УДК 504.052

В.В. ЯСИНСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ САМООРГАНИЗАЦИИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ключевые слова: *самоорганизация, синергетика, модель образовательной системы, негладкая функция реакции системы, нелинейное эволюционное уравнение, гарантированный уровень, управляемость, диссипация, многозначное отображение, аттрактор.*

ВВЕДЕНИЕ

Новая парадигма научных исследований привела к созданию концепции самоорганизации, наиболее адекватно описывающей неустойчивые процессы в развитии систем. Квинтэссенцией основных достижений в этой области является синергетика — наука о самоорганизующихся процессах и явлениях. Педагогическая наука, долгое время не вписывавшаяся в общую теорию систем, в настоящее время имеет первые результаты в этом направлении [1–6].

Несмотря на сложность любой образовательной системы (нелинейность, открытость, иерархичность), ключевой составляющей, определяющей ее уникальность, является человек. Как показали исследования, именно методология синергетики — наиболее эффективный инструментарий моделирования процессов самоорганизации и саморазвития различных человекомерных систем [1].

Уникальность процессов самоорганизации, протекающих в образовательных системах, проявляется уже на элементарных уровнях синергетического моделирования. Так, например, анализ иерархической модели нулевого уровня «педагог–обучаемый» приводит к выводу о том, что основа процесса обучения — память обучаемого [7]. Память является необходимым элементом обучения и удовлетворяет условиям Г. Хакена круговой причинной связи и темпоритма, предъявляемых к параметру порядка системы [8]. Наиболее адекватна для описания процесса обучения математическая модель с памятью, описываемая системой дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием [7]. Такая модель позволяет не только анализировать процедуру усвоения, запоминания информации в процессе обучения, но и изучать явление генерации новой информации обучаемым, что чрезвычайно важно в контексте фундаментализации образования, придания ему творческого характера самореализации личности. Данное обстоятельство подтверждается тезисом о том, что «… в теории познания, это … подход, который выходит из того, что человек в своих процессах восприятия и мышления не столько отражает окружающий мир, сколько творит его» [9].

Поскольку уже простейшие математические модели, предложенные для определения количественной характеристики усвоенной в процессе информации для дидактической модели «педагог–обучаемый», свидетельствуют о возникновении со временем сложных режимов поведения такой характеристики, и даже о наличии «странного» аттрактора, самообразование таких структур, как аттрактор, можно предположить при рассмотрении задач прогнозирования для образовательных систем более сложной иерархической структуры. При этом в качестве параметров, влияющих на поведение образовательной системы макроуровня, будем определять характеристики некоторым образом выбранной функции, которая задает нелинейность решаемой задачи и аккумулирует всю известную информацию о поведении субъектов системы. Естественно, что условия, налагаемые на такую функцию, должны определяться свойствами образовательной системы и быть наиболее общими с математической точки зрения. Это обусловливает необходимость рассмотрения негладких функций реакции системы, а сама эволюционная система, таким образом, требует применения аппарата многозначного операторного анализа, детально разработанного в [10–17].

Базируясь на значительном экспериментальном материале [18], можно утверждать, что ключевую особенность функционирования иерархических образовательных систем определяет механизм информационного взаимодействия (явного и неявного) между ее элементами (субъектами). Это приводит к тому, что при исследовании динамики образовательных систем в качестве основной характеристики можно выбрать некоторый «коллективный» уровень знаний [19].

Математическая модель, предложенная в [19], построена на основе системного синергетического подхода и общих принципов математического моделирования сложных иерархических систем [2, 20, 21] и состоит из трех блоков: «Преподаватели», «Студенты», «Социальное окружение», взаимодействия между которыми и составляют основу дальнейшего моделирования основного параметра исследования — уровня наблюдаемых «коллективных» знаний u. Предложенная система аксиом постулирует информационные взаимодействия между блоками модели и позволяет определить величину потока знаний μ через величину и характер реакции системы f. В результате моделирования имеем нелинейную краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u,x,t), \ x \in (0,l), \ t \in (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

всестороннее изучение которой составляет основной предмет исследования данной работы.

ЗАДАЧА О СОХРАНЕНИИ ГАРАНТИРОВАННОГО УРОВНЯ НАБЛЮДАЕМЫХ ЗНАНИЙ

Определим условия, при которых с течением времени сохраняется гарантированный уровень наблюдаемых знаний $q(t) > 0$ в задаче (1). Для этого сформулируем основные условия, которым должны удовлетворять параметры модели (1):

1) функция μ, характеризующая интенсивность потока наблюдаемых знаний, имеет лишь одно естественное ограничение — положительность и ограниченность на $(0,l)$, поэтому будем считать

$$\mu \in L^{\infty}(0,l), \quad \mu(x) \geq \mu_0 > 0 \text{ почти всюду на } (0,l); \tag{2}$$

2) в силу построения функция $f = f(u,x,t)$: $[0,+\infty) \times [0,l] \times [0,T] \mapsto (-\infty,+\infty)$, характеризующая реакцию системы, имеет непрерывный характер лишь по переменным (t,u) при фиксированном $x \in (0,l)$, т.е. удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{отображение } (t,u) \mapsto f(u,x,t) \text{ непрерывно для почти всех } x \in (0,l); \tag{3}$$

$$\text{отображение } x \mapsto f(u,x,t) \text{ измеримо для всех } (u,t) \in [0,+\infty) \times [0,T]. \tag{4}$$

Кроме того, естественно считать, что реакция системы мажорируется некоторой степенью уровня наблюдаемых знаний, не имея при этом характера монотонности, а ее знаковые условия обеспечивают диссипативность процесса. Поэтому считаем, что для всех $(u,x,t)\in[0,+\infty)\times[0,l]\times[0,T]$ выполнены оценки

$$|f(u,x,t)|\le C_1(1+|u|^{p-1}), \tag{5}$$

$$f(u,x,t)u\le -\alpha|u|^p+C_2, \tag{6}$$

где $p\ge 2$, $\alpha, C_1, C_2>0$.

Введем пространства $H:=L^2(0,l)$ с нормой $\|\cdot\|$ и $V:=H^1(0,l)$ с нормой $\|\cdot\|_V$.

При условиях (2)–(6) аналогично [16] можно доказать разрешимость задачи (1) для произвольных начальных условий $u_0\in H$ в классе $L^p(0,T;L^p(0,l))\cap$ $\cap L^2(0,T;V)\cap C([0,T];H)$. При этом единственность соответствующего решения не гарантируется, что является следствием недифференцируемого и немонотонного характера зависимости f от фазовой переменной u. Соответствующий пример приведен в [16].

Выясним, при каких условиях для наблюдаемого уровня знаний на временном интервале $[0,T]$ сохраняется некоторый гарантированный уровень $q(t)>0$, где $q(\cdot)\in C^1([0,T])$ — фиксированная функция. Для этого достаточно, чтобы уровень наблюдаемых знаний в начальный момент времени $t=0$ был не ниже показателя $q(0)$ и в каждый момент времени $t\in[0,T]$ скорость изменения уровня $q(t)$ определялась реакцией системы на этот уровень. Точнее, справедлива следующая теорема [19].

Теорема 1. Пусть для задачи (1) выполнены условия (2)–(6) и, кроме того,

$$u_0(x)\ge q(0) \text{ для почти всех } x\in(0,l), \tag{7}$$

$$f(q(t),x,t)>q'(t) \text{ для почти всех } x\in(0,l), \text{ для всех } t\in[0,T]. \tag{8}$$

Тогда существует решение $u=u(x,t)$ задачи (1), для которого

$$u(x,t)\ge q(t) \text{ для почти всех } x\in(0,l), \text{ для всех } t\in[0,T]. \tag{9}$$

Строгое неравенство (8) — достаточно жесткое условие, однако именно оно обеспечивает утверждение теоремы, поскольку, и это важно в рамках рассматриваемой модели, не требуем никакой регулярности функции реакции системы $f(u,x,t)$ равномерно по переменной x.

Это условие можно ослабить, что весьма существенно при изучении предельных режимов, допустив дополнительное условие на структуру функции $f(u,x,t)$. А именно, в силу построения модели реакцию системы формируют реакции студентов и окружения на существующее распределение уровня наблюдаемых знаний $u(x,t)$. Очевидно, что некоторые механизмы, порождающие эти величины, имеют одинаковую природу (как для студентов, так и для окружения) и, таким образом, одинаковую интенсивность влияния на каждого студента. Тогда они формируют функцию $\widetilde{f}(u,x,t)$, удовлетворяющую условию равномерной непрерывности

$$\forall\, \varepsilon>0\,\exists\, \delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \forall\, t,s,u,v,\ |t-s|+|u-v|<\delta$$
$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(0,l)} |f(u,x,t)-f(v,x,s)|<\varepsilon. \tag{10}$$

При этом каждый студент (и его окружение) имеет свою индивидуальную мотивацию (например, планы на будущее, финансовая стабильность и т.д.), причем этот набор параметров не зависит от уровня наблюдаемых знаний и формирует функцию $h(t,x)$, которая не имеет непрерывного характера. Тогда функция реакции системы имеет вид

$$f(u,x,t)=\widetilde{f}(u,x,t)+h(t,x).$$

В этой ситуации получаем задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}) + f(u,x,t) + h(t,x),\ x \in (0,l),\ t \in (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), \end{cases} \tag{11}$$

для которой справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть для задачи (11) для функции $f(u,x,t)$ выполнены условия (2)–(6), $h \in L^2(0,T;L^2(0,l))$, $u_0(x) \geq q(0)$ и выполняется неравенство

$$f(q(t),x,t) + h(t,x) \geq q'(t) \text{ для почти всех } x \in (0,l), \text{ для всех } t \in [0,T]. \tag{12}$$

Кроме того, пусть функция $(t,u) \mapsto f(u,x,t)$ равномерно непрерывна по $x \in (0,l)$, т.е. выполняется неравенство (10). Тогда существует решение $u = u(x,t)$ задачи (11), $u(0,x) = u_0(x)$, для которого

$$u(x,t) \geq q(t) \text{ для почти всех } x \in (0,l), \text{ для всех } t \in [0,T]. \tag{13}$$

ЗАДАЧА СТРУКТУРНОЙ ДИССИПАЦИИ НАБЛЮДАЕМОГО УРОВНЯ ЗНАНИЙ

Одна из основных задач, возникающих при исследовании эволюционных диссипативных нелинейных задач, состоит в выяснении асимптотического поведения решений в фазовом пространстве. Известно, что даже достаточно простые нелинейные конечномерные системы обыкновенных дифференциальных уравнений могут проявлять сложное (хаотическое) поведение, которое принято связывать с наличием в фазовом пространстве системы структурно сложного притягивающего множества — «странного» аттрактора. Согласно синергетическому подходу [2] наличие такого множества в системе, описывающей количественную характеристику усвоенной в процессе обучения информации, может трактоваться как появление (самообразование) в системе качественно новой информации за счет внутренней самоорганизации системы. Аналогичные, однако намного более сложные эффекты самообразования структурно сложных подмножеств фазового пространства можно наблюдать в нелинейных эволюционных уравнениях в частных производных, имеющих свойство диссипации энергии. С этой точки зрения наибольший интерес представляет исследование глобальных аттракторов, классическая теория которых изложена в [22]. Однако многочисленные задачи негладкой оптимизации распределенными системами, исследование которых началось в работах В.С. Мельника [14], а позднее в работах М.З. Згуровского, В.С. Мельника [11,12,17, 23] нашло продолжение в глубоком системном исследовании нелинейных процессов и полей, показали недостаточность классического подхода теории аттракторов при изучении сложных нелинейных явлений, математические модели которых приводят к некорректным эволюционным задачам. Поэтому в [24, 25] были заложены основы теории глобальных аттракторов бесконечномерных систем без единственности решений, современные аспекты которой изложены в [16]. Для неавтономных динамических процессов без единственности соответствующие конструкции приведены в [26]. Именно этот комплекс результатов позволяет выделить те дополнительные параметры функции реакции системы, которые корректно вкладываются в условия исходной задачи моделирования и позволяют получить математические результаты о существовании и свойствах глобального аттрактора в задаче (11) в естественном фазовом пространстве

$$X = H^+ = \{u \in L^2(0,l) \mid u(x) \geq 0 \text{ почти всюду}\}.$$

В дальнейшем $P(X)$ — совокупность всех непустых подмножеств X, $\beta(X)$ — совокупность всех непустых ограниченных подмножеств X, $C(X)$ — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств X, $K(X)$ — совокупность всех непустых компактных подмножеств X, Σ — некоторое множество параметров, отвечающих за неавтономность задачи, $R_{+d}=\{(t,\tau)\in R_+^2 \mid t\ge\tau\}$.

Следующие конструкции и результаты представляют собой адаптацию на случай полупроцессов (динамика которых определена лишь на R_+) результатов, полученных в [26] для динамических процессов (динамика которых определена на всей прямой).

Определение 1. Отображение $U\colon R_{+d}\times X \mapsto P(X)$ назовем многозначным полупроцессом (МНП) на X, если:

1) $U(\tau,\tau,x)=x \ \ \forall\, x\in X, \ \forall\,\tau\ge 0$;

2) $U(t,\tau,x)\subseteq U(t,s,U(s,\tau,x)) \ \ \forall\,(t,s),(s,\tau)\in R_{+d}, \ \ \forall\, x\in X$, где для $A\subset X$ $U(t,s,A)=\bigcup\limits_{x\in A} U(t,s,x)$.

МНП будем называть строгим, если

$$U(t,\tau,x)=U(t,s,U(s,\tau,x)) \ \ \forall\,(t,s),(s,\tau)\in R_{+d}, \forall\, x\in X.$$

Заметим, что если справедливо равенство

$$U(t+r,\tau+r,x)=U(t,\tau,x)) \ \forall\,(t,\tau)\in R_{+d}, r\ge 0, \ \forall\, x\in X,$$

то за динамику системы в силу равенства $U(t,\tau,x)=U(t-s,0,x)$ отвечает многозначное отображение $G\colon R_+\times X \mapsto P(X)$, которое задается формулой $G(t,x):=U(t,0,x)$.

При этом выполнены условия:

1) $G(0,x)=U(0,0,x)=x \ \forall\, x\in X$;

2) $G(t+s,x)=U(t+s,0,x)\subset U(t+s,s,U(s,0,x))=U(t,0,U(s,0,x))=G(t,G(s,x))$ $\forall\, t,s\ge 0, \forall\, x\in X$, т.е. отображение G генерирует многозначный полупоток [16, 24, 25].

Рассмотрим семейство МНП $\{U_\sigma \mid \sigma\in\Sigma\}$, где Σ — некоторое множество, и определим отображение $U_\Sigma\colon R_{+d}\times X \mapsto P(X)$ следующим образом:

$$U_\Sigma(t,\tau,x)=\bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t,\tau,x).$$

Для $B\subset X$ и $(s,\tau)\in R_{+d}$ определим множества

$$\gamma^\tau_{s,\sigma}(B)=\bigcup_{t\ge s} U_\sigma(t,\tau,B), \gamma^\tau_{s,\Sigma}(B)=\bigcup_{t\ge s} U_\Sigma(t,\tau,B),$$

$$\omega_\Sigma(\tau,B)=\bigcap_{s\ge\tau} \mathrm{cl}_X\,(\gamma^\tau_{s,\Sigma}(B)),$$

с помощью которых определяются как структурные, так и топологические свойства траекторий при $t\to\infty$. Заметим, что поскольку $\gamma^\tau_{s,\Sigma}(B)\subset\gamma^\tau_{s',\Sigma}(B)$ при $s\ge s'$, то $\forall\, p\ge\tau$ $\omega_\Sigma(\tau,B)=\bigcap\limits_{s\ge p} \mathrm{cl}_X\,(\gamma^\tau_{s,\Sigma}(B))$ и для произвольных $0\le\tau_1\le\tau_2\le s$ имеем $\gamma^{\tau_1}_{s,\Sigma}(B)\subset\gamma^{\tau_2}_{s,\Sigma}(\gamma^{\tau_1}_{\tau_2,\Sigma}(B))$.

Аналогично [26] можно показать, что если семейство МНП $\{U_\sigma \mid \sigma\in\Sigma\}$ удовлетворяет условию равномерной асимптотической компактности: для произвольных $\tau\in R_+$ и $B\in\beta(X)$ существует множество $A(\tau,B)\in K(X)$ такое, что

$$\mathrm{dist}(U_\Sigma(t,\tau,B),A(\tau,B))\to 0, \quad t\to+\infty, \tag{14}$$

то

$$\omega_\Sigma(\tau,B)\neq\varnothing,\ \omega_\Sigma(\tau,B)\subset A(\tau,B),\ \omega_\Sigma(\tau,B)\in K(X),$$

$$\operatorname{dist}(U_\Sigma(t,\tau,B),\ \omega_\Sigma(\tau,B))\to 0,\ t\to+\infty, \tag{15}$$

и $\omega_\Sigma(\tau,B)$ — минимальное замкнутое множество, удовлетворяющее граничному соотношению (15).

Следующий результат об эквивалентности условия равномерной асимптотической компактности и условия Ладыженской, хорошо известный в классической теории аттракторов бесконечномерных динамических систем, справедлив не только в метрических пространствах, но и в произвольных регулярных топологических пространствах [16].

Лемма 1. Если семейство МНП $\{U_\sigma\,|\,\sigma\in\Sigma\}$ удовлетворяет условию равномерной асимптотической компактности, то произвольная последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n\in U_\Sigma(t_n,\tau,B)$, $t_n\to+\infty$, является предкомпактной в X.

Если для произвольных $B\in\beta(X)$, $\tau\geq 0$ существует $T=T(B,\tau)\geq\tau$ такое, что $\gamma^\tau_{T,\Sigma}\in\beta(X)$, то справедливо и обратное утверждение.

Определение 2. Множество $A\subset X$ называется равномерно притягивающим для семейства МНП $\{U_\sigma\,|\,\sigma\in\Sigma\}$, если $\forall\,\varepsilon>0$, $\tau\geq 0$ и $B\in\beta(X)$ существует $T=T(\tau,\varepsilon,B)$ такое, что $U_\Sigma(t,\tau,B)\subset O_\varepsilon(A)$ $\forall\ t\geq T$, т.е.

$$\operatorname{dist}(U_\Sigma(t,\tau,B),A)\to 0,\to+\infty. \tag{16}$$

Определение 3. Множество $\Theta_\Sigma\subset X$ называется равномерным глобальным аттрактором семейства МНП $\{U_\sigma\,|\,\sigma\in\Sigma\}$, если Θ_Σ — минимальное множество в классе замкнутых равномерно притягивающих множеств.

Множество $A\subset X$ называется полуинвариантным (инвариантным) относительно семейства МНП $\{U_\sigma\,|\,\sigma\in\Sigma\}$, если $\forall t\geq 0$

$$A\subset U_\Sigma(t,0,A)\quad (A=U_\Sigma(t,0,A)).$$

Следующая теорема является основой для изучения предельного поведения траекторий, поскольку при наиболее общих условиях на семейство МНП $\{U_\sigma\,|\,\sigma\in\Sigma\}$ и отображение $X\ni(u,\sigma)\in U_\sigma(t,\tau,u)\subset X$ гарантирует существование и структурные свойства нетривиального глобального аттрактора.

Теорема 3. Пусть семейство МНП $\{U_\sigma\ |\,\sigma\in\Sigma\}$ равномерно асимптотически компактно и удовлетворяет следующему условию: на Σ определено семейство отображений $\{T(h)\colon\Sigma\mapsto P(\Sigma)\}_{h\geq 0}$, генерирующих многозначный полупоток, действие которого связано с действием семейства МНП $\{U_\sigma\ |\,\sigma\in\Sigma\}$ следующим образом:

$$\forall\ (t,\tau)\in R_{+d},\, h\geq 0, x\in X,\ \sigma\in\Sigma$$

$$U_\sigma(t+h,\tau+h,x)\subseteq U_{T(h)\sigma}(t,\tau,x). \tag{17}$$

Тогда существует равномерный глобальный аттрактор $\Theta_\Sigma\neq X$, имеющий структуру

$$\Theta_\Sigma=\bigcup_{\tau\geq 0}\Theta_\Sigma(\tau)=\Theta_\Sigma(0), \tag{18}$$

где

$$\Theta_\Sigma(\tau)=\bigcup_{B\in\beta(X)}\omega_\Sigma(\tau,B).$$

Далее приведены наиболее общие свойства на отображение $X\ni(u,\sigma)\in$ $\in U_\sigma(t,\tau,u)\subset X$, которые позволяют получать дополнительные метрические и топологические характеристики глобального аттрактора. А именно, пусть семейство МНП $\{U_\sigma\,|\,\sigma\in\Sigma\}$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда:

1) если выполнено условие равномерной диссипативности

$$\exists\, B_0 \in \beta(X) \quad \forall B \in \beta(X)(U_\Sigma(t,0,B),B_0) \to 0,\ t \to \infty, \tag{19}$$

то Θ_Σ — компакт в X;

2) если многозначный полупоток $\{T(h)\colon \Sigma \mapsto P(\Sigma)\}_{h\ge 0}$ из условия (17) равномерно асимптотически полукомпактен, т.е. произвольная последовательность $\{\sigma_n\}$, $\sigma_n \in T(h_n)\Sigma$, $h_n \to \infty$, предкомпактна в Σ (в частности, если Σ — компакт), и $\forall t \ge 0$ если $\xi_n \in U_{T(t_n)\Sigma}(t,0,\eta_n)$, где $t_n \to \infty$, $\xi_n \to \xi$, $\eta_n \to \eta$, то $\xi \in U_\Sigma(t,0,\eta)$ (в частности, если отображение $X \times \Sigma \ni (x,\sigma) \mapsto U_\sigma(t,0,x)$ имеет замкнутый график), то глобальный аттрактор Θ_Σ полуинвариантен;

3) если выполнены условия п. 2) и, кроме того, семейство МНП $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ удовлетворяет условию строгости, в (17) выполнено равенство и $\forall\, h \ge 0$ $T(h)\Sigma = \Sigma$, то глобальный аттрактор Θ_Σ инвариантен;

4) если (X,ρ) — метрическое пространство, в котором каждый шар связен, семейство МНП $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ удовлетворяет условию равномерной диссипативности (19), Σ — связное метрическое пространство, многозначный полупоток $\{T(h)\colon \Sigma \mapsto P(\Sigma)\}_{h\ge 0}$ равномерно асимптотически полукомпактен и $\forall\, t \ge 0$ отображение $X \times \Sigma \ni (x,\sigma) \mapsto U_\sigma(t,0,x) \in C(X)$ полунепрерывно сверху и связнозначно, то аттрактор Θ_Σ — связное множество.

Отдельно следует обратить внимание на свойство структурной устойчивости для предельного поведения траекторий, которое в терминах глобальных аттракторов определяется по аналогии с [16] следующим образом.

Определение 4. Пусть Θ_Σ — компактный, инвариантный глобальный аттрактор семейства МНП $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$. Будем полагать, что Θ_Σ устойчив, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall\, (t,\tau) \in R_{+d}\ \ U_\Sigma(t,\tau,O_\delta(\Theta_\Sigma)) \subset O_\varepsilon(\Theta_\Sigma).$$

Заметим, что если семейство МНП $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ удовлетворяет условию строгости, в (17) выполнено равенство и $\forall\, h \ge 0$ $T(h)\Sigma = \Sigma$, то определение устойчивости эквивалентно следующему:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall\, t \ge 0\ \ U_\Sigma(t,0,O_\delta(\Theta_\Sigma)) \subset O_\varepsilon(\Theta_\Sigma).$$

Лемма 2. Пусть Θ_Σ — компактный, инвариантный глобальный аттрактор семейства МНП $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$, выполнено условие (17) и следующее условие:

$$\text{если}\ \ y_n \in U_\Sigma(t_n,0,x_n),\ t_n \to t_0,\ x_n \to x_0,$$

$$\text{то по подпоследовательности}\ \ y_n \to y_0 \in U_\Sigma(t_0,0,x_0). \tag{20}$$

Тогда глобальный аттрактор Θ_Σ устойчив.

Перейдем к построению семейства МНП на решениях задачи (11).

Класс решений $u = u(x,t)$ задачи (11), для которых

$$u(x,t) \ge q(t)\ \text{для почти всех}\ x \in (0,l),\ \text{для всех}\ t \in [\tau,T],$$

обозначим $W_\tau^T(q)$. Тогда при условиях теоремы 2 имеем, что для произвольных $\tau \ge 0$, $u_\tau \in L^2(0,l)$, $u_\tau(x) \ge q(\tau)$ почти всюду задача (11) для произвольного $T > \tau$ имеет по крайней мере одно решение в классе $W_\tau^T(q)$ такое, что $u(\tau) = u_\tau$. Каждое такое решение может быть продолжено на $(\tau,+\infty)$, т.е. задача (11) имеет по крайней мере одно решение в классе $W_\tau(q)$ в том смысле, что существует функция

$$u \in W_\tau := L^2_{\text{loc}}(\tau,+\infty;H^1(0,l)) \cap L^p_{\text{loc}}(\tau,+\infty;L_p(0,l)) \cap C([\tau,+\infty);L^2(0,l)),$$

которая является решением (11) на (τ,T) для произвольного $T > \tau$ и для которой справедливо неравенство

$$u(x,t) \geq q(t) \text{ для почти всех } x \in (0,l), \text{ для всех } t \geq \tau.$$

Рассмотрим наиболее общие условия на функции f и h, при которых на решениях (11) из класса $W_\tau(q)$ удается построить неавтономный аналог динамической системы.

Для этого будем использовать понятие трансляционной компактности [8] как наиболее общее условие на неавтономные возмущения, которое позволяет при переходе к семейству задач, порожденных полугруппой трансляций (сдвигов), получать метрический компакт с нужными геометрическими свойствами. При этом существенно, что дополнительные условия на входные данные задачи, которые обеспечивают трансляционную компактность, в случае рассматриваемой задачи весьма близки к общим условиям глобальной разрешимости и естественно вкладываются в рамки модели.

Рассмотрим пространство $M = C(-\infty, +\infty; L^\infty(0,l))$ с топологией равномерной сходимости на компактах.

Будем считать, что функция f удовлетворяет условию

$$f \text{ трансляционно компактна в } C([0,+\infty); M), \tag{21}$$

т.е. множество

$$H(f) = \mathrm{cl}_{C([0,+\infty);M)} \{f(t+\cdot) \mid t \geq 0\}$$

является компактом в $C([0,+\infty); M)$.

Общие условия выполнения (21) дает следующая лемма.

Лемма 3. Пусть функция $f = f(u,x,t)$ удовлетворяет условиям (3)–(6), (10). Тогда условие (21) имеет место, если

$$\forall R > 0, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \{\Omega_i\}_{i=1}^m, \ (0,l) = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i \ \ \forall (t,r) \in Q(R), \ \forall i = \overline{1,m}$$

$$\inf\{c \geq 0 \mid \exists \Phi, |\Phi| = 0, \forall x_1, x_2 \in \Omega_i \setminus \Phi \ \ |f(t,x_1,r) - f(t,x_2,r)| \leq c\} < \varepsilon. \tag{22}$$

Заметим, что условие (22) естественно вкладывается в рамки рассматриваемой модели. Оно означает, что множество студентов может быть разбито на конечное число групп, в пределах каждой из которых реакция системы в один и тот же момент времени t на один и тот же наблюдаемый уровень знаний r фактически одинакова. Причем данные группы формируются на основании определенного количества общих черт, определяемых такими параметрами, как одинаковое базовое образование, социальный и финансовый статус и т.д. Поэтому такие множества Ω_i могут располагаться произвольным образом на интервале $(0,l)$, что иллюстрирует условие (22).

Относительно функции h будем считать, что

$$h \text{ трансляционно компактна в } L^{2,w}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty); L^2(0,l)), \tag{23}$$

т.е. компактно множество

$$H(h) = \mathrm{cl}_{L^{2,w}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);L^2(0,l))} \{h(t+\cdot) \mid \geq 0\}.$$

Здесь пространство $L^{2,w}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty); L^2(0,l))$ — это пространство $L^2_{\mathrm{loc}}([0,+\infty); L^2(0,l))$ с топологией локальной слабой сходимости. Из [8] следует, что условие (23) эквивалентно следующему:

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|h(s)\|^2 \, ds < \infty. \tag{24}$$

Условие (24) для рассматриваемой модели означает, что на единичном временном интервале суммарное влияние тех компонентов реакции системы, которые не зависят от наблюдаемого уровня знаний, является равномерно ограниченным.

Относительно функции $q(\cdot)$ пусть выполнено условие

$$
\begin{gathered}
q(\cdot), q'(\cdot) \text{ ограничены и равномерно непрерывны на } [0,+\infty), \text{ т.е.}\\
\exists\, Q>0 \ \ \forall\, t \ge 0 \ \ |q(t)|+|q'(t)| \le Q,\\
\forall\, \varepsilon>0 \,\exists\, \delta>0, \ \forall\, t,s \ge 0, \ |t-s|<\delta \ |q'(t)-q'(s)|<\varepsilon.
\end{gathered} \tag{25}
$$

С точки зрения модели условия (25) фактически не сужают класс функций $q(\cdot)$, фигурирующий в теореме 2. Однако они обеспечивают трансляционную компактность функции $q(\cdot)$, точнее, множество

$$H(q)=\mathrm{cl}_{C([0,+\infty))}\{q(t+\cdot)\mid t\ge 0\}$$

является компактом в $C([0,+\infty))$.

При выполнении условий (21), (23), (25) рассмотрим компактное трансляционно инвариантное множество $H(f,h,q)$.

Для произвольного $\sigma=(f_\sigma, h_\sigma, q_\sigma)\in\Sigma$ рассмотрим следующий вариант задачи (11):

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f_\sigma(u,x,t)+h_\sigma(t,x), \ x\in(0,l), \ t>\tau,\\[2mm]
\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0,
\end{cases}
$$

относительно которой можно показать, что для произвольных $\sigma\in\Sigma$ и произвольных $\tau\ge 0$, $u_\tau(x)\ge q_\sigma(\tau)$ существует решение $u=u(x,t)$ задачи (11), для которого

$$u(x,t)\ge q_\sigma(t) \text{ для почти всех } x\in(0,l), \text{ для всех } t\ge\tau.$$

Тогда в классе

$$H^+=\{\xi\in L^2(0,l)\mid \xi(x)\ge 0 \text{ для почти всех } x\in(0,l)\}$$

можно корректно определить семейство отображений $\{U_\sigma : R_{+d}\times H^+ \mapsto P(H^+)\}_{\sigma\in\Sigma}$:

$$
\begin{gathered}
U_\sigma(t,\tau,u_\tau)=\{u(t)-q_\sigma(t)\mid u(\cdot)\in W_\tau(q_\sigma) \text{ — решение (11)},\\
u(\tau)-q_\sigma(\tau)=u_\tau\}.
\end{gathered} \tag{26}
$$

Основным результатом анализа качественного поведения решений задачи (11) является следующая теорема о существовании глобального аттрактора.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, выполнены условия (21), (23), (25). Тогда семейство отображений $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, определенное формулой (26), генерирует семейство МНП, для которого в фазовом пространстве H^+ существует компактный, полуинвариантный, связный глобальный аттрактор $\Theta_\Sigma\subset H^+$.

Если, кроме того, функции f, h, q такие, что справедливо равенство

$$\forall\, h\ge 0 \quad T(h)\Sigma=\Sigma, \tag{27}$$

то глобальный аттрактор Θ_Σ является инвариантным и устойчивым подмножеством фазового пространства H^+.

Условие (27) имеет место, если, например, функции f, h, q по временной переменной имеют периодический характер.

Следующий результат дает ответ на вопрос об устойчивости рассматриваемой модели относительно малых возмущений входных данных.

Пусть Λ — метрическое пространство параметров возмущения, $\lambda_0 \in \Lambda$ — неизолированная точка. Рассматриваются задачи (11) с функциями $f(u,x,t,\lambda)$, $h(t,x,\lambda)$, $q(t,\lambda)$, удовлетворяющими следующим условиям:

1) выполнены условия теоремы 2 с константами, не зависящими от $\lambda \in \Lambda$, и

$$\exists K>0 \ \ \forall\, \lambda \in \Lambda \ \sup_{t \in R_+} \int_t^{t+1} ||h(s,\lambda)||^2 \, ds \le K;$$

2) для всех $t \ge 0$, для почти всех $x \in (0,l)$ и для всех $\lambda \in \Lambda$

$$f(q(t,\lambda),x,t,\lambda)+h(t,x,\lambda) \ge q'(t,\lambda); \tag{28}$$

3) для всех $\lambda \in \Lambda$ функция $(t,u) \mapsto f(u,x,t,\lambda)$ равномерно непрерывна по $x \in (0,l)$ в смысле (10);

4) $\forall\, \lambda \in \Lambda$ функции $f(\cdot,\cdot,\lambda)$, $h(\cdot,\cdot,\lambda)$, $q(\cdot,\lambda)$ трансляционно компактны в соответствующих пространствах, т.е. удовлетворяют условиям (21), (23), (25);

5) для произвольных $R>0, \eta \in L^2_{\mathrm{loc}}(R_+; L^2(0,l))$

$$\sup_{t \in R_+} \sup_{|v| \le R} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in (0,l)} |f(v,x,t,\lambda) - f(v,x,t,\lambda_0)| \to 0, \lambda \to \lambda_0,$$

$$\sup_{t \in R_+} \int_t^{t+1} (h(t,x,\lambda)-h(t,x,\lambda_0),\, \eta(t,x))dt \to 0, \lambda \to \lambda_0,$$

$$\sup_{t \in R_+} |q(t,\lambda)-q(t,\lambda_0)| \to 0,\ \lambda \to \lambda_0.$$

При выполнении условий 1)–5) $\forall\, \lambda \in \Lambda$ множество $H(f(\lambda),h(\lambda),q(\lambda))$ является трансляционно инвариантным компактом и семейство отображений $\{U_\sigma\colon\ R_{+d} \times H^+ \mapsto P(H^+)\}_{\sigma \in \Sigma(\lambda)}$, построенных согласно формуле (26), для каждого $\lambda \in \Lambda$ удовлетворяет условиям теоремы 3, т.е. является семейством МНП, для которого существует компактный полуинвариантный связный глобальный аттрактор $\Theta_{\Sigma(\lambda)} \subset H^+$, для которого верно следующее граничное равенство при $\lambda \to \lambda_0$:

$$\operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(\lambda)}, \Theta_{\Sigma(\lambda_0)}) \to 0,\ \lambda \to \lambda_0. \tag{29}$$

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ НАКОПЛЕНИЯ ЗНАНИЙ

Важным свойством моделируемой системы является ее управляемость. Точнее, в реальной образовательной системе всегда присутствует управляющий орган, который тем или иным способом осуществляет функции внешнего управления системой с тем, чтобы обеспечить оптимальный в некотором смысле средний уровень наблюдаемых знаний. Внешнее воздействие (управление) осуществляется путем изменений и уточнений учебных программ, внедрением новых средств и методов преподавания, а также новых систем и форм оценивания знаний.

Таким образом, скорость изменения величины наблюдаемых знаний при данном подходе определяется не только потоками знаний и реакцией системы, но и управляющими параметрами системы.

Кроме того, очевидно, что величину реакции системы определить точно чрезвычайно сложно. Однако вполне реально найти границы, в которых она находится. Эти границы определяют некоторое многозначное отображение

$$f(u,x,t)=[\kappa(u,x,t),\theta(u,x,t)],$$

что приводит к новому математическому объекту — дифференциальному включению. Следует отметить, что математические методы исследования включений как в конечномерных, так и в произвольных нормируемых пространствах имеют ряд принципиальных отличий от уравнений, связанных, в первую очередь, с тем, что многозначная правая часть $f(u,x,t)$ может не иметь непрерывных селекторов. Однако современные системные исследования в области управления системами с распределенными параметрами, в частности работы М.З. Згуровского, В.С. Мельника [10, 11, 12, 17], предоставляют математический аппарат, позволяющий в рамках единого операторного подхода рассматривать задачи оптимизации сложных нелинейных процессов, которые описываются вариационными неравенствами и нелинейными уравнениями в частных производных с многозначными членами — дифференциальными включениями. В указанных монографиях впервые приводится систематическое исследование оптимизационных задач для смешанных систем, т.е. описываемых разнотипными математическими моделями (с распределенными и сосредоточенными параметрами, дифференциальными и интегральными уравнениями), а также делается ударение на том, что одной из центральных задач системного анализа является проблема замены точной модели процесса более простой аппроксимативной моделью.

В контексте системных исследований в рамках рассматриваемой модели ставится задача о нахождении формулы приближенного синтеза (оптимального управления в форме обратной связи) для задачи (11) в случае, когда известны лишь границы функции реакции системы.

Для разрешимости такой задачи будем накладывать дополнительно структурное условие

$$f(u,x,t):=\varepsilon F(u,t)+h(x),$$

где $\varepsilon>0$ — малый параметр, $F(u,t)=[\kappa(u,t),\theta(u,t)]$.

Рассматриваем задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}\in\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+F(u,t)+h(x)+g(x)\upsilon(t),\ x\in(0,l),\ t\in(0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0, \\ u\Big|_{t=0}=u_0(x), \end{cases} \tag{30}$$

где $g(x)\in L^2(0,l)$ — заданная функция, $\upsilon(t)$ — управляющий параметр. При этом считаем, что управление

$$\upsilon(\cdot)\in U\subset L_2(0,T)\ \text{замкнута, выпукла} \tag{31}$$

должно разрешать следующую задачу:

$$J(u,\upsilon)\to\inf. \tag{32}$$

Пусть доказана разрешимость задачи (30)–(32), $\{\hat{u}_\varepsilon,\hat{\upsilon}_\varepsilon\}$ — оптимальный процесс в этой задаче, $\hat{J}_\varepsilon=J(\hat{u}_\varepsilon,\hat{\upsilon}_\varepsilon)$ — ее значение.

Пусть при $\varepsilon=0$ задача (30)–(32) допускает синтез $\hat{\upsilon}=\upsilon[t,\hat{u}]$, на котором реализуется значение $\hat{J}_0$ этой задачи.

Основной целью является доказательство того, что формула $\upsilon[t,u]$ дает приближенный синтез исходной задачи (30)–(32) при малых $\varepsilon>0$, т.е. что при таких

$\varepsilon > 0$ задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} \in \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + F(u,t) + h(x) + g(x)v[t,u], \; x \in (0,l), \; t \in (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \tag{33}$$

разрешима и для ее произвольного решения u_ε справедливо предельное равенство

$$J(u_\varepsilon, v[t,u_\varepsilon]) - \hat{J}_\varepsilon \to 0, \varepsilon \to 0. \tag{34}$$

Теорема 5. Пусть функция μ удовлетворяет условию (2), функция $F(u,t) = [\kappa(u,t), \theta(u,t)]$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall\, t \ge 0$ функция $\kappa(\cdot, t)$ полунепрерывна снизу;

2) функция $\theta(\cdot, t)$ полунепрерывна сверху;

3) $\exists\, C_1, C_2 \ge 0$ $|\kappa(u,t)| + |\theta(u,t)| \le C_1 + C_2 |u|$;

4) $\exists\, D_1, D_2 \ge 0$ $|\kappa(u,t) - \kappa(u,s)| + |\theta(u,t) - \theta(u,s)| \le (D_1 + D_2 |u|)\gamma(|t-s|)$, где $\gamma(\cdot)$ — непрерывная функция такая, что $\gamma(t) \to 0$, $t \to 0+$;

5) функционал J полунепрерывен снизу на $C([0,T]; L^2(0,l)) \times L^2_w(0,T)$;

6) функционал J непрерывен на $C([0,T]; L^2(0,l)) \times L^2(0,T)$;

7) $\exists\, \gamma > 0$, $\exists\, C_3 \ge 0$ $\forall\, u \in C([0,T]; L^2(0,l))$, $\forall\, v \in U$

$$J(u,v) \ge -C_3 + \gamma \int_0^T |v(t)|^2 \, dt;$$

8) задача (30)–(32) при $\varepsilon = 0$ имеет единственное решение $\{\hat{u}, \hat{v}\}$, причем $\hat{v}$ имеет форму обратной связи $\hat{v} = v[t, \hat{u}]$, где функция $v : [0,T] \times L^2(0,l) \mapsto R$ имеет свойства:

- $\forall\, u \in L^2(0,l)$ $v[\cdot, u]$ измерима;
- $\forall\, t \in [0,T]$ $v[t, \cdot]$ непрерывна;
- $\exists\, \alpha(\,.\,), \beta(\,.\,) \in L^2(0,T)$ $\forall\, u \in L^2(0,l)$, $\forall\, t \in [0,T]$ $|v[t,u]| \le \alpha(t) + \beta(t)||u||$.

Тогда формула $v[t,u]$ реализует приближенный синтез задачи (30)–(32), т.е. на решениях задачи (33) справедливо граничное равенство (34).

Если исходить из того, что параметр управления ограничен в каждый момент времени, а при формировании критерия качества основной задачей является обеспечение минимального отклонения от некоторого эталонного уровня знаний z, то приходим к следующим параметрам задачи (30)–(32):

$$v(\cdot) \in U = \{v \in L_2(0,T) : |v(t)| \le \xi \quad \text{почти всюду на } [0;T]\},$$

$$J(u,v) = \left(\int_0^l q(x)(u(x,T) - z(x))\,dx\right)^2 + \gamma \int_0^T v^2(t)\,dt \to \inf,$$

где $q, z \in L^2(0,l)$.

В этом случае при $\varepsilon = 0$ задача (30)–(32) редуцируется к одномерной задаче относительно переменной $a(t) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i e^{\lambda_i^2 (t-T)} u_i(t)$, где $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ — собственные числа соответствующей спектральной задачи, u_i — коэффициенты Фурье решения $u(x,t)$ по собственным функциям $\{X_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ этой задачи. Тогда при условии, что функция $b(t)=\sum_{i=0}^{\infty} q_i g_i e^{\lambda_i^2(t-T)}$ является положительной и монотонно возрастающей на $[0,T]$, методом динамического программирования Беллмана можно показать, что формула

$$v[t,u]=\begin{cases} -\dfrac{(R(t),u(t))-\beta+\int\limits_t^T p(s)\,ds+\xi\int\limits_\tau^T b(s)\,ds}{\gamma+\int\limits_t^\tau (b(s))^2\,ds}\,b(t),\ t\in[0,\tau], \\ \xi,\ \ t\in[\tau,T], \end{cases} \tag{35}$$

где $R(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty} q_i X_i(x)e^{\lambda_i^2(t-T)}$, $\beta=\sum_{i=0}^{\infty} q_i z_i$, $p(t)=\sum_{i=0}^{\infty} q_i h_i e^{\lambda_i^2(t-T)}$, а $\tau\in[0,T]$ — единственное решение уравнения

$$\frac{(R(t),u(t))-\beta+\int\limits_t^T p(s)ds+\xi\int\limits_\tau^T b(s)ds}{\gamma+\int\limits_t^\tau (b(s))^2\,ds}\,b(\tau)=-\xi,$$

определяет синтез задачи (30)–(32) при $\varepsilon=0$. Легко видеть, что формула (35) удовлетворяет условиям теоремы и, таким образом, реализует приближенный синтез.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена математическая модель сложной образовательной макросистемы, построенной на основе системного синергетического подхода и общих принципов математического моделирования сложных иерархических систем. Модель состоит из трех компонентов, информационное взаимодействие между которыми постулируется системой аксиом и составляет основу моделирования основного параметра исследования — уровня наблюдаемых «коллективных» знаний.

Исследована проблема сохранения гарантированного уровня наблюдаемых знаний. На основании синергетического подхода выделены параметры функции реакции системы, которые позволяют доказать существование в фазовом пространстве системы глобального аттрактора и исследовать его метрические и топологические свойства, что подтверждает наличие некоторой самоорганизации в рассмотренной модели, а также устойчивость самоорганизованных структур.

Решена задача приближенного оптимального синтеза при условиях неполной информации о функции реакции системы. Точнее, для исходной задачи с многозначной функцией реакции системы решена задача приближенного синтезированного оптимального управления для определенного класса функционалов качества.

Проведенные исследования показывают, что синергетическая методология позволяет разрабатывать различные модели сложных образовательных макросистем и генерировать на основе их анализа конкретные рекомендации в сфере управления, политики высшего образования, дидактики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 288 с.

2. Синергетическая парадигма. Синергетика образования. — М.: Прогресс–Традиция, 2007. — 592 с.
3. Малинецкий Г.Г. Математическое моделирование образовательных систем // Синергетическая парадигма. Синергетика образования. — М.: Прогресс–Традиция, 2007. — С. 328–345.
4. Ясінський В.В. Системне моделювання процесів накопичення і дисипації знань // Систем. дослідж. та інформ. технології. — 2007. — № 3. — С. 111–121.
5. Ясінський В.В. Фрактальні «портрети» структур колективних залишкових знань // Там же. — 2009. — № 3. — С. 112–116.
6. Ясінський В.В. Циклічне самовідновлення системи знань людини за умов їх пасивної дисипації // Там же. — 2008. — № 2. — С. 110–114.
7. Солодова Е.А. Концепция модернизации высшего образования России на основе синергетического моделирования // Синергетическая парадигма. Синергетика образования. — М.: Прогресс–Традиция, 2007. — С. 418–432.
8. Хакен Г. Можем ли мы применять синергетику в науках о человеке? Синергетика и психология. Вып. 2. Социальные процессы / Под ред. И.Н. Трофимовой. — М.: Янус—К, 2000. — С. 21–37.
9. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Загадки человека: человеческая особенность коэволюционных процессов // Синергетика. Тр. семинара. Т.5. Материалы круглого стола «Сложные системы: идеи, проблемы, перспективы». — Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. — С. 21–38.
10. Акбаров Д.Е., Мельник В.С., Ясинский В.В. Методы управления смешанными системами. Операторный подход. — К.: Вирій, 1998. — 223 с.
11. Згуровский М.З., Мельник В.С. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — К.: Наук. думка, 1999. — 630 с.
12. Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. — К.: Наук. думка, 2004. — 588 с.
13. Згуровский М.З., Касьянов П.О., Мельник В.С. Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. — К.: Наук. думка, 2008. — 464 с.
14. Иваненко В.И., Мельник В.С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — К.: Наук. думка, 1988. — 287 с.
15. Касьянов П.О., Задоянчук Н.В., Ясинский В.В. Периодические решения для класса нелинейных эволюционных уравнений гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 5. — С. 118–129.
16. Kapustyan O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V. Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. — Kyiv: Nauk. Dumka, 2008. — 215 p.
17. Melnik V.S., Zgurovsky M.Z. Nonlinear analysis and control of physical processes and fields. — Berlin: Springer, 2004. — 490 p.
18. Ясінський В.В. Матеріали восьмого туру комплексного моніторингу якості підготовки фахівців в НТУУ «КПІ». — К.: ВПІ ВПК «Політехніка», 2009. — 152 с.
19. Ясінський В.В., Капустян О.В., Валеро Х. Математична модель процесу формування та збереження колективних знань // Систем. дослідж. та інформ. технології. — 2009. — № 2. — С. 67–78.
20. Згуровський М.З., Панкратова Н.Д. Основи системного аналізу. — К.: Видавн. група BHV, 2007. — 544 с.
21. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. — М.: Физматгиз, 2005. — 320 с.
22. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — Berlin: Springer, 1988. — 500 p.
23. Згуровский М.З., Новиков А.Н. Анализ и управление односторонними физическими процессами. — К.: Наук. думка, 1996. — 327 с.
24. Мельник В.С. Многозначная динамика нелинейных бесконечномерных систем. — К., 1994. — 41 с. — (Препр. / НАН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 94-17).
25. Valero J. Attractors of both semidynamical systems and evolutionary inclusions // Доп. НАН України. — 1994. — № 5. — С. 7–11.
26. Kapustyan O.V., Melnik V.S., Valero J. Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations // Intern. J. Bifurc. and Chaos. — 2003. — **13**, N 7. — P. 1969–1983.

Поступила 29.10.2009