ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А. К. Бахтин, А. Л. Таргонский

О произведении внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

New problems on non-overlapping domains with free poles are presented.

В геометрической теории функций комплексного переменного экстремальные задачи о произведении внутренних радиусов областей представляют известное классическое направление. С историей данного вопроса можно ознакомиться в работах [1–15].

Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — плоскость комплексных чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ и $r(B, a)$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ [8–10]. В данной работе использованы сведения из теории квадратичных дифференциалов [11].

Систему точек $A_n := \{a_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k = \overline{1, n}$, такую, что

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \cdots < \arg a_n < 2\pi,$$

будем называть лучевой системой точек. Обозначим

$$P_k(A_n) := \{w\colon \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}, \qquad \sigma_k := \frac{1}{\pi}(\arg a_{k+1} - \arg a_k), \qquad k = \overline{1, n},$$

$\arg a_{n+1} := 2\pi$. Ясно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = 2$.

Пусть D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ — произвольное открытое множество и $w = a \in D$, тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту D, содержащую a. Для произвольной лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}$ и открытого множества D, $A_n \subset D$ обозначим $D_k(a_p)$ связную компоненту множества $D(a_p)\bigcap\overline{P_k(A_n)}$, содержащую точку a_p, $p = k, k+1$, $k = \overline{1, n}$.

Будем говорить, что открытое множество D, $A_n \subset D$ удовлетворяет условию неналегания относительно лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}$, если

$$D_k(a_k)\bigcap D_k(a_{k+1}) = \varnothing$$

при каждом фиксированном $k = \overline{1, n}$, $a_{n+1} := a_1$.

Более подробно с введенными выше понятиями можно ознакомиться в работе [7].

Рассмотрим класс лучевых систем точек A_n таких, что

$$\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{1/(2\sigma_k)}\right)|a_k| = 1, \tag{1}$$

$$\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1}).$$

В данной работе рассматривается задача по определению максимума функционала

$$I_n = (r(D,0)\cdot r(D,\infty))^{\gamma}\cdot\prod_{k=1}^{n} r(D,a_k),$$

где $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ лучевая система, удовлетворяющая (1), а D принадлежит некоторому классу открытых множеств, $A_n \subset D$, $0 \in D$, $\infty \in D$, $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$. Задачи с близкими постановками были рассмотрены в работах [4–7, 9, 10, 12–15].

2. Основные результаты.

Теорема. *Для произвольного числа $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$, для любой лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, удовлетворяющей равенству (1), любого открытого множества D, $0 \in D$, $\infty \in D$, $a_k \in D$, $k = \overline{1,n}$, удовлетворяющего условию неналегания относительно лучевой системы точек A_n, и такого, что*

$$[D(0)\bigcap D(\infty)]\bigcup[D(0)\bigcap D(a_k)]\bigcup[D(\infty)\bigcap D(a_k)] = \varnothing, \qquad k = \overline{1,n},$$

существует такое $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, что при каждом $n \geqslant n_0(\gamma)$ выполняется неравенство

$$(r(D,0)\cdot r(D,\infty))^{\gamma}\cdot\prod_{k=1}^{n} r(D,a_k) \leqslant (r(B_0^{(0)},0)\cdot r(B_\infty^{(0)},\infty))^{\gamma}\cdot\prod_{k=1}^{n} r(B_k^{(0)},a_k^{(0)}),$$

где $a_k^{(0)}$, $B_k^{(0)}$, $B_0^{(0)}$ и $B_\infty^{(0)}$ $(k = \overline{1,n})$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2. \tag{2}$$

Следующий результат, являющийся следствием теоремы, дополняет результаты работы [14].

Следствие. *Для произвольного числа $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$, для любой лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, удовлетворяющей равенству (1), и любой системы непересекающихся областей B_0, B_k, B_∞, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$, существует такое $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, что при каждом $n \geqslant n_0(\gamma)$ выполняется неравенство*

$$(r(B_0,0)r(B_\infty,\infty))^{\gamma}\cdot\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant (r(B_0^{(0)},0)r(B_\infty^{(0)},\infty))^{\gamma}\cdot\prod_{k=1}^{n} r(B_k^{(0)},a_k^{(0)}),$$

где $a_k^{(0)}$, $B_k^{(0)}$, $B_0^{(0)}$ и $B_\infty^{(0)}$ $(k = \overline{1,n})$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (2).

Доказательство теоремы. Обозначим

$$\sigma_0 = \max_k \sigma_k.$$

Рассмотрим сначала случай $\sigma_0 < 1/\sqrt{2\gamma}$.

В дальнейшем будем использовать методы работ [7, 9, 10, 12, 13]. Для достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$ образуем множества

$$E_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus D; \qquad \overline{U}_t = \{w \in \mathbb{C}\colon |w| \leqslant t\}, \qquad \Delta_t = \left\{w \in \mathbb{C}\colon |w| \geqslant \frac{1}{t}\right\},$$

$$E_k(t) = \{w \in \mathbb{C}\colon |w - a_k| \leqslant t\}, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим конденсатор

$$C(t, D, A_n) = \{E_0,\ \overline{U}_t,\ \Delta_t,\ E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$$

с предписанными значениями 0, $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\gamma}$, $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ раз}}$. Емкостью конденсатора $C(t, D, A_n)$ называется величина (см. [8, 10])

$$\operatorname{cap} C(t, D, A_n) = \iint [(G'_x)^2 + (G'_y)^2]\, dxdy,$$

где нижняя грань берется по множеству всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества E_0, $G\big|_{\overline{U}_t} = \sqrt{\gamma}$, $G\big|_{\Delta_t} = \sqrt{\gamma}$, $G\big|_{E_k(t)} = 1$, $k = \overline{1,n}$. Модуль конденсатора $|C(t, D, A_n)|$ определяется выражением

$$|C(t, D, A_n)| = [\operatorname{cap} C(t, D, A_n)]^{-1}.$$

Из теоремы 1 [12] и аналогично работе [7] определим асимптотику модуля конденсатора $C(t, D, A_n)$

$$|C(t, D, A_n)| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n + 2\gamma}\log\frac{1}{t} + M(D, A_n) + o(1), \qquad t \to 0, \tag{3}$$

где

$$M(D, A_n) = \frac{1}{2\pi(n+2\gamma)^2}\left[\gamma\log r(D, 0) + \gamma\log r(D, \infty) + \sum_{k=1}^{n}\log r(D, a_k) + \sum_{k\neq p} g_D(a_p, a_k)\right], \tag{4}$$

а $g_B(z, a) = \begin{cases} g_{B(a)}(z, a), & z \in B(a), \\ 0, & z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(a)}, \\ \lim\limits_{\zeta \to z} g_{B(a)}(\zeta, a), & \zeta \in B(a), \quad z \in \partial B(a) \end{cases}$ — обобщенная функция Грина открытого множества B относительно точки $a \in B$, $g_{B(a)}(z, a)$ — функция Грина области $B(a)$ относительно точки $a \in B(a)$.

Рассмотрим разделяющее преобразование (см. [10, 12]) конденсатора $C(t, D, A_n)$ относительно семейства углов $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^n$ и семейства функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$, где

$$z_k(w) = (-1)^k i(e^{-i\arg a_k} w)^{1/\sigma_k}, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Справедливы следующие асимптотические представления

$$
\begin{aligned}
&|z_k(w)-z_k(a_m)| \sim \frac{1}{\sigma_k}|a_m|^{(1/\sigma_k)-1}|w-a_m|, \qquad w\to a_m,\\
&k=1,2,\ldots,n, \qquad m=k,k+1; \qquad a_{n+1}:=a_1;\\
&|z_k(w)|\sim |w|^{1/\sigma_k}, \qquad w\to 0, \qquad w\to\infty.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Рассмотрим следующие конденсаторы:

$$C_k(t,D,A_n)=(E_0^{(k)},\overline{U}_t^{(k)},\Delta_t^{(k)},\ E_1^{(k)},E_2^{(k)}),$$

где

$$
\begin{aligned}
&E_0^{(k)}=z_k(E_0\bigcap\overline{P}_k)\bigcup\{z_k(E_0\bigcap\overline{P}_k)\}^*,\\
&U_t^{(k)}=z_k(\overline{U}_t\bigcap\overline{P}_k)\bigcup\{z_k(\overline{U}_t\bigcap\overline{P}_k)\}^*,\\
&\Delta_t^{(k)}=z_k(\Delta_t\bigcap\overline{P}_k)\bigcup\{z_k(\Delta_t\bigcap\overline{P}_k)\}^*,\\
&E_1^{(k)}=z_k(E_k(t)\bigcap\overline{P}_k)\bigcup\{z_k(E_k(t)\bigcap\overline{P}_k)\}^*,\\
&E_2^{(k)}=z_k(E_{k+1}(t)\bigcap\overline{P}_k)\bigcup\{z_k(E_{k+1}(t)\bigcap\overline{P}_k)\}^*,\\
&k=\overline{1,n}, \qquad E_{n+1}(t)=E_1(t), \qquad \{A\}^*=\{w\in\overline{\mathbb{C}}:-\overline{w}\in A\}.
\end{aligned}
$$

Каждому конденсатору $C_k(t,D,A_n)$ сопоставим класс V_k — всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G=G(z)$ таких, что $G=0$ в окрестности множества $E_0^{(k)}$, $G\big|_{\overline{U}_t^{(k)}}=\sqrt{\gamma}$, $G\big|_{\Delta_t^{(k)}}=\sqrt{\gamma}$, $G\big|_{E_p^{(k)}}=1$, $k=\overline{1,n}$, $p=1,2$. При разделяющем преобразовании конденсатору $C(t,D,A_n)$ соответствует набор конденсаторов $\{C_k(t,D,A_n)\}_{k=1}^n$, причем в силу работ [9, 10, 12, 13] справедливо неравенство

$$\operatorname{cap} C(t,D,A_n)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cap} C_k(t,D,A_n).$$

Отсюда непосредственно получаем соотношение

$$|C(t,D,A_n)|\leqslant 2\left(\sum_{l=1}^{n}|C_k(t,D,A_n)|^{-1}\right)^{-1}. \tag{6}$$

Аналогично (3) и (4), пользуясь (5), получаем (см. [12])

$$|C_k(t,D,A_n)|=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(2+2\gamma\sigma_k)}\log\frac{1}{t}+M_k(D,A_n)+o(1), \qquad t\to 0, \tag{7}$$

где

$$
\begin{aligned}
M_k(D,A_n)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(2+2\gamma\sigma_k)^2}\times&\\
\times\left[\sigma_k^2\gamma\log(r(D_0^{(k)},0)r(D_\infty^{(k)},\infty))+\log\frac{r(D_k^{(1)},a_k^{(1)})r(D_k^{(2)},a_k^{(2)})}{\dfrac{1}{\sigma_k}|a_k|^{(1/\sigma_k)-1}\dfrac{1}{\sigma_k}|a_{k+1}|^{(1/\sigma_k)-1}}\right]&,
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$z_k(a_k)=:a_k^{(1)}, \qquad z_k(a_{k+1})=:a_k^{(2)}, \qquad a_{n+1}=a_1, \qquad k=\overline{1,n},$$

где $D_0^{(k)}$, $D_\infty^{(k)}$, $D_k^{(s)}$ — объединение связных компонент множества $z_k(D \bigcap \overline{P}_k)$, содержащего точки 0, ∞, $a_k^{(s)}$ соответственно, с их симметричным отражением относительно мнимой оси, $k = \overline{1,n}$, $s = 1,2$.

Вычислим асимптотику правой части неравенства (6). Для этого согласно (7) запишем (при $t \to 0$)

$$|C_k(t,D,A_n)|^{-1} = \frac{2\pi(2+2\gamma\sigma_k)}{\log\dfrac{1}{t}} - \left(\frac{2\pi(2+2\gamma\sigma_k)}{\log\dfrac{1}{t}}\right)^2 M_k(D,A_n) + o\left(\frac{1}{\log^2\dfrac{1}{t}}\right).$$

Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|C_k(t,D,A_n)|^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{4\pi(n+2\gamma)}\log\frac{1}{t} + \frac{1}{(n+2\gamma)^2}\sum_{k=1}^{n}(1+\gamma\sigma_k)^2 M_k(D,A_n) + o(1). \quad (9)$$

Из соотношений (3), (6), (9) вытекает, что

$$M(D,A_n) \leqslant \frac{2}{(n+2\gamma)^2}\sum_{k=1}^{n}(1+\gamma\sigma_k)^2 M_k(D,A_n). \quad (10)$$

С учетом (4), (8) из (10) получаем

$$(r(D,0)r(D,\infty))^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(D,a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{1/(2\sigma_k)}\right)|a_k| \prod_{k=1}^{n}\sigma_k \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{r(D_k^{(1)},a_k^{(1)})r(D_k^{(2)},a_k^{(2)})}{(|a_k|^{1/\sigma_k}+|a_{k+1}|^{1/\sigma_k})^2}(r(D_0^{(k)},0)r(D_\infty^{(k)},\infty))^{\gamma\sigma_k^2}\right\}^{1/2}.$$

Пользуясь условиями теоремы, в свою очередь, получим

$$(r(D,0)r(D,\infty))^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(D,a_k) \leqslant$$
$$\leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n}\sigma_k \prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{r(D_k^{(1)},a_k^{(1)})r(D_k^{(2)},a_k^{(2)})}{(|a_k|^{1/\sigma_k}+|a_{k+1}|^{1/\sigma_k})^2}(r(D_0^{(k)},0)r(D_\infty^{(k)},\infty))^{\gamma\sigma_k^2}\right\}^{1/2}. \quad (11)$$

Из (11), с учетом результатов работы [14], получим

$$(r(D,0)r(D,\infty))^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(D,a_k) \leqslant (r(B_0^{(0)},0)r(B_\infty^{(0)},\infty))^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k^{(0)},a_k^{(0)}) =$$
$$= \frac{4^{n+2\gamma/n}\gamma^{2\gamma/n}}{|n^2-4\gamma|^{n/2+2\gamma/n}}\left|\frac{n-2\sqrt{\gamma}}{n+2\sqrt{\gamma}}\right|^{2\sqrt{\gamma}}.$$

В случае $\sigma_0 \geqslant 1/\sqrt{2\gamma}$ доказательство завершается с помощью метода работы [7]. Теорема доказана.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – Москва: Наука, 1975. – 336 с.
4. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
5. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. отд. Мат. ин-та АН. – 2001. – **276**. – С. 253–275.
6. *Кузьмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Там же. – 2003. – **302**. – С. 52–67.
7. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы в геометрической теории функций комплексного переменного: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 2007. – 294 с.
8. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
9. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
10. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Учеб. пособие. – Владивосток: Изд. Дальневост. ун-та, 2003. – 116 с.
11. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
12. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. отд. Мат. ин-та АН. – 1997. – **237**. – С. 56–73.
13. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1 (295). – С. 3–76.
14. *Бахтин А. К., Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 3. – С. 298–303.
15. *Бахтин А. К.* О некоторых экстремальных задачах геометрической теории функций комплексного переменного // Доп. НАН України. – 2006. – № 9. – С. 7–11.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 13.08.2007