σ не задается, то считается по умолчанию, что $\Sigma = 2^{\Theta}$), называется любое непустое замкнутое множество P в топологии $\tau(\Theta)$ пространства

$$PF(\Theta) := \{p \in ([0,1])^{\Sigma} : p(\Theta) = 1,$$

$$p(C \cup D) = p(C) + p(C \setminus D) \; \forall C, D \in \Sigma\} \qquad (1)$$

всех аддитивных вероятностных мер на Θ, являющейся следом $*$ — слабой топологии в сопряженном к банаховому пространству $B_{\Sigma}(\Theta)$ с нормой $\|f\| := \sup_{\theta\in\Theta} |f(\theta)|$. Семейство всех статистических закономерностей на Θ обозначим $P(\Theta)$.

Отметим, что в топологии $\tau(\Theta)$ пространство $PF(\Theta)$ компактно.

Упорядоченную тройку (Θ, Σ, P) будем называть пространством с распределением.

Определение 2. Параметрической схемой ситуации задачи решения (ССЗР) называется упорядоченная четверка вида (X, Θ, U, g), где g для произвольных непустых множеств X, Θ, U является отображением из $\Theta\times U$ на X, для которого $\operatorname{im} g = X$ и для любых $u \in U$, $X' \in \Xi$

$$g(\Theta, u) \in \Xi, \tag{2}$$

$$\{\theta \in \Theta : g(\theta, u) \in X'\} \in \Sigma. \tag{3}$$

При этом множество X называется множеством последствий, Θ — множеством значений ненаблюдаемого параметра, U — множеством решений, а g — отображением последствий ССЗР (X, Θ, U, g).

Класс всех параметрических ССЗР вида (X, Θ, U, g) будем обозначать $\mathbb{Z}$, а при фиксации X имеем $\mathbb{Z}(X) := \{(X, \cdot, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}(X, \Theta) := \{(X, \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$.

Рассмотрим класс параметрических ССЗР с заданными отношениями предпочтений на соответствующих множествах последствий. Тогда каждой такой параметрической ССЗР соответствует упорядоченная четверка вида $\overline{\mathrm{Z}} := ((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g)$, где $(\succcurlyeq)$ — соответствующее отношение предпочтения на последствиях этой СЗР. Тогда через $\mathbf{Z}$ обозначим класс всех ССЗР вида $\overline{\mathrm{Z}}$. Как и ранее, $\mathbf{Z}(X) := \{((X, \cdot), \cdot, t, \cdot) \in \mathbf{Z}\}$, $\mathbf{Z}((X, \succcurlyeq)) := \{((X, \succcurlyeq), \cdot, \cdot, \cdot) \in \mathbf{Z}\}$, $\mathbf{Z}((X, \Theta)) := \{((X, \cdot), \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbf{Z}\}$, $\mathbf{Z}((X, \succcurlyeq), \Theta) := \{((X, \succcurlyeq), \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbf{Z}\}$. При этом очевидно, что $\mathbf{Z} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbf{Z}(X) \subset \mathbb{Z}(X)$ и т.д.

Определение 3. Проекцией ССЗР класса $\mathbf{Z}$ называется такое отображение $\mathit{Пр} : \mathbf{Z} \to \mathbb{Z}$, что для любой ССЗР $((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}$ имеет место $\mathit{Пр}(((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g)) = (X, \Theta, U, g)$.

Определение 4. Под основной задачей принятия решения (ОЗР) ТПР будем понимать установление этим ТПР отношения предпочтения на последствиях (первая ЗР) и решениях (вторая ЗР) в заданной ситуации.

Определение 5. Правилом выбора предпочтений (ПВП) для ЗР в классе ССЗР $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ (т.е. ПВП в $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$) будем называть любое отображение $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, определенное на $\mathbb{Z}'$ и сопоставляющее каждой $Z = (X, \Theta, U, g) \in \hat{\mathbb{Z}}'$ некоторую пару соответствий $(X, \succcurlyeq_Z)$ и $(U, \overset{*}{\succcurlyeq}_Z)$, т.е. $\pi = (\pi_1, \pi_2) \in (2^{(X^2)} \times 2^{(U^2)})^{\mathbb{Z}'}$, что означает $\pi_Z = (\pi_{1Z}, \pi_{2Z}) = ((X, \succcurlyeq_Z), (U, \overset{*}{\succcurlyeq}_Z))$. Класс всех ПВП в $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ будем обозначать $\Pi(\mathbb{Z}')$.

Замечание 1. Каждый ТПР имеет определенное (свое) ПВП для класса $\mathbb{Z}'$, который является моделью ТПР относительно решения им ЗР в классе $\mathbb{Z}'$. Зная ПВП для $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ произвольного ТПР, можно определить его (т.е. ТПР) решение основной ЗР для $Z \in \mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$.

Определение 6. ПВП в $\mathbf{Z}' \subseteq \mathbf{Z}$ будем называть любое отображение $\boldsymbol{\pi}$, определенное на $\mathbf{Z}'$ и сопоставляющее каждой $\overline{\mathrm{Z}} = ((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}'$ некоторое соответствие $(U, \overset{*}{\succcurlyeq}_{\overline{\mathrm{Z}}})$, т.е. $\boldsymbol{\pi} \in [2^{(U^2)}]^{\mathbf{Z}'}$. Будем обозначать также это отображение как $\boldsymbol{\Pi}_{\overline{\mathbf{Z}}} = (U, \overset{*}{\succcurlyeq}_{\overline{\mathrm{Z}}})$. Класс всех ПВП в $\mathbf{Z}' \subseteq \mathbf{Z}$ будем обозначать $\mathit{\Pi}(\mathbf{Z}')$.

Определение 7. Моделью ПВП (МПВП) (Ω-параметрической моделью ПВП (Ω-МПВП)) в классе ССЗР $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbf{Z}' \subseteq \mathbf{Z}$ будем называть конечную совокупность условий (аксиом) $У$ на ПВП для класса $\mathbb{Z}'$ $(\mathbf{Z}')$, которые задают единственное ПВП (с точностью до параметра $\omega \in \Omega$, где Ω — множество значений параметра ω), и обозначать $[У]$ в классе $\mathbb{Z}'$ $(\mathbf{Z}')$ (с параметром $\omega \in \Omega$).

Рассмотрим так называемые необайесовские ЗР (см. [7]), расширив множество последствий X до множества Y случайных последствий, представляющих собой множество распределений на X следующего вида:

$$Y = \{(y : X \to [0,1]) : \operatorname{card}\{y(X)\} < \infty, \sum_{x \in X} y(x) = 1\}. \tag{4}$$

При этом множество Y имеет естественную линейную (выпуклую) (касательно линейности, см. [3]) структуру. Более точное определение выпуклой структуры на множестве Y следует из определения множества смесей [5, 6].

Определение 8. Множество $\mathbf{P}$ называется множеством смесей, если задано отображение, которое любой паре $(P,Q) \in \mathbf{P}^2$ и любому $\alpha \in [0,1]$ ставит в соответствие такой элемент $\alpha P + (1-\alpha)Q \in \mathbf{P}$, что для всех $P,Q \in \mathbf{P}$ и $\alpha, \beta \in [0,1]$ выполняются условия:

1) $1P + 0Q = P$;
2) $\alpha P + (1-\alpha)Q = (1-\alpha)Q + \alpha P$;
3) $\alpha[\beta P + (1-\beta)Q] + (1-\alpha)Q = \alpha\beta P + (1-\alpha\beta)Q$.

Определение 9. Простой вероятностной мерой на X называется такая функция P, определенная на множестве всех подмножеств множества X, т.е. на 2^X, что:

1) $P(A) \geq 0$ для любого $A \subseteq X$;
2) $P(X) = 1$;
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, если $A, B \subseteq X$ и $A \cap B = \varnothing$;
4) $P(A) = 1$ для некоторого конечного A.

Определение 10. Если P и Q являются простыми вероятностными мерами на X и $\alpha \in [0,1]$, то $\alpha P + (1-\alpha)Q$ есть функция, которая ставит в соответствие каждому $A \subseteq X$ число $\alpha P(A) + (1-\alpha)Q(A)$.

Обозначим множество простых вероятностных мер на X через Y. Тогда множество Y с операцией, описанной в определении 10, является множеством смесей, а на множестве Y^Θ соответствующая линейная (выпуклая) структура вводится следующим очевидным способом.

Для любых $f, g \in Y^\Theta$ и $\alpha \in [0,1]$ определим отображение $\alpha f + (1-\alpha) g \in Y^\Theta$ такое, что для любых $\theta \in \Theta$

$$[\alpha f + (1-\alpha) g](\theta) = \alpha f(\theta) + (1-\alpha) g(\theta).$$

Определение 11. Для произвольных непустых множеств A, Θ и нестрогого порядка $(A, \succcurlyeq)$ отображение $f \in A^\Theta$ называется ограниченным относительно $(A, \succcurlyeq)$, если существуют такие $a, b \in A$, что $a \succcurlyeq f(\theta) \succcurlyeq b$ для всех $\theta \in \Theta$.

Определение 12. Для произвольных непустых множеств A, Θ, нестрогого порядка $(A, \succcurlyeq)$ и алгебры $\Sigma \subseteq 2^\Theta$ отображение $f \in A^\Theta$ называется Σ-измеримым относительно $(A, \succcurlyeq)$, если для всех элементов $a \in A$ множества $\{\theta : f(\theta) \succ a\}$ и $\{\theta : f(\theta) \succcurlyeq a\}$ принадлежат Σ.

Обозначим $L_0(A, \Theta)$ множество всех Σ-измеримых конечнозначных отображений на множестве Θ со значениями в множестве A, т.е. $f \in L_0(A, \Theta)$, если $\operatorname{card}\{f(\Theta)\} < \infty$ и $f^{-1}(a) \in \Sigma$ $\forall a \in A$.

Определение 13. Для произвольных непустых множеств X, Θ и нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$ отображение $f \in Y^{\Theta}$, где Y определяется согласно (4), будем называть ограниченным относительно $(X, \succcurlyeq)$, если отображения $\underline{f}$, $\bar{f} \in X^{\Theta}$, заданные на Θ как

$$\underline{f}(\theta) \overset{\text{def}}{=} \min \{x \in X : [f(\theta)](x) \neq 0\} \ \forall \theta \in \Theta,$$

$$\bar{f}(\theta) \overset{\text{def}}{=} \max \{x \in X : [f(\theta)](x) \neq 0\} \ \forall \theta \in \Theta,$$

являются ограниченными относительно $(X, \succcurlyeq)$.

Определение 14. ССЗР $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(Y, \Theta)$, где Y определяется согласно (4), назовем определяющей, если

$$L_0(Y, \Theta) \subseteq g(\cdot, U) = \mathrm{co}[g(\cdot, U)] \subseteq Y^{\Theta}. \tag{5}$$

Определение 15. Для произвольных непустых множеств A, Θ и бинарного отношения $(A, \succcurlyeq)$ отображения $f_1, f_2 \in A^{\Theta}$ называются комонотонными относительно отношения $(\succcurlyeq)$, если ни для каких $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ не выполняется $f_1(\theta_1) \succ f_1(\theta_2)$ и $f_2(\theta_2) \succ f_2(\theta_1)$. Здесь $(\succ)$, как обычно, обозначает асимметричную часть $(\succcurlyeq)$.

Очевидно, что при $A = \mathbb{R}$ (действительные числа) с естественным порядком отображения $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^{\Theta}$ будут комонотонными тогда и только тогда, когда $(f_1(\theta_1) - f_1(\theta_2))(f_2(\theta_1) - f_2(\theta_2)) \geq 0$ для всех $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$.

Через $L_{\succcurlyeq}(Y, \Theta)$ будем обозначать множество всех ограниченых и Σ-измеримых относительно нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$ отображений на множестве Θ со значениями в множестве Y.

Далее приведем некоторые определения из [7].

Определение 16. Неаддитивной вероятностью (емкостью) на (Θ, Σ) называют функцию множества v на Σ (Σ — алгебра подмножеств можества Θ), если выполняются условия нормировки ($v(\varnothing) = 0$ и $v(\Theta) = 1$) и монотонности (т.е. для любых $\Theta_1, \Theta_2 \in \Sigma$, если $\Theta_1 \subseteq \Theta_2$, то $v(\Theta_1) \leq v(\Theta_2)$).

Определение 17. Емкость v на (Θ, Σ) называется выпуклой, если для всех $\Theta_1, \Theta_2 \in \Sigma$

$$v(\Theta_1 \cup \Theta_2) + v(\Theta_1 \cap \Theta_2) \geq v(\Theta_1) + v(\Theta_2).$$

Обозначим $Q_{\mathrm{co}}(\Theta)$ множество всех выпуклых емкостей на $(\Theta, 2^{\Theta})$.

Определение 18. Ядром емкости v на (Θ, Σ) называется множество

$$\mathrm{core}\, v \overset{\text{def}}{=} \{\mu : \mu \text{ — мера на } (\Theta, \Sigma),\ \mu(\Theta') \geq v(\Theta')\ \forall\, \Theta' \in \Sigma,\ \mu(\Theta) = v(\Theta)\}.$$

Определение 19. Интегралом Шоке для любой Σ-измеримой, ограниченной функции f называется число вида

$$\int_{\Theta} f dv \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{0} [v(f \geq t) - 1]\, dt + \int_{0}^{\infty} v(f \geq t)\, dt,$$

где интегралы в правой части являются расширенными интегралами Римана.

Определение 20. Под необайесовской моделью СЗР (МСЗР) для ССЗР $Z \in \mathbb{Z}(Y)$ будем понимать упорядоченную пятерку вида $M := (Y, \Theta, U, g, I)$. Здесь $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(Y)$, где Y определяется согласно (4), I — закономерность, описывающая механизм неопределенности значения ненаблюдаемого параметра $\theta \in \Theta$ класса закономерностей $I(\Theta)$.

Множество всех таких моделей будем обозначать $\mathbb{M}$, а при фиксации Y и Θ имеем $\mathbb{M}(Y,\Theta):=\{(Y,\Theta,\cdot,\cdot,\cdot)\}$.

Дальнейшие исследования направлены на выделение и классификацию ПВП и ССЗР, для которых решение второй ОЗР имеет вид ожидаемой (по определенной закономерности, описывающей механизм случайности принятия значения ненаблюдаемого параметра) полезности.

Ниже приводятся некоторые условия на ПВП $\pi \in \Pi(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$, которые должны иметь место для любой определяющей ССЗР $Z=(Y,\Theta, U, g)\in\mathbb{Z}'(Y,\Theta)\subseteq\mathbb{Z}(Y,\Theta)$.

Y1. Если $Z_i=(Y,\Theta, U_i, g_i)\in\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, $i=\overline{1,2}$ то:

а) $(Y,\succcurlyeq_{Z_1})=(Y,\succcurlyeq_{Z_2})\overset{\text{def}}{=}(Y,\succcurlyeq)$ — невырожденное, т.е. не для всех $y_1, y_2\in Y$ выполняется условие $y_1\succcurlyeq y_2$;

б) из $(y_1)_\Theta \succcurlyeq^*_Z (y_2)_\Theta$ следует $y_1\succcurlyeq y_2$ $\forall y_1, y_2\in Y$;

в) из $u_1, v_1\in U_1$, $u_2, v_2\in U_2$, $g_1(\theta,u_1)=g_2(\theta,u_2)$, $g_1(\theta,v_1)=g_2(\theta,v_2)$ $\forall\theta\in\Theta$, $u_1\succcurlyeq^*_{Z_1} v_1$ следует $u_2\succcurlyeq^*_{Z_2} v_2$.

Y2. $(U,\succcurlyeq^*_Z)$ — нестрогий порядок.

Y3. Если $u_i\in U$, $i=\overline{1,3}$, $u_1\succ^*_Z u_2$, $\alpha\in(0,1)$, то

$$\alpha u_1+(1-\alpha)u_3\succ^*_Z \alpha u_2+(1-\alpha)u_3.$$

Y3.1. Если $u_i\in U$, $i=\overline{1,3}$, — попарно комонотонны, $u_1\succ^*_Z u_2$, $\alpha\in(0,1)$, то

$$\alpha u_1+(1-\alpha)u_3\succ^*_Z \alpha u_2+(1-\alpha)u_3.$$

Y3.2. Если $u_i\in U$, $i=\overline{1,2}$, $y\in Y$, $u_1\succ^*_Z u_2$, $\alpha\in(0,1)$, то

$$\alpha u_1+(1-\alpha)y_\Theta\succ^*_Z \alpha u_2+(1-\alpha)y_\Theta.$$

Y3.3. Если $u_i\in U$, $i=\overline{1,2}$, $u_1\succcurlyeq^*_Z u_2$, $\alpha\in(0,1)$, то

$$\alpha u_1+(1-\alpha)u_2\succcurlyeq^*_Z u_2.$$

Y3.4. Если $u_i\in U$, $i=\overline{1,2}$, $u_1\sim^*_Z u_2$, $\alpha\in(0,1)$, то

$$\alpha u_1+(1-\alpha)u_2\succcurlyeq^*_Z u_2.$$

Y4. Если $u_i\in U$, $i=\overline{1,3}$, $u_1\succ^*_Z u_2\succ^*_Z u_3$, то существуют такие $\alpha,\beta\in(0,1)$, что

$$\alpha u_1+(1-\alpha)u_3\succ^*_Z u_2\succ^*_Z \beta u_1+(1-\beta)u_3.$$

Y5. Если $u_i\in U$, $i=\overline{1,2}$, $g(\theta,u_1)\succcurlyeq_Z g(\theta,u_2)$ для всех $\theta\in\Theta$, то

$$u_1\succcurlyeq^*_Z u_2.$$

Y5.1. Если $u_i\in U$, $y_i\in Y$, $g(\theta,u_i)=y_i$ $\forall\theta\in\Theta_1\subseteq\Theta$, $i=\overline{1,2}$, $g(\theta,u_1)=g(\theta,u_2)$ для всех $\theta\in\Theta\setminus\Theta_1$, $u_1\succ^*_Z u_2$, то

$$y_1\succ_Z y_2.$$

Замечание 2. Условие **Y3** эквивалентно следующему условию:
Если $u_i \in U$, $i = \overline{1,4}$, $u_1 \succcurlyeq_Z^* u_2$, $u_3 \succcurlyeq_Z^* u_4$, $\alpha \in (0,1)$, то

$$\alpha u_1 + (1-\alpha) u_3 \succcurlyeq_Z^* \alpha u_2 + (1-\alpha) u_4.$$

Действительно, из условия **Y3** следует, что

$$\alpha u_1 + (1-\alpha) u_3 \succcurlyeq_Z^* \alpha u_2 + (1-\alpha) u_3 \succcurlyeq_Z^* \alpha u_2 + (1-\alpha) u_4.$$

Обратное очевидно.

Замечание 3. Если $(\succcurlyeq^*)$ — связно, то условие **Y3.3** эквивалентно следующему условию:
если $u_i \in U$, $i = \overline{1,3}$, $u_1 \succcurlyeq_Z^* u_3$, $u_2 \succcurlyeq_Z^* u_3$, $\alpha \in (0,1)$, то $\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \succcurlyeq_Z^* u_3$.

Действительно, согласно **Y3.3**, если $u_1 \succcurlyeq_Z^* u_2$, то $u_1 \succcurlyeq_Z^* u_2 \succcurlyeq_Z^* u_3$; значит,

$$\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \succcurlyeq_Z^* u_2 \succcurlyeq_Z^* u_3.$$

В силу симметрии для $u_2 \succcurlyeq_Z^* u_1$ рассуждения аналогичны. Обратное очевидно.

Условия **Y1** и **Y5** (**Y5.1**) обеспечивают невырожденность и согласованность отношений предпочтения как для последствий и решений, так и для различных представителей класса $\mathbb{Z}'$. Условия **Y3.1**, **Y3.2**, **Y3.3**, **Y3.4** являются в той или иной степени ослаблениями условия независимости **Y3**, а именно условие **Y3.1** является условием комонотонной независимости, условие **Y3.2** — условием независимости от определенности, условие **Y3.3** — условием независимости от не менее предпочтительного (не лучшего), условие **Y3**.4 — условием непринятия неопределенности. Очевидно также, что из условия **Y3.3** следует условие **Y3.4**. Более детальная взаимосвязь между ними будет показана ниже. Условия **Y4**, **Y5** и **Y5.1** являются соответственно условиями непрерывности, монотонности и строгой монотонности.

Далее для произвольного подкласса ССЗР $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$ класса $\mathbb{Z}(Y,\Theta)$ будем относить к следующим множествам:

— $\Pi_1(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ все ПВП в $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, которые удовлетворяют условиям **Y1**, **Y2**, **Y3**, **Y4**, **Y5**;

— $\Pi_{13}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ все ПВП в $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, которые удовлетворяют условиям **Y1**, **Y2**, **Y3.1**, **Y3.3**, **Y4**, **Y5**;

— $\Pi_{12}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ все ПВП в $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, которые удовлетворяют условиям **Y1**, **Y2**, **Y3.1**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5**;

— $\Pi_{11}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ все ПВП в $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, которые удовлетворяют условиям **Y1**, **Y2**, **Y3.1**, **Y4**, **Y5**;

— $\Pi_{22}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ все ПВП в $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, которые удовлетворяют условиям **Y1**, **Y2**, **Y3.1**, **Y3.2**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5**;

— $\Pi_{21}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ все ПВП в $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, которые удовлетворяют условиям **Y1**, **Y2**, **Y3.2**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5**.

Очевидно, что

$$\Pi_1(\mathbb{Z}'(Y,\Theta)) \subseteq \Pi_{13}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta)),$$

а также, что справедлива следующая диаграмма:

$$\Pi_{12}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta)) \subseteq \Pi_{22}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta)) =$$
$$= [\Pi_{11}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta)) \cap \Pi_{21}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))] \begin{matrix} \subseteq \Pi_{11}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta)) \subseteq \\ \subseteq \Pi_{21}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta)) \subseteq \end{matrix} \subseteq \Pi(\mathbb{Z}'(Y,\Theta)).$$

Обозначим $\mathbb{Z}_1'(Y,\Theta)$ любой подкласс ССЗР класса $\mathbb{Z}(Y,\Theta)$, в котором для каждой ССЗР $Z' = (Y,\Theta,U',g') \in \mathbb{Z}_1'(Y,\Theta)$ и для любых $u_i' \in U'$, $i = \overline{1,2}$, найдутся такая определяющая ССЗР $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}_1'(Y,\Theta)$ и такие $u_i \in U$, $i = \overline{1,2}$, что

$$g'(\theta, u_i') = g(\theta, u_i) \;\; \forall \theta \in \Theta, \; i = \overline{1,2}. \tag{6}$$

Обозначим $\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)$ любой такой класс $\mathbb{Z}_1'(Y,\Theta)$, что если $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}_1'(Y,\Theta)$ — определяющая, фигурирующая в определении $\mathbb{Z}_1'(Y,\Theta)$, то для нее должно выполняться условие

$$g(\cdot,U) = L_0(Y,\Theta).$$

Обозначим $\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta)$ любой подкласс ССЗР класса $\mathbf{Z}(Y,\Theta)$, элементы которого задают первую компоненту некоторого ПВП для $\mathbb{Z}_1'(Y,\Theta)$. При этом если $((Y,\succcurlyeq),\Theta,U,g) \in \mathbf{Z}_1'(Y,\Theta)$, а $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}_1'(Y,\Theta)$ является определяющей, фигурирующей в определении $\mathbb{Z}_1'(Y,\Theta)$, то для нее, наряду со свойством (5), должно выполняться условие ограниченности и Σ-измеримости относительно сужения $(Y,\succcurlyeq)$ на X для отображения $g(\cdot,u)$ при всех $u \in U$, т.е.

$$g(\cdot,U) = g(\cdot,U) \cap L_{\succcurlyeq}(Y,\Theta).$$

Для любого класса $\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta)$ определим класс $\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)$, который будем обозначать $\mathbb{Z}_{01}'(Y,\Theta)$, следующим образом:

$$\mathbb{Z}_{01}'(Y,\Theta) := \{(Y,\Theta,\; U',g') : (Y,\Theta,\; U,g) \in \mathit{Пр}\,\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta),$$
$$U' = \{u : u \in U, g(\cdot,u) \in L_0(Y,\Theta)\},\; g'(\theta,u) = g(\theta,u) \;\; \forall\theta \in \Theta, \;\; \forall u \in U'\}.$$

Далее введем в рассмотрение соответствие $\chi_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}$ из $\mathbb{R}^X \times P(\Theta)$ в $\Pi(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$, где $P(\Theta)$ — семейство всех статистических закономерностей на Θ. Это соответствие определяется следующим образом. Если $\omega \in \mathbb{R}^X$, $P \in P(\Theta)$, $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}'(Y,\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(Y,\Theta)$, то

$$\chi_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega,P) \overset{\text{def}}{=} (\chi_{1\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega,P), \chi_{2\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega,P)) \in \Pi(\mathbb{Z}'(Y,\Theta)),$$

$$[\chi_{1\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega,P)](Z) := (Y, \overset{*}{\succcurlyeq}_Z), \; [\chi_{2\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega,P)](Z) := (Y, \overset{*}{\succcurlyeq}_Z)$$

и для любых $y_i \in Y$, $u_i \in U$, где $y_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} x_{ij}$, $\alpha_{ij} \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} = 1$, $x_{ij} \in X$, а $\forall \theta \in \Theta$ $g(\theta,u_i) = \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} g_j(\theta,u_i)$, $\beta_{ij} \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} = 1$, $g_j(\theta,u_i) \in X$, $j = \overline{1,k_i}$, $i = \overline{1,2}$, имеем

$$y_1 \succcurlyeq_Z y_2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j}\omega(x_{2j}) \ge \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{1i}\omega(x_{1i}), \tag{7}$$

$$u_1 \overset{*}{\succcurlyeq}_Z u_2 \Leftrightarrow \min_{p\in P} \sum_{j=1}^{k_1} \beta_{1j} \int_\Theta \omega(g_j(\theta,u_1)) p(d\theta) \ge$$
$$\ge \min_{p\in P} \sum_{j=1}^{k_2} \beta_{2j} \int_\Theta \omega(g_j(\theta,u_2)) p(d\theta). \tag{8}$$

Замечание 4. Отметим, что область определения $\chi_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}$ не совпадает с $\mathbb{R}^X \times P(\Theta)$. Точнее, $\operatorname{Dom}\chi_{1\mathbb{Z}'(Y,\Theta)} \subseteq \mathbb{R}^X$, $\operatorname{Dom}\chi_{2\mathbb{Z}'(Y,\Theta)} = P(\Theta)$, ибо не всегда функция $\omega(g(\cdot,u))$ интегрируема по мере p, т.е. не обязательно является элементом пространства $L_1(\Theta,\Sigma,p)$ [8, гл. VII, §1].

Далее для произвольного непустого множества A определим в функциональном пространстве $\mathbb{R}^A$ отношение эквивалентности $(\overset{\text{ma}}{\approx})$ следующим образом. Для любых $f,g \in \mathbb{R}^A$

$$f \overset{\text{ma}}{\approx} g \Leftrightarrow f = ag + b,\ a,b \in \mathbb{R},\ a > 0. \tag{9}$$

Тогда можно определить соответствие $\chi'_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}$ из $\mathbb{R}^X / \overset{\text{ma}}{\approx} \times P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}$ в $\Pi(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ таким образом, что если $\widetilde{\omega}$ и $\widetilde{P}$ — классы эквивалентности с представителями соответственно ω и P, то

$$\chi'_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\widetilde{\omega},\widetilde{P}) \overset{\text{def}}{=} \chi_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega,P).$$

И, наконец, определим соответствие $\mu_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}$ из $\mathbb{R}^X / \overset{\text{ma}}{\approx} \times Q(\Theta)$ в $\Pi(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$, где $Q(\Theta)$ — семейство всех емкостей на (Θ,Σ), следующим образом. Если $\widetilde{\omega}$ — класс эквивалентности по $(\overset{\text{ma}}{\approx})$ с представителем $\omega \in \mathbb{R}^X$, а $\nu \in Q(\Theta)$, $\pi = \mu_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega,\nu)$, $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}'(Y,\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(Y,\Theta)$, $\pi(Z) = ((Y,\succcurlyeq_Z),(U,\succcurlyeq_Z^*))$, то для любых $y_i \in Y$, $u_i \in U$, где $y_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} x_{ij}$, $\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} = 1$, $x_{ij} \in X$, $\sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} = 1$, $g(\theta,u_i) = \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} g_j(\theta,u_i)$, $g_j(\theta,u_i) \in X$, $j = \overline{1,k_i}$, $i = \overline{1,2}$, выполняется соотношение (7) и

$$u_1 \succcurlyeq_Z^* u_2 \Leftrightarrow \int_\Theta \sum_{j=1}^{k_1} \beta_{1j} \omega(g_j(\theta,u_1)) d\nu \ge \int_\Theta \sum_{j=1}^{k_2} \beta_{2j} \omega(g_j(\theta,u_2)) d\nu. \tag{10}$$

Теорема 1. Для произвольного класса ССЗР $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ соответствие $\chi'_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}$ является биекцией на $\mathbb{R}^X / \overset{\text{ma}}{\approx} \times PF(\Theta)$:

$$\chi'_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X / \overset{\text{ma}}{\approx}, PF(\Theta)) = \Pi_1(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)).$$

Доказательство. Покажем сначала, что $\Pi_1(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)) \subseteq \chi_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X, PF(\Theta))$. Действительно, пусть $\pi \in \Pi_1(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$. Выберем любую ССЗР $Z' = (Y,\Theta,U',g') \in \mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ и любую пару решений $u_i \in U'$, $i = \overline{1,2}$. Тогда в силу определения $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ найдется некоторая определяющая ССЗР $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$, для которой справедливо равенство (6).

Согласно условию **Y1** имеем $(Y,\succcurlyeq_{Z'}) = (Y,\succcurlyeq_Z)$. Поэтому в дальнейшем отношение $(\succcurlyeq_{Z'})$ на Y будем обозначать просто $(\succcurlyeq)$.

Лемма 1. Для нестрогих порядков $(L_0(Y,\Theta),\succcurlyeq^*)$, $(Y,\succcurlyeq)$ свойство монотонности (для любых $f,g \in L_0$, если $f(\theta) \succcurlyeq g(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta$, то $f \succcurlyeq^* g$) эквивалентно свойству строгой монотонности (для любых $f,g \in L_0$, $y,z \in Y$, если $f \succ^* g$, $f(\theta) = y$ $\forall \theta \in \Theta_1 \subseteq \Theta$, $g(\theta) = z$ $\forall \theta \in \Theta_1$, $f(\theta) = g(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta \setminus \Theta_1$, то $y \succ z$).

Доказательство. Покажем от противного, что из монотонности следует строгая монотонность. Пусть найдутся такие $f, g \in L_0$, $y, z \in Y$, что $f \succ^* g$, $f(\theta)=y \;\; \forall\theta \in \Theta_1$, $f(\theta)=g(\theta) \;\; \forall\theta \in \Theta \setminus \Theta_1$, $g(\theta)=z \;\; \forall\theta \in \Theta_1$ и $y \preccurlyeq z$. Тогда для этих f и g имеем $f(\theta) \preccurlyeq g(\theta) \;\; \forall\theta \in \Theta$, а в силу монотонности $g \succcurlyeq^* f$, что противоречит условию $f \succ^* g$.

И наоборот, то, что из строгой монотонности следует монотонность, доказывается индукцией по числу областей, на которых функции f и g постоянны и не совпадают межу собой. Действительно, если $\{\Theta_i, i=\overline{1,n}\}$ — разбиение области $\Theta \setminus \Theta_0$ постоянства функций f и g, на которых $f \neq g$, а Θ_0 — область, где $f=g$, то выберем произвольное Θ_i, $i \neq 0$, например Θ_1. Пусть $f(\theta)=y \;\; \forall\theta \in \Theta_1$, а $g(\theta)=z$ $\forall\theta \in \Theta_1$. Определим новую функцию $h \in L_0$ следующим образом:

$$h(\theta)=\begin{cases} z, \text{ если } \theta \in \Theta, \\ f(\theta), \text{ если } \theta \notin \Theta. \end{cases}$$

Тогда согласно предположению индукции имеем $h \succcurlyeq^* g$, а в силу строгой монотонности имеем $f \succ^* h$. Отсюда в силу транзитивности ($\succcurlyeq^*$) получим $f \succcurlyeq^* g$.

Лемма доказана. Тогда согласно теоремы Энскомба–Аумана [5] из условий **Y1**, **Y2**, **Y3**, **Y4**, **Y5.1**, которые выполняются для $\pi \in \Pi_1(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$, согласно доказанной лемме следует, что существуют единственная конечно-аддитивная вероятностная мера p на Σ, т.е. $p \in PF(\Theta)$, и афинная действительная функция ω на Y такие, что для любых $u_i \in U$, $i=\overline{1,2}$,

$$u_1 \succcurlyeq_Z^* u \Leftrightarrow W(u_1) \geq W(u_2), \tag{11}$$

где

$$W(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Theta} \omega(g(\theta, u))\, p(d\theta) \text{ для любых } u \in U, \tag{12}$$

причем функция ω — единственная с точностью до положительного линейного преобразования. Тогда согласно (11), (12) для любых $y', y'' \in Y$

$$y'_\Theta \succcurlyeq_Z^* y''_\Theta \Leftrightarrow \int_{\Theta} \omega(y')p(d\theta) \geq \int_{\Theta} \omega(y'')p(d\theta) \Leftrightarrow \omega(y') \geq \omega(y'').$$

Это позволяет, воспользовавшись условием **Y1**, сделать вывод, что функция ω будет функцией полезности, сохраняющей предпочтения для $(Y, \succcurlyeq)$, т.е.

$$y' \succcurlyeq y'' \Leftrightarrow \omega(y') \geq \omega(y'').$$

Из этого следует в силу афинности ω соотношение (7).

Далее, если $g(\theta,u_i)=\sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} g_j(\theta,u_i)$, $\sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij}=1$, $i=\overline{1,2}$, то из (11), (12) имеем также (8) для $P=\{p\}$. Следовательно,

$$\pi=\chi_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\omega,p) \in \chi_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X, PF(\Theta)).$$

Пусть, наоборот, $\pi=\chi_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\omega,p)$, где $\omega \in \mathbb{R}^X$; $p \in PF(\Theta)$. Тогда в силу теоремы Энскомба–Аумана и определения $\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$ легко проверить, что для любой $Z \in (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)$, если $\pi_Z=((Y,\succcurlyeq_Z),(U,\succcurlyeq_Z^*))$ удовлетворяет (7), (8), то для $(Y,\succcurlyeq_Z)$ и $(U,\succcurlyeq_Z^*)$ выполняются условия **Y1**, **Y2**, **Y3**, **Y4**, **Y5.1**.

Инъективность $\chi'_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}$ на $\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}\times PF(\Theta)$ следует из единственности с точностью до положительного линейного преобразования функции ω и единственности конечно-аддитивной вероятностной меры p в силу теоремы Энскомба–Аумана.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого класса $\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$ условия **Y1**, **Y2**, **Y3**, **Y4**, **Y5** на ПВП в классе $\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$ представляют собой $\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}\times PF(\Theta)$–ПМПВП в классе $\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$, т.е. [**Y1**, **Y2**, **Y3**, **Y4**, **Y5**] в $\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega}\in\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}$ и $p\in PF(\Theta)$, при этом разным значениям параметров $\widetilde{\omega}$ и p соответствуют несовпадающие ПВП.

Следствие 2. МСЗР $M=(Y,\Theta,U,g,p)$ (где $Z=(Y,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$, а закономерность $p\in PF(\Theta)$) является полным математическим описанием ситуации для [**Y1**, **Y2**, **Y3**, **Y4**, **Y5**] в $\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega}\in\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}$ и $p\in PF(\Theta)$.

Другими словами, ТПР с ПВП из класса $\Pi_1(\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta))$ принимают в ситуации с заданной моделью одинаковые решения второй основной ЗР.

Теорема 2. Для произвольного класса ССЗР $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ любое ПВП $\pi\in\Pi_1(\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta))$ можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВП $\overline{\pi}\in\Pi_1(\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$. При этом $\chi'_{\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}$ — биекция и

$$\chi'_{\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx},PF(\Theta))=\Pi_1(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)).$$

Доказательство следует из Выводов согласно Замечанию 3, «формально расширяющих аддитивную теорию» (см. [7, с. 589]), определению классов $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$, $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$ и теоремы 1.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого класса $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ условия **Y1**, **Y2**, **Y3**, **Y4**, **Y5** на ПВП в классе $\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ представляют собой $\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}\times PF(\Theta)$-ПМПВП в классе $\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$, т.е. [**Y1**, **Y2**, **Y3**, **Y4**, **Y5**] в $\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega}\in\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}$ и $p\in PF(\Theta)$, при этом разным значениям параметров $\widetilde{\omega}$ и p соответствуют несовпадающие ПВП.

Следствие 2. МСЗР $M=(Y,\Theta,U,g,p)$ (где $Z=(Y,\Theta,U,g)\in\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$, закономерность $p\in PF(\Theta)$) является полным математическим описанием ситуации для [**Y1**, **Y2**, **Y3**, **Y4**, **Y5**] в $\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega}\in\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}$ и $p\in PF(\Theta)$.

Другими словами, ТПР с ПВП из класса $\Pi_1(\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$ принимают в ситуации с заданной моделью одинаковые решения второй основной ЗР.

Теорема 3. Для произвольного класса ССЗР $\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$ соответствие $\mu_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}$ является биекцией и

$$\mu_{\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx},Q(\Theta))=\Pi_{11}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)).$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, можно ограничиться определяющими ССЗР $Z\in(Y,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$. Предпочтение на Y будем обозначать $(\succcurlyeq)$, что корректно в силу условия Y1.

Тогда в силу теоремы Шмейдлера [7, с. 578] из условий **Y1**, **Y2**, **Y3.1**, **Y4**, **Y5**, которые выполняются для $\pi\in\Pi_{11}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$, следует, что существуют единственная неаддитивная вероятность $v \in Q(\Theta)$ и афинная действительная функция ω на Y такие, что для любых $u_i \in U$, $i = \overline{1,2}$, выполняется соотношение (11), где

$$W(u) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Theta} \omega(g(\theta\, u))\, dv \text{ для любых } u \in U. \tag{13}$$

И наоборот. При этом функция ω единственная с точностью до положительного линейного преобразования. Отсюда следуют соотношения (7), (10) и утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого класса $\mathbb{Z}'_0\ (Y, \Theta)$ условия **Y1**, **Y2**, **Y3.1**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5** на ПВП в классе $\mathbb{Z}'_0\ (Y, \Theta)$ представляют собой $\mathbb{R}^X / \overset{\text{ma}}{\approx} \times Q(\Theta)$-ПМПВП в классе $\mathbb{Z}'_0\ (Y, \Theta)$, т.е. [**Y1**, **Y2**, **Y3.1**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5**] в $\mathbb{Z}'_0\ (Y, \Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X\ / \overset{\text{ma}}{\approx}$ и $v \in Q(\Theta)$. При этом разным значениям параметров $\widetilde{\omega}$ и v соответствуют несовпадающие ПВП.

Следствие 2. МСЗР $M\ = (Y, \Theta, U, g, v)$ (где $Z \in (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'_0\ (Y, \Theta)$, а закономерность $v \in Q(\Theta)$) является полным математическим описанием ситуации для [**Y1**, **Y2**, **Y3**, **Y4**, **Y5**] в $\mathbb{Z}'_0\ (Y, \Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X / \overset{\text{ma}}{\approx}$ и $v \in Q(\Theta)$.

Другими словами, ТПР с ПВП из класса $\Pi_{11}(\mathbb{Z}'_0(Y, \Theta))$ принимают в ситуации с заданной моделью одинаковые решения второй основной ЗР.

Теорема 4. Для произвольного класса ССЗР $\mathbf{Z}'_1(Y, \Theta)$ любое ПВП $\pi \in \Pi_{11}(\mathbb{Z}'_{01}(Y, \Theta))$ можно (и притом единственным образом) продолжить до ПВП $\overline{\pi} \in \Pi_{11}(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y, \Theta))$. При этом $\mu_{\mathit{Пр}\ \mathbf{Z}'_1(Y, \Theta)}$ является биекцией и

$$\mu_{\mathit{Пр}\ \mathbf{Z}'_1(Y, \Theta)}\ (\mathbb{R}^X\ / \overset{\text{ma}}{\approx}, Q(\Theta)) = \Pi_{11}\ (\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y, \Theta)).$$

Доказательство следует из Выводов согласно Замечанию 1 [7, с. 582], определению классов $\mathbb{Z}'_1\ (Y, \Theta)$, $\mathbb{Z}'_{01}\ (Y, \Theta)$ и теоремы 3.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого класса $\mathbf{Z}'_1(Y, \Theta)$ условия **Y1**, **Y2**, **Y3.1**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5** на ПВП в классе $\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y, \Theta)$ представляют собой $\mathbb{R}^X\ / \overset{\text{ma}}{\approx} \times\ Q(\Theta)$-МПВП в классе $\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y, \Theta)$, т.е. [**Y1**, **Y2**, **Y3.1**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5**] в $\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y, \Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X\ / \overset{\text{ma}}{\approx}$ и $v \in Q(\Theta)$, при этом разным значениям параметров $\widetilde{\omega}$ и v соответствуют несовпадающие ПВП.

Следствие 2. МСЗР $M = (Y, \Theta, U, g, v)$ (где $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y, \Theta)$, а закономерность $v \in Q(\Theta)$) является полным математическим описанием ситуации для [**Y1**, **Y2**, **Y3.1**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5**] в $\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y, \Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X\ / \overset{\text{ma}}{\approx}$ и $v \in Q(\Theta)$.

Другими словами, ТПР с ПВП из класса $\Pi_{11}(\mathit{Пр}\ \mathbf{Z}'_1(Y, \Theta))$ принимают в ситуации с заданной моделью одинаковые решения второй ОЗР.

Теорема 5. Для произвольного класса ССЗР $\mathbb{Z}'_0\ (Y, \Theta)$ соответствие $\chi'_{\mathbb{Z}'_0(Y, \Theta)}$ является биекцией и

$$\chi'_{\mathbb{Z}'_0(Y, \Theta)}(\mathbb{R}^X / \overset{\text{ma}}{\approx}, P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}) = \Pi_{21}\ (\mathbb{Z}'_0(Y, \Theta)).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 с той лишь разницей, что в данном случае из теоремы Гильбоа–Шмейдлера [9, с. 145] и условий **Y1**, **Y2**, **Y3.2**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5** следует для определяющей $Z=(Y,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$ критерий

$$W(u)\overset{\text{def}}{=}\min_{p\in P}\int_{\Theta}\omega(g(\theta,\,u))\,p(d\theta)\ \text{ для любых }\ u\in U\,, \tag{14}$$

причем функция $\omega\in\mathbb{R}^X$ — единственная с точностью до положительного линейного преобразования, а статистическая закономерность P принадлежит $P_{\text{co}}(\Theta)$.

Тогда

$$\Pi_{21}\,(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))=\chi_{\mathbb{Z}'_0\,(Y,\Theta)}\,(\mathbb{R}^X,\ P_{\text{co}}(\Theta))=\chi'_{\mathbb{Z}'_0\,(Y,\Theta)}\,(\mathbb{R}^X\ /\overset{\text{ma}}{\approx},\ P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}\,).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого класса $\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$ условия **Y1**, **Y2**, **Y3.2**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5** на ПВП в классе $\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$ представляют собой $\mathbb{R}^X\ /\overset{\text{ma}}{\approx}\times\ P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}\,)$-ПМПВП в классе $\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$, т.е. [**Y1**, **Y2**, **Y3.2**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5**] в $\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega}\in\mathbb{R}^X\ /\overset{\text{ma}}{\approx}$ и $p\in P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}$, при этом разным значениям параметров $\widetilde{\omega}$ и v соответствуют несовпадающие ПВП.

Следствие 2. МСЗР $M=(Y,\Theta,U,g,\,p)$ (где $Z=(Y,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$, а закономерность $p\in P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}\,)$ является полным математическим описанием ситуации для [**Y1**, **Y2**, **Y3.2**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5**] в $\mathbb{Z}'_0\ (Y,\Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega}\in\mathbb{R}^X\ /\overset{\text{ma}}{\approx}$ и $p\in P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}$.

Другими словами, ТПР с ПВП из класса $\Pi_{21}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$ принимают в ситуации с заданной моделью одинаковые решения второй основной ЗР.

Теорема 6. Для произвольного класса ССЗР $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ любое ПВП $\pi\in\Pi_{21}(\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta))$ можно (и притом единственным образом) продолжить до ПВП $\overline{\pi}\in\Pi_{21}(\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$. При этом $\chi'_{\mathit{Пр}\ \mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}$ является биекцией и

$$\chi'_{\mathit{Пр}\ \mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X\ /\overset{\text{ma}}{\approx},\ P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}\,)=\Pi_{21}\,(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)).$$

Доказательство следует из Замечания к Теореме 4.1 (см. [9, с. 150]), определения классов $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$, $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$ и теоремы 5.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого класса $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ условия **Y1**, **Y2**, **Y3.2**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5** на ПВП в классе $\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ представляют собой $\mathbb{R}^X\ /\overset{\text{ma}}{\approx}\times\ P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}\,)$-ПМПВП в классе $\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$, т.е. [**Y1**, **Y2**, **Y3.2**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5**] в $\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega}\in\mathbb{R}^X\ /\overset{\text{ma}}{\approx}$ и $p\in P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}$, при этом разным значениям параметров $\widetilde{\omega}$ и v соответствуют несовпадающие ПВП.

Следствие 2. МСЗР $M=(Y,\Theta,U,g,\,p)$ (где $Z=(Y,\Theta,U,g)\in\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$, закономерность $p\in P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}\,)$ является полным математическим описанием ситуации для [**Y1**, **Y2**, **Y3.2**, **Y3.4**, **Y4**, **Y5**] в $\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega}\in\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}$ и $p\in P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}$.

Другими словами, ТПР с ПВП из класса $\Pi_{21}(Пр\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta))$ принимают в ситуации с заданной моделью одинаковые решения второй ОЗР.

Теорема 7. Для произвольного класса ССЗР $\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)$

$$\chi'_{\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}, P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx})\cap\mu_{\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}, Q(\Theta))=\Pi_{22}(\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)).$$

Доказательство следует из того, что $\Pi_{22}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))=\Pi_{11}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))\cap$ $\cap\Pi_{21}(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$, а также из теорем 3 и 5.

Теорема доказана.

Теорема 8. Для произвольного класса ССЗР $\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta)$

$$\chi'_{Пр\,\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}, P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx})\cap\mu_{Пр\,\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}, Q(\Theta))=$$

$$=\Pi_{22}(Пр\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta)).$$

Доказательство следует из того, что $\Pi_{22}(Пр\mathbf{Z}'(Y,\Theta))=\Pi_{11}(Пр\mathbf{Z}'(Y,\Theta))\cap$ $\cap\Pi_{21}(Пр\mathbf{Z}'(Y,\Theta))$, также теорем 4 и 6.

Теорема доказана.

Определение 21. Статистическая закономерность $P\in P(\Theta)$ называется емкостной, если найдется такая емкость $v\in Q(\Theta)$, что для любой $f\in B(\Theta)$ имеет место

$$\int_\Theta f dv=\min_{p\in P}\int_\Theta f(\theta)p(d\theta).$$

Множество всех емкостных статистических закономерностей на Θ будем обозначать $P_1(\Theta)$.

Теорема 9. Для произвольного класса ССЗР $\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)$ имеем $\Pi_{13}(\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta))=$ $=\mu_{\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}, Q_{\text{co}}(\Theta))=\chi'_{\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}, P_1(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx})=\Pi_{12}(\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta))=$ $=\Pi_{22}(\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta))$, при этом для любых $\tilde{\omega}\in\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}$, любых $\omega\in\tilde{\omega}$ и любых $v\in Q_{\text{co}}(\Theta)$ выполняется следующее соотношение:

$$\mu_{\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)}(\tilde{\omega},v)=\chi_{\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)}(\omega,P),\ \operatorname{core}v=\operatorname{co}P.$$

Доказательство. Равенство $\Pi_{13}(\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta))=\mu_{\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}, Q_{\text{co}}(\Theta))$ следует из теоремы 3 и пп. IV, IX Предложения [7, с. 582]. Равенство $\Pi_{12}(\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta))=$ $=\chi'_{\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}, P_1(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx})$ следует из теоремы 5 и пп. VII, X Предложения [7, с. 582]. Равенство $\Pi_{12}(\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta))=\Pi_{22}(\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta))$ следует из пп. IV, VII Предложения [7, с. 582]. Равенство $\Pi_{13}(\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta))=\Pi_{12}(\mathbb{Z}_0'(Y,\Theta))$ следует из пп. IV, X Предложения [7, с. 582]. Последнее соотношение в формулировке теоремы 9 следует из условия **YI** и пп. I, X Предложения [7, с. 582].

Теорема доказана.

Теорема 10. Для произвольного класса ССЗР $\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta)$ имеем $\Pi_{13}(Пр\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta))=$ $=\mu_{Пр\,\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}, Q_{\text{co}}(\Theta))=\chi'_{Пр\,\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}, P_1(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx})=\Pi_{12}(Пр\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta))=$ $=\Pi_{22}(Пр\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta))$, и при этом для любых $\tilde{\omega}\in\mathbb{R}^X/\overset{\text{ma}}{\approx}$, любых $\omega\in\tilde{\omega}$, любых $v\in Q_{\text{co}}$ и любых $P\in P_1(\Theta)$ выполняется соотношение

$$\mu_{Пр\,\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta)}(\tilde{\omega},v)=\chi_{Пр\,\mathbf{Z}_1'(Y,\Theta)}(\omega,P),\ \operatorname{core}v=\operatorname{co}P.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9 с соответствующими ссылками на теоремы 4, 6.

Теорема доказана.

На основании доказанных теорем можно составить следующие диаграммы:

$$\begin{array}{c}
\Pi_{13}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)) \\
|| \\
\Pi_1(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)) \subseteq \Pi_{12}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)) = \\
|| \\
\Pi_{22}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))
\end{array}$$

$$= [\Pi_{11}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)) \cap \Pi_{21}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))] \begin{array}{l} \subseteq \Pi_{11}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)) \\ \subseteq \Pi_{21}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)) \end{array};$$

$$\begin{array}{c}
\Pi_{13}(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)) \\
|| \\
\Pi_1(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)) \subseteq \Pi_{12}(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)) = \\
|| \\
\Pi_{22}(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))
\end{array}$$

$$= [\Pi_{11}(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)) \cap \Pi_{21}(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))] \begin{array}{l} \subseteq \Pi_{11}(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)) \\ \subseteq \Pi_{21}(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)) \end{array}.$$

Проведенный выше анализ, в частности, направлен на исследование возможности перехода от критерия минимума ожидаемой полезности на решениях в ситуациях ЗР, заданных в параметрической форме, когда распределение ненаблюдаемого параметра подчиняется статистической закономерности, к критерию ожидаемой полезности по распределению ненаблюдаемого параметра, подчиненного некоторой неаддитивной вероятностной мере.

На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 11. Для определяющей ССЗР $Z=(Y,\Theta,U,g)$ класса $\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ $(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$ эквивалентны следующие условия:

— функции полезности $W_1(u)=\min\limits_{p\in P}\int\limits_{\Theta}\omega_1(g(\theta,\ u))\,p(d\theta)$ и $W_2(u)=$ $=\int\limits_{\Theta}\omega_2(g(\theta,u))dv$, где $P\in P(\Theta)$, $v\in Q(\Theta)$, $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{R}^X$, $u\in U$, определяют одно и то же отношение предпочтений на U (значит, и на Y);

— $W_1(u)=W_2(u)\ \forall u\in U$;

— емкость v — выпуклая, т.е. $v\in Q_{co}(\Theta)$, $w_1(x)=w_2(x)\,\forall x\in X$, $\mathrm{co}\,P=\mathrm{core}\,v$;

— статистическая закономерность P — емкостная, т.е. $P\in P_1(\Theta)$, $w_1(x)=w_2(x)\ \forall x\in X$, $\mathrm{co}\,P=\mathrm{core}\,v$;

— ПВП для ССЗР класса $\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ $(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$ принадлежит классу $\Pi_{22}(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$ $(\Pi_{22}(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)))$.

При этих условиях эквивалентными являются также следующие предложения:

— емкость v — аддитивна;

— $\mathrm{card}\,P=1$;

— ПВП для ССЗР класса $\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ $(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta))$ принадлежит классу $\Pi_1(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$ $(\Pi_1(\mathbb{Z}'_0(Y,\Theta)))$.

Доказательство непосредственно следует из теорем 3, 5, 9 (4, 6, 10).

Теорема доказана.

Таким образом, условия **Y3.2** (независимости от определенности), **Y3.4** (независимости эквивалентных решений от самих себя) являются необходимыми и достаточными для замены критерия ожидаемой полезности по неаддитивной мере на критерий минимума ожидаемой полезности по статистической закономерности. При этом условие **Y3.4** является некоторой формой принципа гарантированного результата или, следуя Шмейдлеру [10], условием непринятия неопределенности (uncertainty aversion). Условие **Y3.1** (комонотонной независимости) является необходимым и достаточным для замены критерия минимума ожидаемой полезности по статистической закономерности на критерий ожидаемой полезности по неаддитивной мере.

В случае возможности такой замены, что равносильно требованию условий **Y3.1**, **Y3.2**, **Y3.4** или условий **Y3.1**, **Y3.3** (независимость от худшего), условие **Y3** (независимости) является необходимым и достаточным для того, чтобы статистическая закономерность P состояла из одного элемента (это равносильно аддитивности емкости v).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иваненко В.И., Лабковский В.А. Проблема неопределенности в задачах принятия решений. — К.: Наук. думка, 1990. — 135 с.
2. Ivanenko V.I. Decision systems and non-stochastic randomness. — Berlin etc.: Springer, 2010. — 272 p.
3. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. — М.: Наука, 1990. — 256 с.
4. Raiffa H. Decision analysis: introductory lectures on choice under uncertainty, Harvard University, Addison-Wesley, 1975. — 310 p.
5. Fishburn P.C. Utility theory for decision making. Publications in operations research. — 1970. — **18**. — New York: John Wiley and Sons. — 350 p.
6. Herstein I.N. and Milnor I. An axiomatic approach to measurable utility // Econometrica. — 1953. — **21**. — P. 291–297.
7. Schmeidler D. Subjective probability and expected utility without additivity // Ibid. — 1989. — **57**. — P. 571–587.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 544 р.
9. Gilboa I. and Schmeidler D. Maxmin expected utility with non-unique prior // J. of Mathematical Economics. — 1989. — **18**. — P. 141–153.
10. Schmeidler D. Subjective probability and expected utility without additivity, IMA Preprint Series, University of Minnesota, 1984.

Поступила 06.11.2009