УДК 519.217; 519.718

Е.Ф. ЦАРЬКОВ, В.К. ЯСИНСКИЙ, И.В. МАЛЫК

УСТОЙЧИВОСТЬ В ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ С МАРКОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ В СХЕМЕ УСРЕДНЕНИЙ. I. ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ МАРКОВСКИХ СИСТЕМ

Ключевые слова: *стохастическая система, импульсная марковская система, малый параметр, нормированное решение*.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее распространенных методов исследования динамических систем является метод усреднения по явно входящему времени [4]. Этот метод успешно работает и в теории случайных возмущений [1, 2, 5, 6, 10–13] (более детальную библиографию можно найти в списке первоисточников приведенных монографий).

Согласно этому методу удается не только построить усредненную систему, приближенно описывающую динамику исходной модели, но и выписывать стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) для нормированных уклонений решения исходного уравнения от соответствующих решений усредненного движения.

В случае импульсных систем принцип усреднения Боголюбова–Митропольского обоснован в монографии [5], а при наличии случайных возмущений — в работе [6]. Для ясности изложения вначале приведем известные результаты [5, 6, 14]. В отличие от большинства работ по методу усреднения импульсных систем здесь рассматриваем импульсные системы с марковскими переключениями.

В настоящей статье доказана возможность использования предельных теорем для исследования устойчивости, как это проведено в случае гладких стохастических систем [10–13]. Во второй и третьей частях этой работы удалось построить усредненную систему и диффузионную аппроксимацию, анализ которых с помощью современных компьютерных технологий позволяет оптимизировать вычисления в десятки миллионов раз.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$, $F = \{\mathcal{F}_t,\ t \ge t_0 \ge 0\}$, [15] задано дифференциальное уравнение (ДУ) Ω со случайной правой частью вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x, \omega). \tag{1}$$

Здесь имеет место отображение $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Относительно правой части кроме непрерывности по t и x для отображения $f \in (t, x, \omega)$ обычно делаются предположения:

1) $\forall x \in \mathbb{R}^m$ и $\forall t \in \mathbb{R}_+$ случайные величины $f\{t, x, \omega\}$ — $\mathcal{F}_s^t$-измеримы, где $\{\mathcal{F}_s^t, t \ge s \ge 0\}$ — семья σ-алгебр, которая удовлетворяет условию $\mathcal{F}_{s_2}^{t_2} \supset \mathcal{F}_{s_1}^{t_1}$ при $[s_2, t_2] \supset [s_1, t_1]$;

2) существует константа L, когда $\forall t \in \mathbb{R}_+$ и $x, y \in \mathbb{R}^m$ выполняются неравенства

$$E\{| f(t, x, \omega)|\} \le L, \quad E\{| f(t, x, \omega) - f(t, y, \omega)|\} \le L|x - y|,$$

где $E\{\bullet\}$ — операция математического ожидания;

3) если кроме предположений 1–2 равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in \mathbb{R}^m$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty} E\left\{\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(s,x,\omega)ds - \bar{f}(x)\right|\right\} = 0,$$

то решение ДУ Ω (1) в среднем на интервале времени $o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ оказывается близким к соответствующему решению усредненного движения [4]

$$\frac{dy}{dt} = \bar{f}(y).$$

Обобщению этого утверждения на случай импульсных возмущений ДУ Ω (1) вида

$$\Delta x\big|_{t_k} = \varepsilon g_k(x(t_k),\omega) \tag{2}$$

посвящена работа [6], результаты которой коротко изложим для ясности дальнейших исследований.

Здесь, как и ранее (условия 1–3), предполагается, что:

4) $\mathcal{F}_{s_k}^{t_k}$-измеримость $g_k(x,\omega)$ $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{Z}$;

5) выполняются условия

$$E\{|g_k(x,\omega) - g_k(y,\omega)|\} \le L|x-y| \ \ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}^m,\ \forall y \in \mathbb{R}^m;$$

$$E\{|g_k(x,\omega)|\} \le L \ \ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}^m;$$

6) существуют пределы

$$\lim_{T\to\infty} E\left\{\left|\frac{1}{T}\sum_{t<t_k\le t+T} g_k(x,\omega) - \bar{g}(x)\right|\right\} = 0,$$

$$\lim_{T\to\infty} E\left\{\left|\frac{1}{T}\sum_{t<t_k\le t+T} g_k(x,\omega)\right|\right\} = r < \infty$$

равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in \mathbb{R}^m$.

Обозначим $x(t,s,x_0)$ решение (1), (2) по начальным данным $x(s)=x_0$ и $\bar{x}(t,s,x_0)$ — решение уравнения усредненного движения

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon[\bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x})] \tag{3}$$

по тем же начальным условиям $x(s)=x_0$.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1–4. Тогда для любых $Q>0$ и $\eta>0$ можно указать такое $\varepsilon_0>0$, что для всех $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ выполняется неравенство

$$\sup_{0\le t\le Q/\varepsilon} |x(t,0,x_0) - \bar{x}(t,0,x_0)| < \eta. \tag{4}$$

Доказательство. Решение $\bar{x}(t,x_0)$ существует и единственно, ибо правая часть (3) удовлетворяет глобальному условию Липшица. При этом существует такая монотонно убывающая функция $\varphi(t) \in \mathbb{R}^1$, что $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0$ и равномерно по $t>0$ и $x \in R^m$ имеют место неравенства:

$$E\left\{\left|\int_t^{t+T}[f(s,x,\omega) - \bar{f}(x)]ds\right|\right\} = \frac{\varphi(T)}{2}\cdot T;$$

$$E\left\{\left|\sum_{t<t_k\le t+T} g_k(x,\omega)-\overline{g_k}(x)\cdot T\right|\right\}=\frac{[\varphi(T)]^2}{4}\cdot T^2 \qquad (5)$$

при достаточно большом $T>0$.

Пусть в интервале $(0,T)$ находится d_1 точек $\{t_k\}$.Тогда при всех $0\le\tau\le t\le T$ решения $\bar{x}(t,\tau,c)$ ДУ Ω (1) по начальным данным $\bar{x}(\tau,\tau,c)=c$ можно записать $\forall t\in[0,T]$

$$\bar{x}(t,\tau,c)=c+\int_\tau^l f(s,c,\omega)\,ds+R(t,\varepsilon,T,\omega)\ (\mathrm{mod}\ P), \qquad (6)$$

причем среднее значение $R(t,\varepsilon,T,\omega)$ удовлетворяет оценке

$$E\{|R(t,\varepsilon,T,\omega)|\}=\varepsilon E\left\{\int_\tau^t |[f(s,x(s,\tau,c),\omega)-f(s,c,\omega)]\,ds|\right\}\le\varepsilon^2 Lc_1T^2 \qquad (7)$$

при некотором $c_1>0$.

Пусть также

$$x_1(t,\tau,c)=c+\int_\tau^t f(s,c,\omega)ds.$$

Тогда из (7) следует, что на конечном интервале решения уравнения (1) данные $x(t,\tau,c)$ и $\bar{x}_1(t,\tau,c)$ близки с точностью до величины порядка малости ε^2.

Так, к моменту первого скачка t_1 $\forall t\in(0,t_1)$

$$x(t,0,x_0)=x_1(t,0,x_0)+o(\varepsilon^2).$$

Далее,

$$x(t_1+0,0,x_0)=x_1(t_1,0,x_0)+\varepsilon g_1(x_1(t_1,0,x_0),\omega)+o(\varepsilon^2)=$$

$$=x_0+\varepsilon\int_0^{t_1} f(s,x_0,\omega)ds+\varepsilon g_1(x_0,\omega)+o(\varepsilon^2).$$

На следующем интервале времени $\forall t\in(t_1,t_2)$

$$x(t,0,x_0)=x_0+\varepsilon\int_0^{t_1} f(s,x_0,\omega)ds+\varepsilon g_1(x_0,\omega)+\int_{t_1}^{t} f(s,x_0,\omega)ds+o(\varepsilon^2)=$$

$$=x_1(t,0,x_0)+\varepsilon g_1(x_0,\omega)+o(\varepsilon^2).$$

Отсюда

$$x(t_2+0,0,x_0)=x_1(t_2,0,x_0)+\varepsilon[g_1(x_0,\omega)+g_2(x_0,\omega)]+0(\varepsilon^2).$$

Исходя из этого, можно построить приближение к решению на интервале $[0,T]$

$$x(t,0,x_0)=x_1(t,0,x_0)+\varepsilon\sum_{j=1}^{k} g_1(x_0,\omega)+0(\varepsilon^2) \qquad (8)$$

$\forall t\in(t_k,t_{k+1}),\ k=\overline{1,d_1}$, причем $t_{d_1+1}=T$.

Используя это приближение, можно записать равенство

$$x(T,0,x_0)=x_1(T,0,x_0)+\varepsilon\sum_{0<t_1<T} g_1(x_0,\omega)+o(\varepsilon^2)=x_0+\varepsilon[\bar{f}(x_0)T+\bar{g}(x_0)T]+$$

$$+\varepsilon\int_0^T[f(t,x_0,\omega)-\bar{f}(x_0)]dt+\varepsilon[\sum_{0<t_1<T} g_1(x_0,\omega)-\bar{g}(x_0)T]+o(\varepsilon^2). \qquad (9)$$

Обозначим $A_0 x_0 \equiv x_0 + \varepsilon T[\bar{f}(x_0) + \bar{g}(x_0)]$, тогда из (8), (9) и условий 1–6 можно получить неравенство

$$E\{|x(T,0,x_0) - A_0 x_0|\} \le \varepsilon \varphi(T) T + \varepsilon^2 M_1 \tag{10}$$

при некотором $\varphi(T)$ и $M_1 > 0$, которые зависят от T и d_1.

Если далее положить $\bar{A} x_0 \equiv \bar{x}(T,0,x_0)$, то из полученных выше неравенств следует

$$|\bar{A} x_0 - A_0 x_0| \le \varepsilon \int_0^{T} |\bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x}) - \bar{f}(x_0) - \bar{g}(x_0)| \, dt \le \varepsilon^2 LCT^2,$$

где L, C — константы. Отсюда справедливо неравенство

$$E|x(T,0,x_0) - \bar{A} x_0| \le \varepsilon \varphi(T) T + \varepsilon^2 (M_1 + LCT^2). \tag{11}$$

Аналогично можно получить на интервале $(T, 2T)$ соотношение

$$x(t,0,x_0) = x(t,T,x(t,T,x(T))) + \varepsilon \sum_{l=0}^{k} g_l(x(T),\omega) + o(\varepsilon^2)$$

$$\forall t \in (t_k, t_{k+1}), \; k = d_1 + 2, \ldots, d_2, \; t_{d_2+1} = 2T,$$

т.е.

$$x(2T,0,x_0) = x(T,0,x_0) + \varepsilon \int_T^{2T} f(t, x(T,0,x_0), \omega) dt + \varepsilon \sum_{T < t_1 < 2T} g_1(x(T),\omega) + 0(\varepsilon^2) =$$

$$= x(T,0,x_0) + \varepsilon[\bar{f}(x(T)) + \bar{g}(x(T))]T + \varepsilon \int_T^{2T} [f(t, x(T,0,\omega),\omega) - \bar{f}(x(T,0,x_0))] dt +$$

$$+ \varepsilon[\sum_{T < t_1 < 2T} g_1(x(T,0,x_0),\omega) - \bar{g}(x(T))T] + 0(\varepsilon^2). \tag{12}$$

Следовательно, имеем неравенство

$$E\{|x(2T,0,x_0) - A_0 x(T,0,x_0)|\} \le \varepsilon \varphi(T) T + \varepsilon^2 M(T, d_2). \tag{13}$$

Тогда из (11)–(13) легко записать

$$E|x(2T,0,x_0) - \bar{x}(2T,0,x_0)| =$$

$$= E|x(2T,0,x_0) - \bar{A}^2 x_0| \le E|x(2T,0,x_0) - A_0 x(T,0,x_0)| +$$

$$+ E|A_0 x(T,0,x_0) - A_0(\bar{A} x_0)| + E|A_0(\bar{A} x_0) - \bar{A}^2 x_0| \le$$

$$\le \varepsilon \varphi(T) + \varepsilon^2 M(T, d_2) + (1 + \varepsilon LT) E|x(T,0,x_0) - \bar{A} x_0| + \varepsilon^2 LCT^2 \le$$

$$\le \varepsilon [1 + (1 + \varepsilon LT)] \cdot [\varphi(T) T + \varepsilon M_1].$$

Как видим, константа M_1 зависит от T, d_1, d_2. Затем аналогично строим приближение к решению на интервале $[2T, 3T]$ и т.д.

Следовательно, на k-м шаге $\forall t \in ((k-1)T, kT)$, $kT \le \dfrac{Q}{\varepsilon}$ можно получить оценку (Q — некоторое фиксированное положительное число)

$$E\,|x(kT,0,x_0)-\bar{x}(kT,0,x_0)|=E|x(kT,0,x_0)-\bar{A}^k x_0|\le\varepsilon\sum_{l=0}^{k-1}(1+\varepsilon LT)^l[\varphi(T)T+\varepsilon\bar{M}],$$

где $\bar{M}$ зависит от T и $\max\limits_{1\le j\le k} d_j\le d,\ k\in\mathbb{N}$.

Таким образом, сделав элементарные преобразования, можно записать цепочку неравенств

$$E|x(kT,0,x_0)-\bar{x}(kT,0,x_0)|\le\varepsilon\sum_{l=0}^{k-1}(1+\varepsilon LT)^l[\varphi(T)T+\varepsilon C_0(T)]\le$$

$$\le\varepsilon\frac{(1+\varepsilon LT)^k-1}{\varepsilon LT}[\varphi(T)T+\varepsilon C_0 CT]\le(1+\varepsilon LT)^{Q/\varepsilon T}\left[\frac{\varphi(T)}{k}+\varepsilon\frac{C_0(T)}{kT}\right]\le$$

$$\le(e^{LQ}+o(\varepsilon))\left[\frac{\varphi(T)}{k}+\varepsilon\frac{C_0(T)}{kT}\right]. \tag{14}$$

Зафиксируем T и ε_0 так, чтобы при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ выполнялось условие

$$e^{LQ}\frac{\varphi(T)}{k}\le\frac{\eta}{4};\ \varepsilon(e^{LQ}+0(\varepsilon))\frac{C_0(T)}{T}+0(\varepsilon)\frac{\varphi(T)}{k}\le\frac{\eta}{4}.$$

Тогда из неравенства (14) легко увидеть, что

$$E\,|x(kT,0,x_0)-\bar{x}(kT,0,x_0)|\le\frac{\eta}{4},\ k=1,2,\ldots,\left[\frac{Q}{\varepsilon T}\right],$$

при $t\in((k-1)T,kT)$ справедливо неравенство

$$|\bar{x}(t,0,x_0)-\bar{x}((k-1)T,0,x_0)|\le\varepsilon\int_{(k-1)T}^{k}|\bar{f}(\bar{x})+\bar{g}(\bar{x})|dt\le\varepsilon CT. \tag{15}$$

На этом же интервале имеем

$$E\,|x(t,0,x_0)-x((k-1)T,0,x_0)|\le\varepsilon\int_{(k-1)T}^{kT}|f(t,x(t,0,x_0),\omega)|dt+$$

$$+\sum_{(k-1)T<t_1<kT}|g_1(x(t,0,x_0),\omega)|\le\varepsilon C(T+d). \tag{16}$$

Таким образом, как только выполняются условия $\varepsilon CT\le\frac{\eta}{4}$, $\varepsilon(T+d)C\le\frac{\eta}{4}$, из (14)–(16) следует оценка (4). Этим завершается доказательство теоремы 1. ■

2. АСИМПТОТИКА НОРМИРОВАННЫХ УКЛОНЕНИЙ ОТ УСРЕДНЕННОГО РЕШЕНИЯ

Пусть $x(t)\equiv x(t,s,x_0)$ — решение (1), (2), а $\bar{x}(t)\equiv\bar{x}(t,s,x_0)$ — решение уравнения (3) по тем же начальным данным $x(s)=\bar{x}(s)=x_0$.

Определение 1. Нормированным уклонением решения $x(t)$ задачи (1), (2) от решения $\bar{x}(t)$ уравнения усредненного движения (3) назовем выражение [4]

$$\eta_\varepsilon(t)\equiv\frac{x(t)-\bar{x}(t)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим «частично усредненную» систему уравнений

$$\frac{dy}{dt}=\varepsilon[f(t,y,\omega)+\bar{g}(y)]. \tag{17}$$

Лемма 1. Если выполнены условия теоремы 1, то при $\forall Q > 0$ и всех $t \in \left[0, \frac{Q}{\varepsilon}\right]$ имеем предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{E|x(t) - y(t)|}{\sqrt{\varepsilon}} = 0, \tag{18}$$

где $x(t) = x(t, 0, x_0)$ — решение (1), а $y(t) = y(t, 0, x_0)$ — решение (17).

Доказательство. Разобьем отрезок $\left[0, \frac{Q}{\varepsilon}\right]$ на отрезки длины $T > 0$. Если $t \in [kT, (k+1)T]$, то

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} E|x(t) - x(kT)| \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} E \left\{ \varepsilon \int_{kT}^{(k+1)T} f(t, x(t), \omega) dt + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \sum_{kT \le t_1 \le (k+1)T} |g_1(x(t_1), \omega)| \right\} \le \frac{\varepsilon L T}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon L d}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}(T + d)L, \tag{19}$$

где $d \equiv \max_{l \in \mathbb{N}} d_l$.

При тех же значениях аргумента t имеем оценку

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} E|y(t) - y(kT)| \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} E\varepsilon \int_{kT}^{(k+1)T} (|f(t, y(t), \omega)| + |g_0(y(t))|) dt \le \frac{\varepsilon L T}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{20}$$

Аналогично ранее полученным оценкам имеем

$$x(T) = x_0 + \varepsilon \int_0^T f(t, x_0, \omega) dt + \varepsilon \sum_{0 < t_l < T} g_1(x_0, \omega) + R_1(\varepsilon, T, d_1, \omega),$$

$$y(T) = x_0 + \varepsilon \int_0^T [f(t, x_0, \omega) + \bar{g}(x_0)] dt + \overline{R_1}(\varepsilon, T, d_1, \omega).$$

Тогда

$$E|R_1(\varepsilon, T, d, \omega)| \le \varepsilon^2 M_1(T, d), \quad E|\overline{R}_1(\varepsilon, T, d, \omega)| \le \varepsilon^2 M_1(T, d).$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$E|x(T) - y(T)| \le \varepsilon E\{ \sum_{0 < t_1 < T} |g_1(x_0, \omega) - \bar{g}(x_0) T|\} + \varepsilon^2 M_2(T, d),$$

а значит,

$$E|x(T) - y(T)| \le \varepsilon \frac{\varphi(T)}{2} + \varepsilon^2 M_2(T, d).$$

На втором интервале будем иметь

$$E|x(2T) - y(2T)| =$$

$$= E\left\{ \left| x(T) + \varepsilon \int_T^{2T} f(t, x(T), \omega) dt + \varepsilon \sum_{T < t_1 < 2T} g_1(x(T), \omega) + R_2(\varepsilon, T, d_2, \omega) - y(T) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \varepsilon \int_T^{2T} [f(t, x(T), \omega) + \bar{g}(y(T))] dt + \overline{R_2}(\varepsilon, T, d_2, \omega) \right| \right\} \le$$

$$\le E|x(T)-y(T)|+\varepsilon LTE\{|x(T)-y(T)|\}+$$

$$+\varepsilon E\left|\sum_{T<t_1<2T} g_1(x(T),\omega)-\bar{g}(y(T))T\right|+\varepsilon^2 M_2(T,d)\le (1+\varepsilon LT)E|x(T)-y(T)|+$$

$$+\varepsilon\frac{\varphi(T)}{2}TLE|x(T)-y(T)|+\varepsilon^2\overline{M}_2(T,d).$$

С использованием этих оценок на k-м шаге получим

$$E|x(kT)-y(kT)|\le\left(1+\varepsilon LT+\varepsilon\frac{\varphi(T)}{2}TL\right)E|x((k-1)T)-y((k-1)T)|+\varepsilon^2 M_k(T,d),$$

откуда следует, что $\forall k\in\mathbb{N}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}E|x(kt)-y(kT)|=0. \qquad (21)$$

Далее, при $t\in[kT,(k+1)T]$ окончательно получим оценку

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}E|x(t)-y(t)|\le\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}E|x(t)-y(kT)|+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}E|y(t)-y(kT)|+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}E|x(kT)-y(kT)|,$$

поэтому утверждение леммы 1 непосредственно вытекает из оценок (19)–(21).

Для «частичного» усреднения системы уравнений (17) можно сформулировать теорему об асимптотике нормированных уклонений из работы [7].

Теорема 2. Пусть для правой части уравнения (17)

$$F(t,y,\omega)\equiv g(y)+f(t,y,\omega) \qquad (22)$$

выполнены следующие условия:

1) равномерная ограниченность при некотором $\delta>0$:

$$E|F(t,y,\omega)|^{6+3\delta}\le L\ \ \forall t\in\mathbb{R}_+\ \text{ и }\ x\in\mathbb{R}^m;$$

2) дифференцируемость и равномерная ограниченность производных по x:

$$|DF(t,x,\omega)|\le L,\ |D^2F(t,x,\omega)|\le L\ \ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ \forall x\in\mathbb{R}^m,\ \omega\in\Omega;$$

3) равномерное по $t_0\in\mathbb{R}_+$, $x\in\mathbb{R}^m$ существование пределов

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{t_0}^{t_1+T}E\{F(t,x,\omega)\}dt\equiv\overline{F}(x),$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\int_{t_0}^{t_0+T}[E\{F(t,x,\omega)\}-E\{F(t,x,\omega)\}][E\{F(s,x,\omega)\}-E\{F(s,x,\omega)\}]^T dt\,ds\equiv A(x);$$

4) семейство σ-алгебр удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания

$$\sup_{t\ge 0}\ \sup_{\begin{cases}A<\mathcal{F}_{-\infty}^{t}\\ B<\mathcal{F}_{t+\tau}^{\infty}\end{cases}}|P(AB)-P(A)P(B)|P^{-1}(B)\equiv\alpha(\tau),$$

причем

$$\int_0^\infty\tau[\alpha(\tau)]^{\delta/(\delta+2)}d\tau<\infty;$$

5) при некотором $\tau_0>0$ $\forall\tau\in[0,\tau_0]$ выполняются условия

$$\left|\int_0^\tau\left[E\left\{F\left(\frac{s}{\varepsilon},\bar{x}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right),\omega\right)\right\}-\overline{F}\left(\bar{x}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\right]ds\right|\le\varepsilon\cdot C,$$

$$\left|\int_0^\tau \left[E\left\{DF\left(\frac{s}{\varepsilon},\bar{x}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right),\omega\right)\right\}-D\bar{F}\left(\bar{x}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)\right]ds\right|\le\varepsilon\cdot C,$$

где $\bar{x}(t)$ — решение (3).

Тогда случайный процесс

$$Z_\varepsilon(t)\equiv Z_\varepsilon(t,\omega)\equiv\frac{y\left(\frac{t}{\varepsilon},\omega\right)-\bar{x}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}{\sqrt{\varepsilon}}$$

слабо сходится на $[0,Q]$ при $\varepsilon\to 0$ к решению СДУ

$$dZ_0=H(t)Z_0\,dt+G(t)dW(t),\ Z_0(0)=0,$$

где

$$H(t)\equiv(D\bar{f})\left[\bar{x}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)+(D\bar{g})\left(\bar{x}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right],$$

$$G(t)=[A(\bar{x}(\frac{t}{\varepsilon}))]^{1/2},$$

$W(t)\equiv W(t,\omega)$ — m-мерный процесс броуновского движения [15, 16].

Замечание 1. В силу леммы 1 можно использоать теорему 2 для анализа асимптотики нормированных отклонений $\eta_\varepsilon(t)$ решения (1), (2) от решения усредненного решения. Для этого необходимо предположить равномерную ограниченность $E|g_j(x,\omega)|^p$ при достаточно большом p, а также равномерное по $\Delta>0$ и $T\in[0,Q]$ условие малости

$$\left|\int_\tau^{\tau+\Delta}\bar{g}\left(\bar{x}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)ds-\varepsilon\sum_{\tau<\frac{j}{\varepsilon}\tau+\Delta}Eg_j\left(\bar{x}\left(\frac{t_j}{\varepsilon}\right),\omega\right)\right|\le C\Delta\varepsilon, \tag{23}$$

которое аналогично условию (5). Уточнение доказательства можно найти в работе [6].

Замечание 2. Приведем некоторые рассуждения относительно возможности применения описанных выше результатов. Предположим выполнение таких условий.

1. Математическое ожидание

$$\hat{f}(t,x)\equiv E\{f(t,x,\omega)\}$$

и корреляционная матрица

$$K(t,s,x)\equiv E\{[f(t,x,\omega)-\hat{f}(t,x)][f(s,x,\omega)-\hat{f}(s,x)]^T\}$$

правой части (1) имеют период $\theta>0$, т.е.

$$\hat{f}(t+\theta,x)=\hat{f}(t,x),$$

$$K(t+\theta,s+\theta,x)=K(t,s,x).$$

2. Существует такое число $p\in\mathbb{N}$, что $t_{j+p}=t_j+\theta,\ E\{g_{j+p}(x,\omega)\}=E\{g_j(x,\omega)\}$ при всех $j\in\mathbb{N}$.

Тогда вычисляются средние

$$\bar{f}(x)\equiv\frac{1}{\theta}\int_0^\theta\hat{f}(t,x)dt,$$

$$\hat{g}(x)\equiv\frac{1}{\theta}\sum_{j=1}^{p}E\{g_j(x,\omega)\}.$$

3. Если предположить, что $\hat{f}$ и ее производные по x до второго порядка удовлетворяют условию Гельдера по t вдоль решений $\bar{x}(t)$ ДУ Ω (3), а также условиям

$$|E\{g_j(\bar{x}(t_j,\omega))\}-E\{g_j(\bar{x}(t_i,\omega))\}|\le c_1|t_j-t_i|^{\alpha},$$

$$|E\{Dg_j(\bar{x}(t_j,\omega))\}-E\{Dg_j(\bar{x}(t_i,\omega))\}|\le c_1|t_j-t_i|^{\alpha}$$

$\forall i,j\in\mathbb{N}$, то несложно убедиться в справедливости условия 5 теоремы 2 и условия (23).

Применим приведенные теоретические выкладки для анализа колебаний в реальных системах [4].

3. ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

При анализе многочисленных колебаний в реальных системах во многих случаях оперируют уравнением вида

$$\ddot{x}+\mu^2 x=\varepsilon[f(\nu t,x,\dot{x})+\psi(x,\dot{x})]\zeta(t,\omega), \tag{24}$$

где $f(\nu t,x,\dot{x})$ — достаточно гладкая 2π-периодическая по первому аргументу функция; $\zeta(t,\omega)$ — стационарный в широком смысле случайный процесс [15] с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K(\tau)$; $\psi(x,\dot{x})$ — достаточно гладкая функция, характеризирующая интенсивность шума в точке фазового пространства $(x,\dot{x})$. Пусть в моменты времени t_i система (24) подвержена импульсным возмущениям

$$\Delta\dot{x}\big|_{t_i}=\varepsilon[I_i(x,\dot{x})+T(x,\dot{x})\eta_i(\omega)], \tag{25}$$

где случайные величины $\eta_i(\omega)$ имеют нулевое математическое ожидание; функции $I_i(x,\dot{x})$ и $T(x,\dot{x})$ имеют необходимую гладкость, причем $I_{i+p}(x,\dot{x})=I(x,\dot{x})$, $t_{i+p}=t_i+\dfrac{2\pi}{\nu}$ при некотором $p\in\mathbb{N}$ и $\forall i\in\mathbb{N}$.

Постановка задачи. Рассмотрим лишь нерезонансный случай, когда μ «плохо» аппроксимируется числами $\dfrac{r}{s}\nu$ при $r,s\in\mathbb{N}$ и точки $\dfrac{2\pi k}{\mu}$ при $k\in\mathbb{Z}$ не являются точками дискретного спектра процесса $\zeta(t,\omega)$.

В многочисленных приложениях, как правило, систему (24), (25) записывают в виде одного уравнения, используя дельта–функцию Дирака $\delta(t)$, т.е.

$$\ddot{x}+\mu^2 x=\varepsilon[f(\nu t,x,\dot{x})+\psi(x,\dot{x})\zeta(t,\omega)]+$$
$$+\varepsilon\sum_{0<t_i<t}\{[I_i(x,\dot{x})+T(x,\dot{x})\eta_i(\omega)]\,\zeta(t-t_i)\}. \tag{26}$$

Сделав замену переменных

$$x=a\sin\varphi;\ \dot{x}=a\mu\cos\varphi;\ \varphi=\mu t+\theta$$

в уравнении (26), уже для новых переменных a и φ легко записать следующую систему уравнений:

$$\frac{da}{dt}=\frac{\varepsilon}{\mu}[f(\nu t,a\sin\varphi,a\mu\cos\varphi)+\psi(a\sin\varphi,a\mu\cos\varphi)\zeta(t)+$$
$$+\sum_{0<t_i<t}\{[I_i(a\sin\varphi,a\mu\cos\varphi)+T(a\sin\varphi,a\mu\cos\varphi)\eta_i(\omega)]\delta(t-t_i)\}\cdot\cos\varphi];$$

$$d\frac{\varphi}{dt}=\mu-\frac{\varepsilon}{a}\mu\,[f(\nu t, a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)+\psi(a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)\zeta(t)+$$

$$+\sum_{0<t_i<t}\{[I_i(a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)+T(a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)\eta_1(\omega)]\delta(t-t_i)\}\cdot\sin\varphi].$$

Эту систему уравнений можно также переписать в известной форме без использования дельта–функции:

$$\frac{da}{dt}=\frac{\varepsilon}{\mu}[f(\nu t, a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)+\psi(a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)\zeta(t)]\cdot\cos\varphi;$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\mu-\frac{\varepsilon}{a\mu}[f(\nu t, a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)+\psi(a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)\zeta(t)]\cdot\sin\varphi;$$

$$\Delta a\Big|_{t_i}=\frac{\varepsilon}{\mu}[I_i(a_1\sin\varphi_1, a_1\mu\cos\varphi_1)+T(a_1\sin\varphi_1, a_1\mu\cos\varphi_1)\eta_i(\omega)]\cdot\cos\varphi_i;$$

$$\Delta\varphi\Big|_{t_i}=-\frac{\varepsilon}{a\mu}[I_i(a_1\sin\varphi_1, a_1\mu\cos\varphi_1)+T(a_1\sin\varphi_1, a_1\mu\cos\varphi_1)\eta_i(\omega)]\cdot\sin\varphi_i, \quad (27)$$

где $a_1\equiv a(t_1)$, $\varphi_1\equiv\varphi(t_1)$.

Отметим, что наиболее часто в приложениях функции $f(\nu t, x, \dot{x})$, $\psi(x,\dot{x})$, $I_i(x,\dot{x})$, $T(x,\dot{x})$ аппроксимируются многочленами, которые зависят только от x и $\dot{x}$. Поэтому функции

$$f^{(1)}(\nu t, a, \varphi, \omega)=[f(\nu t, a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)+\psi(a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)\zeta(t)]\cdot\cos\varphi;$$

$$f^{(2)}(\nu t, a, \varphi, \omega)=[f(\nu t, a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)+\psi(a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)\zeta(t)]\cdot\sin\varphi;$$

$$I_i^{(1)}(x,\dot{x})=[I_i(a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)+T(a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)\eta_i]\cdot\cos\varphi;$$

$$I_i^{(2)}(x,\dot{x})=[I_i(a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)+T(a\sin\varphi, a\mu\cos\varphi)\eta_i]\cdot\sin\varphi$$

можно считать тригонометрическими многочленами. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}I_i^{(j)}(a,\varphi,\omega)=\sum_{k=1}^{N}(A_{ik}^{(j)}(a,\omega)\sin k\varphi+B_{ik}^{(j)}(a,\omega)\cos k\varphi);\ \ j=1,2;\ \ i=\overline{1,p}.$$

Обозначим

$$Z_j(a,\varphi,t,\omega)\equiv-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{p}[A_{ik}^{(j)}(a,\omega)\sin k\varphi+B_{ik}^{(j)}(a,\omega)\cos\varphi]\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\nu(t-t_i)}{(k\nu)^2-n^2}+k\nu[B_{ik}^{(j)}(a,\omega)\sin k\varphi-A_{ik}^{(j)}(a,\omega)\cos k\varphi]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\nu(t-t_i)}{n[(k\nu)^2-n^2]};$$

$$r(t)=\frac{1}{\pi}\frac{\pi-t}{2}\ \ \forall t\in[0,2\pi];\ \ \gamma(t+2\pi k)\equiv r(t)\ \ \forall t\in[0,2\pi]\ \ \forall\, k\in\mathbb{Z}.$$

Из определения Z_j следует, что при $t\neq t_i$

$$\frac{dZ_i}{d\varphi}\mu+\frac{dZ_i}{dt}\nu=-\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial I_i^{(j)}(a,\varphi,\omega)}{\partial\varphi}r(t-t_i).$$

Сделаем замену переменных

$$a = b + \frac{\varepsilon}{\mu} u^{(1)}(b, \theta_0, t, \omega),$$

$$\varphi = \theta_0 - \frac{\varepsilon}{\mu b} u^{(2)}(b, \theta_0, t, \omega),$$

где

$$u^{(j)}(b, \theta_0, t, \omega) \equiv \frac{1}{\mu} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/\nu} [f^{(j)}(\nu t, a, \varphi, \omega) + \frac{\nu}{2\pi} \sum_{i=1}^{p} I_i^{(j)}(\theta_0, \omega) - f_0^{(j)}(b) -$$

$$- \frac{\nu}{2\pi} \sum_{i=1}^{p} I_i^{(j)}(b) dt d\varphi + Z_j(b, \theta_0, t, \omega) + \sum_{i=1}^{p} I_i^{(j)}(b, \theta_0, \omega) \gamma(t - t_i); \; j = 1, 2;$$

$$I_i^{(j)}(b) = E\{I_i^{(j)}(b, \theta_0, \omega)\};$$

$$f_0^{(j)}(b) \equiv \frac{\nu}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/\nu} E\{f^{(j)}(\nu t, a, \varphi, \omega)\} dt d\varphi, \; j = 1, 2.$$

Здесь интегралы означают такую первообразную, среднее которой по периодам $\frac{2\pi}{\nu}$ и 2π равно нулю. Подставив эти выражения в (26), получим

$$\begin{cases} \dfrac{db}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{\mu} F(b); \\ \dfrac{d\theta_0}{dt} = \mu - \dfrac{\varepsilon}{\mu} \Phi(b), \end{cases} \tag{28}$$

где $F(b) \equiv f_0^{(1)}(b) + \frac{\nu}{2\pi} \sum_{i=0}^{p} I_i^{(1)}(b)$, $\Phi(b) \equiv f_0^{(2)}(b) + \frac{\nu}{2\pi} \sum_{i=0}^{p} I_i^{(2)}(b)$.

Поскольку $E\{\zeta(t)\} = 0$, $E\{\eta_j\} = 0 \; \forall j \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, то в уравнении первого приближения (28) шумы отсутствуют.

Если для аппроксимируемой системы (26) выполнены предположения 1–5, то осуществим переход к системе для нормированных уклонений

$$d\rho = \sigma_{11}(b(\tau)) d\zeta_1(\tau) + \frac{1}{\mu} \frac{d}{da} F(b(\tau)) \rho(\tau) d\tau \;;$$

$$dr = \sigma_{21}(b(\tau)) d\zeta_1(t) + \sigma_{22}(b(\tau)) d\zeta_2(\tau) + \frac{1}{\mu} \frac{d}{da} \left(\frac{\Phi(b(\tau))}{b(\tau)} \right) \rho(\tau) d\tau, \tag{29}$$

где

$$\rho(0) = 0; \; b(0) = 0; \; \sigma_{11} = \sqrt{A_{11}(a)}; \; \sigma_{21}(a) = \frac{A_{21}(a)}{\sqrt{A_{11}(a)}}; \; \sigma_{22}(a) = \sqrt{A_{22}(a) - \frac{A_{21}^2(a)}{A_{11}(a)}};$$

$$A_{11}(a) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi} dt \int_{-\infty}^{+\infty} ds k\left(\frac{t-s}{\mu}\right) \psi(a \sin t, \; a\mu \cos t) \cdot \psi(a \sin s, \; a\mu \cos s) \sin t \sin s \;;$$

$$A_{22}(a) = \frac{1}{2\pi a \mu^3} \int_0^{2\pi} dt \int_{-\infty}^{+\infty} ds k\left(\frac{t-s}{\mu}\right) \psi(a \sin t, \; a\mu \cos t) \cdot \psi(a \sin s, \; a\mu \cos s) \sin t \sin s,$$

$\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$ — гауссовские процессы с независимыми приращениями, $\tau = \varepsilon t$ — медленное время.

Из приведенных выше результатов следует, что случайный процесс

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(a\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - b\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right), \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\theta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - \theta_0\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right) \right\}$$

слабо сходится к марковскому гауссовскому процессу $\{\rho(\tau,\omega), r(\tau,\omega)\}$ (см. [15, 16]).

Таким образом, систему для нормированных уравнений (29) можно анализировать с использованием плотности совместного распределения процесса $\{g(\tau,\omega), r(\tau,\omega)\}$, которую при некоторых дополнительных предположениях удается выписать в явном виде [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1968. — 354 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. — М.: Наука, 1975. — 496 с.
3. Калныне Д.А., Царькова В.Н. Случайные возмущения параметров линейной итераций // Проблемы случайного поиска. — Рига: Зинатне, 1988. — Вып. 11. — С. 150–166.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1971. — 440 с.
5. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. — Киев: Вища школа, 1967. — 287 с.
6. Самойленко А.М., Станжицкий А.Н. О флуктуациях в схеме усреднения для дифференциальных уравнений со случайными импульсным воздействиями // Укр. мат. журн. — 1989. — № 5. — С. 631–641.
7. Хасьминский Р.З. О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Теор. вероятностей и ее применения. — 1966. — **2**, № 2. — С. 240–259.
8. Хасьминский Р.З. Предельная теорема для решений дефференциального уравнений со случайной правой частью // Там же. — **2**, № 3. — С. 444–462.
9. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 419 с.
10. Blankenship G., Papanicolaou G.C. Stability and control of stochastic system with wide – band noise disturbance. 1 SIAM // J. Appl. Mat. — 1978. — **34.** — P. 437–476.
11. Korolyuk V.S. Averaging and stability of dynamical system with rapid markov switchings. — Umea: Univ. of Umea, S — 90167, 1991. — Febr. — 15 p.
12. Korolyuk V.S., Limnios N. Diffusion approximation of integral functional in double merging and averaging scheme // Theory Probab. and Math. Statist. — 2000. — **60**. — P. 87–94.
13. Korolyuk V.S., Limnios N. Diffusion approximation of evolutionary systems with equilibrium in asymptotic split phase space // Theory Probab. and Math. Statist. — 2005. — **70**. — P. 71–82.
14. Tsarkov Ye. Asymptotic methods for stability analysis of Markov impulse dynamical systems // Nonlinear Dynamic and Systems Theory. — 2002. — **1**, N 2. — P. 103–115.
15. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процесов. — М.: Наука, 1994. — Т. 1. — 544 с.
16. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Випадкові процеси. Комп'ютерне моделювання. — Чернівці: Золоті литаври, 2009. — Т. 3. — 798 с.
17. Царьков Е.Ф., Свердан М.Л. Устойчивость стохастических импульсных систем. — Рига: Изд-во Рижского техн. ун-та, 1994. — 306 с.

Поступила 05.05.2009