УДК 519.8

П.И. СТЕЦЮК, Л.Б. КОШЛАЙ

ОПТИМАЛЬНАЯ НОРМИРОВАННАЯ СТРУКТУРА СПРОСА И ДОБАВЛЕННОЙ СТОИМОСТИ В ПРОДУКТИВНОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА[1]

Ключевые слова: *матрица Леонтьева, статическая модель Леонтьева, экстремальная квадратичная задача, собственные числа и собственные векторы*.

ВВЕДЕНИЕ

Структурная перестройка наряду с институциональными реформами является важнейшим направлением в процессе рыночной трансформации экономики. Удобным инструментарием для моделирования структурно-технологических изменений и определения пропорций между секторами экономики являются соотношения Леонтьева «затраты–выпуск» [1].

Для определения основных методов уменьшения производственных затрат в [2, 3] предложена оптимизационная межотраслевая модель с переменными коэффициентами прямых затрат. Для уменьшения общего энергопотребления в [2] предложена линейная модель, которая также использует уравнения межотраслевого баланса. В [4, 5] применяется статическая двойственная модель Леонтьева для исследования связей между структурой труда и заработной платы, которые являются неотъемлемой частью структурных преобразований. Настоящая статья продолжает исследования в этом направлении. Здесь для статической модели Леонтьева исследуется соотношение между структурой спроса и структурой добавленной стоимости, которые моделируются с помощью нормированных вектора спроса и вектора добавленной стоимости. Кроме того, построено оптимальное соотношение между обеими структурами путем объединения прямой и двойственной моделей Леонтьева.

Структура статьи следующая. В разд. 1 рассмотрены основные балансовые соотношения в моделях Леонтьева. В разд. 2 приведены прямая и двойственная статические модели Леонтьева, проанализированы их основные свойства — продуктивность и прибыльность. Рассмотрен пример задачи линейного программирования на основе статической модели Леонтьева. В разд. 3 приведена задача нелинейного программирования, которая объединяет обе вышеуказанные модели Леонтьева и включает два квадратичных ограничения для нормировки вектора спроса и вектора добавленной стоимости. Доказано, что для продуктивной матрицы Леонтьева эта задача всегда имеет решение. Даны аналитические выражения для его нахождения через собственные векторы, которые соответствуют максимальным собственным числам некоторых симметричных матриц. Показано, что для продуктивной и неразложимой модели Леонтьева существует единственное решение, все компоненты которого положительны. Оно задает оптимальное соотношение между нормированными структурой спроса и структурой добавленной стоимости. Приведены теорема для нахождения этого оптимального соотношения и пример ее использования для семиотраслевой матрицы Леонтьева, построенной М.В. Михалевичем. В заключение обсуждаются возможные расширения нелинейной модели, рассмотренной в разд. 3.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке SNSF (Швейцария), проект No IZ73ZO_127962 «Analysis of Institutional and Technological Changes in Market and Transition Economies on the Background of the Present Financial Crisis».

МАТРИЦА ЛЕОНТЬЕВА И БАЛАНСОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ЛЕОНТЬЕВА

Предположим, что в экономике существует n чистых отраслей (каждая отрасль производит один вид продукции и разные отрасли выпускают разные виды продукции). Пусть i , j — номера этих отраслей ($i, j = \overline{1,n}$). Обозначим a_{ij} величину прямых производственных затрат продукции отрасли i на изготовление единицы продукции отрасли j. Эта величина может быть задана как в натуральном, так и в стоимостном выражении. Матрица $A = a_{ij}$ называется матрицей Леонтьева (матрицей коэффициентов прямых затрат или матрицей технологических коэффициентов). Матрица A несет информацию о сложившейся структуре межотраслевых связей, о существующей технологии общественного производства и т.д.

Пусть y_i и x_i — конечный и валовый продукты i-й отрасли соответственно. Эти величины связаны уравнением межотраслевого баланса

$$x_{i}= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = \overline{1,n}\,. \tag{1}$$

В матричной форме система уравнений (1) имеет вид

$$x = Ax + y \quad \text{или} \quad y = (I - A)x\,, \tag{2}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — вектор валового продукта, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ — вектор конечного продукта, I — единичная матрица размерности $n \times n$ (здесь и далее T — символ транспонирования). Выражение Ax интерпретируется как затраты, в результате чего модель Леонтьева на основе (2) получила название затраты–выпуск.

Пусть p_i — цена единицы продукта отрасли i, c_i — добавленная стоимость (чистый доход от единицы выпуска) в отрасли i . Зависимость этих величин можно выразить через уравнение межотраслевого баланса для цен

$$p_{i}= \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, p_j + c_i, \quad i = \overline{1,n}\,.$$

В матричной форме система этих уравнений имеет вид

$$p = A^T p + c \quad \text{или} \quad c = (I - A^T)p, \tag{3}$$

где $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$ — вектор цен единичных продуктов отраслей, $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ — вектор чистого дохода на единицу выпуска. Здесь выражение $A^T p$ интерпретируется как вектор суммы издержек на единицу выпуска.

Система (3) называется двойственной к системе (2). Обе системы связывает следующее соотношение:

$$p^T y = p^T (I - A)x = ((I - A^T)p)^T x = c^T x\,. \tag{4}$$

Соотношения (2), (3) и вытекающее из них равенство (4) положены в основу так называемых статических моделей Леонтьева.

2. СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА И ИХ СВОЙСТВА

Статическая модель Леонтьева затраты–выпуск имеет форму

$$y = (I - A)x, \; x \ge 0\,, \tag{5}$$

где A — известная матрица Леонтьева, y — известный вектор спроса, x — неизвестный вектор выпуска.

Наличие неотрицательного решения системы (5) при любом неотрицательном векторе спроса означает, что экономика согласно модели Леонтьева является продуктивной. Неотрицательная матрица A продуктивна, если существует обратная матрица $(I-A)^{-1}$, состоящая только из неотрицательных элементов. Пусть $\lambda_{\max}(A)$ — максимальное собственное число матрицы A (число Фробениуса). Оно всегда положительно и не меньше модуля любого собственного числа матрицы A (см. теорему Фробениуса–Перрона для произвольных неотрицательных матриц [6]). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 [6]. Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda_{\max}(A)<1$.

Если матрица A — продуктивна, то при любом векторе $y\geq 0$ система (5) имеет решение, определяемое по формуле

$$x=(I-A)^{-1}\,y.$$

Матрицу $A^{*}=(I-A)^{-1}$ называют матрицей полных затрат. Ее можно представить в виде

$$A^{*}=I+A+A^{2}+\ldots$$

Теорема 1 означает необходимые и достаточные условия сходимости ряда $I+A+A^{2}+\ldots$ к матрице $A^{*}=(I-A)^{-1}$.

Статическая двойственная модель Леонтьева имеет вид

$$c=(I-A^{T})p,\quad p\geq 0, \tag{6}$$

где A — известная матрица Леонтьева, c — известный вектор добавленной стоимости (чистый доход от единицы выпуска), p — неизвестный вектор цен. В основу модели (6) положена система (3).

Если система (6) при любом $c\geq 0$ имеет неотрицательное решение $p=(p_{1},\ldots,p_{n})^{T}$, то двойственная модель Леонтьева называется прибыльной. Из теоремы 1 следует прибыльность модели (6). Свойство прибыльности этой модели является двойственным к свойству продуктивности модели (5) в понимании, что выполнение одного из них обусловливает справедливость другого. Действительно, если неотрицательная матрица $A^{*}=(I-A)^{-1}$ существует, то отсюда следует существование неотрицательной матрицы $(I-A^{T})^{-1}=((I-A)^{-1})^{T}=(A^{*})^{T}$.

Прямая (5) и двойственная (6) модели Леонтьева либо их аналоги в виде неравенств используются при решении ряда оптимизационных задач, применяемых при моделировании экономических процессов. Так, например, используя задачу линейного программирования (ЛП-задачу), можно определить, при каком векторе выпуска x реализация конечного продукта y приведет к максимальному доходу с учетом наличного запаса $\nu=(\nu_{1},\ldots,\nu_{m})^{T}$ первичных ресурсов. Получаем следующую ЛП-задачу:

$$\max_{x,y} p^{T}y \tag{7}$$

при ограничениях

$$x=Ax+y, \tag{8}$$

$$Bx\leq\nu, \tag{9}$$

$$x\geq 0, \tag{10}$$

где p — известный вектор цен, B — технологическая матрица размера $m\times n$. Коэффициент b_{kj} задает количество k-го первичного ресурса ($k=1,\ldots,m$), необходимое для производства единицы продукции j-й отрасли ($j=1,\ldots,n$).

Центральными в модели (7)–(10) являются неравенства (9), определяющие количество наличного запаса первичных ресурсов. Именно эти неравенства ограничивают сверху целевую функцию (7). Однако ограничить ее можно и другим способом. Ниже рассмотрим одну из таких задач нелинейного программирования [7], которая базируется на объединении прямой (5) и двойственной (6) моделей Леонтьева с учетом связывающего их равенства $p^T y = c^T x$.

3. ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЕИХ МОДЕЛЕЙ ЛЕОНТЬЕВА И ЕЕ СВОЙСТВА

Пусть вектор $y \ge 0$ задает не конечный спрос, а лишь его структуру. Положим $\| y \| = 1$, где $\| \cdot \|$ — евклидова норма вектора. Аналогично для вектора добавленной стоимости $c \ge 0$ будем предполагать, что $\| c \| = 1$. Рассмотрим задачу нелинейного программирования в постановке

$$\max_{p,\, y} p^T y = \max_{x,\, c} c^T x \tag{11}$$

при ограничениях

$$y = (I - A)x, \;\; x \ge 0, \;\; y \ge 0, \tag{12}$$

$$c = (I - A^T)p, \;\; p \ge 0, \;\; c \ge 0, \tag{13}$$

$$\| y \| = 1, \;\; \| c \| = 1, \tag{14}$$

где неизвестными являются компоненты векторов x, y, p, c. Задача (11)–(14) состоит в нахождении таких соотношений между структурой конечного спроса и структурой добавленной стоимости, чтобы максимума достигала такая величина, которая с точностью до множителя равнялась бы значению валового национального продукта.

Формально задача (11)–(14) является задачей нелинейного программирования. Нелинейны здесь целевая функция (11), выражающая связь между прямой и двойственной моделями Леонтьева, и ограничения (14), связанные с нормировками вектора конечного спроса и вектора добавленной стоимости. Если в ограничениях (14) вместо норм векторов y и c использовать квадраты этих норм, то задача (11)–(14) преобразуется в экстремальную квадратичную задачу с нелинейной целевой функцией и ограничениями, которые заданы линейными системами (12), (13) и двумя квадратичными равенствами: $\| y \|^2 = 1$ и $\| c \|^2 = 1$.

Если матрица A — продуктивна, то задача (11)–(14) всегда имеет решение: x^*, y^*, p^*, c^*. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть матрица Леонтьева A продуктивна и ей соответствует матрица полных затрат $A^* = (I - A)^{-1}$. Пусть $\hat{A} = (A^*)^T A^*$ и $\lambda_{\max}(\hat{A}) = \lambda_{\max}(\hat{A}^T)$ — максимальные собственные числа матриц $\hat{A}$ и $\hat{A}^T$. Решением задачи (11)–(14) будут либо векторы

$$y^* = \xi(\hat{A}), \;\; x^* = A^* y^*, \;\; c^* = A^* y^* \Big/ \left\| A^* y^* \right\|, \;\; p^* = (A^*)^T c^*, \tag{15}$$

где $\xi(\hat{A})$ — неотрицательный собственный вектор матрицы $\hat{A}$, соответствующий максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(\hat{A})$, либо векторы

$$c^* = \xi(\hat{A}^T), \;\;\; p^* = (A^*)^T c^*, \;\;\; y^* = (A^*)^T c^* \Big/ \left\| (A^*)^T c^* \right\|, \;\; x^* = A^* y^*, \tag{16}$$

где $\xi(\hat{A}^T)$ — неотрицательный собственный вектор матрицы $\hat{A}^T$, соответствующий максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(\hat{A}^T)$. При этом оптимальное значение целевой функции единственно и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(p^*)^T y^* = (c^*)^T x^* = (c^*)^T A^* y^* = \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{A})} = \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{A}^T)}\,. \tag{17}$$

Доказательство. Для продуктивной матрицы Леонтьева A (ей соответствует $\lambda_{\max}(A)<1$) имеем неотрицательную матрицу полных затрат $A^* = (I-A)^{-1}$, вследствие чего компоненты вектора $x = A^* y$ будут неотрицательными при любых $y \geq 0$, а компоненты вектора $p = (A^*)^T c$ будут неотрицательными при любых $c \geq 0$. С учетом этого задачу (11)–(14) для продуктивной матрицы A можно переписать в виде

$$\max_{y,c} c^T A^* y \tag{18}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1, \ \ y \geq 0, \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1, \ \ c \geq 0. \tag{20}$$

Здесь ограничения (14) переформулированы в виде двух квадратичных равенств. Решением задачи (18)–(20) есть либо решение (i), либо решение (ii):

(i) векторы $y^* = \xi(\hat{A})$ и $c^* = A^* y^* \Big/ \left\| A^* y^* \right\|$, где $\xi(\hat{A})$ — неотрицательный собственный вектор матрицы $\hat{A}$, соответствующий максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(\hat{A})$;

(ii) векторы $c^* = \xi(\hat{A}^T)$ и $y^* = (A^*)^T c^* \Big/ \left\| (A^*)^T c^* \right\|$, где $\xi(\hat{A}^T)$ — неотрицательный собственный вектор матрицы $\hat{A}^T$, соответствующий максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(\hat{A}^T)$.

Докажем сначала решение (i). Если в задаче (18)–(20) исключить требования на неотрицательность компонет векторов y и p, то тогда ее аналог можно записать в виде

$$\max_{c,y} c^T A^* y = \max_{\|y\|=1} \varphi(y), \tag{21}$$

где $\varphi(y)$ — решение подзадачи при фиксированном y,

$$\varphi(y) = \max_{c} c^T A^* y \tag{22}$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1. \tag{23}$$

Пусть u — множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (23). Функция Лагранжа для задачи (22), (23) имеет следующий вид:

$$L(c,u) = c^T A^* y + u\left(1 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2\right).$$

Из условия $\dfrac{\partial L(c,u)}{\partial c} = 0$ находим

$$A^* y - 2uc(u) = 0,$$

откуда имеем

$$c(u) = \frac{1}{2u} A^* y\,. \tag{24}$$

В результате получаем

$$\psi(u) = L(c(u),u) = \frac{1}{4u}\left\| A^* y \right\|^2 + u\,.$$

Функция $\psi(u)$ при $u^* = \frac{1}{2}\left\| A^* y \right\|$ достигает минимума $\psi^* = \psi(u^*) = \left\| A^* y \right\|$. Из (24) определяем вектор

$$c^*(y) = c(u^*) = A^* y \Big/ \left\| A^* y \right\|, \tag{25}$$

при котором $\varphi(y) = \left\| A^* y \right\|$. Следовательно,

$$\max_{\|y\|=1} \varphi(y) = \max_{\|y\|=1} \left\| A^* y \right\| = \max_{\|y\|=1} \sqrt{y^T (A^*)^T A^* y} = \max_{\|y\|=1} \sqrt{y^T \hat{A}\, y}. \tag{26}$$

С учетом того, что

$$\lambda_{\max}(\hat{A}) = \max_{\|y\|=1} y^T \hat{A}\, y,$$

решением задачи (26) будет собственный вектор матрицы $\hat{A}$, который соответствует ее максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(\hat{A})$, т.е. $y^* = \xi(\hat{A})$. Положительность $\lambda_{\max}(\hat{A})$ вытекает из определения матрицы $\hat{A}$. Следовательно, решением задачи (21)–(23) будут вектор $y^* = \xi(\hat{A})$ и вектор $c^* = A^* y^* \Big/ \left\| A^* y^* \right\|$, который вычислен согласно (25). Это завершает доказательство пункта (i).

Поскольку матрица $\hat{A}$ — неотрицательная, то согласно теореме Фробениуса–Перрона для произвольных неотрицательных матриц [6] существует неотрицательный собственный вектор $\xi(\hat{A})$, соответствующий числу $\lambda_{\max}(\hat{A})$. Это означает неотрицательность вектора y^*. Неотрицательность вектора $c^* = A^* y^* \Big/ \left\| A^* y^* \right\|$ следует из неотрицательности матрицы A^* и вектора y^*. Это дает соотношения для векторов y^* и c^* в (15). Соотношения для неотрицательных векторов x^* и p^* в (15) следуют из неотрицательности матрицы A^* и формул расчета для них $x^* = A^* y^*$ и $p^* = A^* c^*$, что завершает вывод всех соотношений в (15) на основе пункта (i).

Аналогично можно обосновать и формулы (16) на основе условия (ii). Здесь соответствующая задача имеет вид

$$\max_{c,\, y} c^T A^* y = \max_{\|c\|=1} \varphi(c),$$

где $\varphi(c)$ — решение следующей подзадачи при фиксированном c:

$$\varphi(c) = \max_{y} c^T A^* y \tag{27}$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1. \tag{28}$$

Для задачи (27), (28) имеем решение

$$y^*(c) = (A^*)^T c \Big/ \left\| (A^*)^T c \right\|, \tag{29}$$

при котором $\varphi(c) = \left\| (A^*)^T c \right\|$. Следовательно,

$$\max_{\|c\|=1} \varphi(c) = \max_{\|c\|=1} \sqrt{c^T A^* (A^*)^T c} = \max_{\|c\|=1} \sqrt{c^T \hat{A}^T c}. \tag{30}$$

Для задачи (30) решением c^* будет собственный вектор $\xi(\hat{A}^T)$ матрицы $\hat{A}^T$, соответствующий ее максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(\hat{A}^T)$. Учитывая, что матрица $\hat{A}^T$ — неотрицательная, то для числа $\lambda_{\max}(\hat{A}^T)$ такой неотрицательный собственный вектор существует согласно теореме Фробениуса–Перрона для произвольних неотрицательных матриц. Это гарантирует неотрицательность вектора c^*. Неотрицательность вектора $y^* = (A^*)^T c^* / \left\| (A^*)^T c^* \right\|$, полученного согласно (29), очевидна в силу неотрицательности матрицы $\hat{A}^T$ и вектора $c^* = \xi(\hat{A}^T)$. Это задает соотношения для векторов y^* и c^* в (16). Соотношения для векторов x^* и p^* в (16) следуют из неотрицательности матрицы A^* и формул расчета для них $x^* = A^* y^*$ и $p^* = A^* c^*$, что завершает вывод всех соотношений в (16) на основе пункта (ii).

Выполнение равенств в (17) следует из цепочки следующих равенств:

$$(p^*)^T y^* = ((A^*)^T c^*)^T y^* = (c^*)^T A^* y^*, \ (c^*)^T x^* = (c^*)^T A^* y^*,$$

$$(c^*)^T A^* y^* = \max_{\|y\|=1} \varphi(y) = \max_{\|y\|=1} \sqrt{y^T \hat{A} y} = \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{A})},$$

$$(c^*)^T A^* y^* = \max_{\|c\|=1} \varphi(c) = \max_{\|c\|=1} \sqrt{c^T \hat{A}^T c} = \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{A}^T)}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекают два следствия.

Следствие 1. Если матрица Леонтьева A продуктивна и максимальное собственное число матрицы $\hat{A}$ — единственное, то задача (11)–(14) имеет единственное решение x^*, y^*, p^* и c^*, которое может быть вычислено либо согласно (15), либо согласно (16).

Приведенное далее следствие связано со свойством неразложимости неотрицательных $(n \times n)$-матриц. Матрица A называется неразложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду

$$A = \begin{Bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{Bmatrix},$$

где A_1 и A_3 — квадратные подматрицы размера $k \times k$ и $(n-k)\times(n-k)$. Свойство неразложимости матрицы A гарантирует неразложимость симметричной матрицы $\hat{A}$. Это означает, что ее нельзя представить в виде

$$\hat{A} = \begin{Bmatrix} \hat{A}_1 & 0 \\ 0 & \hat{A}_3 \end{Bmatrix},$$

где $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_3$ — квадратные подматрицы размера $k \times k$ и $(n-k)\times(n-k)$.

Из теоремы Фробениуса–Перрона для неотрицательных и неразложимых матриц [6] следует, что числу $\lambda_{\max}(\hat{A})$ соответствует единственный собственный вектор матрицы $\hat{A}$, все компоненты которого положительны. Поэтому если в качестве собственного вектора матрицы $\hat{A}$ использовать именно этот вектор, то все остальные векторы из (15) также будут положительными в силу того, что в матрицах A^* и $(A^*)^T$ отсутствуют нулевые строки. Аналогичная ситуация имеет место и для матрицы $\hat{A}^T$, т.е. ее максимальному собственному числу соответствует единственный собственный вектор, все компоненты которого положительны. Справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. Если матрица Леонтьева A продуктивна и неразложима, то задаче (11)–(14) соответствует единственное решение, все компоненты которого положительны. Это решение имеет вид

$$y^* = \xi(\hat{A}), \ x^* = A^* y^*, \ \ c^* = \xi(\hat{A}^T), \ p^* = (A^*)^T c^*,$$

где $\xi(\hat{A})$ и $\xi(\hat{A}^T)$ — положительные собственные векторы матриц $\hat{A}$ и $\hat{A}^T$, соответствующие их максимальным собственным числам $\lambda_{\max}(\hat{A})$ и $\lambda_{\max}(\hat{A}^T)$.

Назовем это решение оптимальным соотношением между структурой спроса и структурой добавленной стоимости для матрицы Леонтьева A. Здесь оптимальную структуру спроса определяют компоненты собственного вектора $\xi(\hat{A})$, а оптимальную структуру добавленной стоимости — компоненты собственного вектора $\xi(\hat{A}^T)$. Оптимальное значение целевой функции в задаче (11)–(14) равно $\sqrt{\lambda_{\max}(\hat{A})}$, или, что то же самое, $\sqrt{\lambda_{\max}(\hat{A}^T)}$.

Однако наличие единственного решения в следствии 2 еще не означает, что это решение легко найти. Как правило, в случае высокой кратности максимального собственного числа нахождение такого вектора проблематично. Ниже приведена теорема, позволяющая упростить нахождение такого оптимального соотношения.

Теорема 3. Если матрица Леонтьева A продуктивна и неразложима и значение $\lambda_{\max}(\hat{A})$ — единственное, то тогда задача (11)–(14) имеет единственное решение, все компоненты которого положительны. Это решение определяется следующим образом:

$$y^* = \xi(\hat{A}),\ c^* = A^* y^* / ||A^* y^*||,\ x^* = \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{A})}\, c^*,\quad p^* = \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{A})}\, y^*, \tag{31}$$

где $\xi(\hat{A})$ — неотрицательный собственный вектор матрицы $\hat{A}$, соответствующий максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(\hat{A})$. Решению (31) отвечает оптимальное значение целевой функции, равное $\sqrt{\lambda_{\max}(\hat{A})}$.

На основе теоремы 3 можно построить алгоритм, который с помощью известных процедур нахождения собственных чисел и собственных векторов симметричных матриц позволяет определить оптимальное соотношение между структурой спроса и структурой добавленной стоимости. Реализация такого алгоритма предполагает следующее: если единственному максимальному собственному числу соответствует собственный вектор, у которого все компоненты отрицательны, то следует взять их с обратным знаком.

Ниже приведем пример расчета оптимального соотношения между структурой спроса и структурой добавленной стоимости для семиотраслевой матрицы Леонтьева, построенной М.В. Михалевичем на основе межотраслевого баланса Украины (2007). для моделирования структурно-технологических изменений в энергетических отраслях:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}337 & 0{,}139 & 0{,}215 & 0{,}127 & 0{,}146 & 0{,}112 & 0{,}1960 \\ 0{,}023 & 0{,}251 & 0{,}179 & 0{,}089 & 0{,}019 & 0{,}131 & 0{,}0050 \\ 0{,}163 & 0{,}176 & 0{,}191 & 0{,}097 & 0{,}103 & 0{,}095 & 0{,}0870 \\ 0{,}012 & 0{,}009 & 0{,}157 & 0{,}031 & 0{,}029 & 0{,}026 & 0{,}0940 \\ 0{,}009 & 0{,}010 & 0{,}008 & 0{,}226 & 0{,}107 & 0{,}006 & 0{,}0071 \\ 0{,}153 & 0{,}121 & 0{,}099 & 0{,}031 & 0{,}025 & 0{,}019 & 0{,}0330 \\ 0{,}161 & 0{,}193 & 0{,}103 & 0{,}101 & 0{,}095 & 0{,}087 & 0{,}0910 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Матрица A является продуктивной ($\lambda_{\max}(A) = 0{,}75374$) и неразложимой (не содержит нулевых компонент). Ей соотвествует матрица

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5{,}5705 & 3{,}5710 & 4{,}1980 & 2{,}5066 & 1{,}9989 & 2{,}3038 & 2{,}6338 \\ 3{,}5710 & 4{,}7218 & 3{,}8463 & 2{,}1869 & 1{,}6037 & 2{,}1307 & 2{,}2138 \\ 4{,}1980 & 3{,}8463 & 5{,}2490 & 2{,}5991 & 1{,}9358 & 2{,}2573 & 2{,}4627 \\ 2{,}5066 & 2{,}1869 & 2{,}5991 & 2{,}5403 & 1{,}4014 & 1{,}3074 & 1{,}5987 \\ 1{,}9989 & 1{,}6037 & 1{,}9358 & 1{,}4014 & 2{,}0990 & 0{,}9927 & 1{,}2061 \\ 2{,}3039 & 2{,}1307 & 2{,}2573 & 1{,}3074 & 0{,}9927 & 2{,}1507 & 1{,}3295 \\ 2{,}6338 & 2{,}2138 & 2{,}4627 & 1{,}5987 & 1{,}2061 & 1{,}3295 & 2{,}5240 \end{pmatrix},$$

для которой максимальное собственное число $\lambda_{\max}(\hat{A})$ равно 18,105 и является единственным.

Согласно теореме 3 задача (11)–(14) с матрицей A имеет единственное решение, все компоненты которого положительны. Таким решением являются вектор

$$y^* = (0.5017,\ 0.4451,\ 0.4965,\ 0.3001,\ 0.2325,\ 0.2660,\ 0.2980)^T$$

для оптимальной нормированной структуры спроса и вектор

$$c^* = (0.6258,\ 0.3469,\ 0.4599,\ 0.2061,\ 0.1325,\ 0.2731,\ 0.3766)^T$$

для оптимальной нормированной структуры добавленной стоимости. Соответствующие этой оптимальной структуре компоненты векторов x^* и p^* вычисляются умножением на $4.255 = \sqrt{18.105}$ (оптимальное значение целевой функции) компонент векторов c^* и y^*.

НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Дальнейшим развитием исследований может быть добавление к модели (11)–(14) ограничений в виде линейных неравенств на переменные x и p. Так, например, если добавить к этой модели неравенства (9), то для переменных y ограничения приобретают вид $BA^*y \le v$. Подобные линейные неравенства могут определять требования к неизвестным компонентам вектора p, которые для переменных c будут выражены с помощью матрицы $(A^*)^T$. При наличии таких ограничений собственные векторы будут решением только тогда, когда отсутствуют активные ресурсные ограничения вида (9) либо их «ценовые» аналоги для переменных p. Иначе это приведет к семейству оптимизационных задач, которые можно интерпретировать как задачи нахождения некоторых собственных векторов симметричных матриц с неявно заданными ограничениями (требованиями) на компоненты собственных векторов.

К такому же типу оптимизационных задач приводит и следующее обобщение задачи (11)–(14). Например, необходимо найти оптимальную структуру векторов y и c при дополнительном требовании, чтобы спрос на продукцию отрасли j был в два раза больше, чем спрос на продукцию отрасли i. Аналогичные условия могут характеризовать и соотношение добавленной стоимости в заданных отраслях. Дополнение задачи (11)–(14) такими требованиями позволит более глубоко исследовать связи между отдельными секторами экономики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев В.В. Избранные проиведения. Т. 1–3. — М.: Экономика, 2006 — 2008.
2. Михалевич М.В., Сергиенко И.В. Моделирование переходной экономики. Модели, методы, информационные технологии. — Киев: Наук. думка, 2005. — 670 с.
3. Сергиенко И.В., Михалевич М.В., Стецюк П.И., Кошлай Л.Б. Модели и информационные технологии для поддержки принятия решений при проведении структурно-технологических преобразований // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 2. — С. 26–49.
4. Бортис Г. Институции, поведение и экономическая теория. Вклад в классико-кейнсианскую политическую экономию. — Киев: Изд. дом «Києво-Могилянська академія», 2009. — 598 с.
5. Bortis H. Keynes and the classics: notes on the monetary theory of production, in: Modern theories of money. The nature and role of money in capitalist economies, Rochon L.-P. and Sergio Rossi (eds). — Edward Elgar: UK, USA, 2003. — P. 411–474.
6. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 296 с.
7. Стецюк П.И., Кошлай Л.Б., Пилиповский А.В. О задаче оптимального соотношения между спросом и добавленной стоимостью в моделях Леонтьева // Теорія оптимальних рішень. — 2010. — № 9. — С. 136–143.

Поступила 01.06.2010