УДК 519.21, 519.713

А.С. БЫЧКОВ, Е.В. ИВАНОВ

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НЕЧЕТКИХ ПЕРСЕПТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ЗАДАННЫХ НА РАЗНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

Ключевые слова: *теория возможностей, нечеткая логика, сходимость последовательностей нечетких персептивных элементов*.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] для моделирования неопределенностей предлагается применять теорию возможностей. В [4] вводится понятие нечетких персептивных элементов, обобщающее нечеткие элементы теории Заде. Основы теории возможностей заложены в [5, 6]. В этих работах рассматривается понятие мер возможности, необходимости и основные аксиомы построения пространства возможностей.

Из монографии [1] известен теоретико-возможностный аналог закона больших чисел для сходимости распределений, но для других основных видов сходимости в теории возможностей (по возможности и с необходимостью 1) не было известно, имеет ли место такой аналог.

В настоящей работе исследуются свойства сходимости последовательностей нечетких персептивных элементов, заданных на разных возможностных пространствах и полученные результаты применяются к исследованию теоретико-возможностного аналога закона больших чисел для сходимости по возможности и с необходимостью 1.

ТЕОРИЯ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

Пусть X — непустое множество (пространство элементарных событий), $\mathbf{A}$ — класс подмножеств X, который содержит $\varnothing$ и X (множество составных событий), $\beta(X)$ — булеан множества X.

Определение 1. Полностью аддитивной мерой возможности на классе множеств $\mathbf{A}$ называется функция $P: \mathbf{A} \to [0,1]$, которая удовлетворяет условию $P\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = \sup_{t \in T} P(A_t)$ для каждого семейства $\{A_t \mid t \in T\}$ множеств из класса $\mathbf{A}$ такого, что $\bigcup_{t \in T} A_t \in \mathbf{A}$.

Мера возможности P называется нормированной, если $P(X) = 1$ и $P(\varnothing) = 0$.

В дальнейшем, если не сказано иначе, меры возможности будут считаться нормированными и полностью аддитивными.

Определение 2. P-моделью теории возможностей называется тройка $(X, \mathbf{A}, P)$, где $\{0, X\} \subseteq \mathbf{A} \subseteq 2^X$, P — мера возможности на классе множеств $\mathbf{A}$, P- модель, также будем называть пространством возможностей.

Затем нам понадобится техника продолжения меры возможности с одного класса множеств на более широкий класс множеств. Проблема продолжения меры возможности рассматривалась многими авторами [1, 2, 7, 8]. Используем следующий вариант теоремы о продолжении [7].

Определение 3. Функция $P^*(A) = \inf\left\{ \sup_{t \in T} P(A_t) \,\middle|\, \bigcup_{t \in T} A_t \supseteq A \right\}$, где нижняя грань берется по семействам множеств $(A_t)_{t\in T}$ из класса $\mathbf{A}$, которые покрывают множество A, называется внешней мерой возможности, соответствующей функции $P: \mathbf{A} \to [0,1]$.

Теорема 1 (о продолжении меры возможности):

1) функцию P, определенную на классе множеств $\mathbf{A} \subseteq 2^X$, можно продолжить до меры возможности на $\beta(X)$ тогда и только тогда, когда для произвольного семейства множеств $(A_j)_{j\in J}$, $A_j \in \mathbf{A}$ и множества $A \in \mathbf{A}$ выполняется импликация $A \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j \Rightarrow P(A) \le \sup_{j \in J} P(A_j)$;

2) если P имеет некоторое продолжение $\overline{P}$ до меры возможности на $\beta(X)$, то P^* является продолжением P до меры возможности на $\beta(X)$ и $\forall A \subseteq X \; \overline{P}(A) \le P^*(A)$.

Следствие 1. Если класс множеств $\mathbf{A}$ замкнут относительно конечных пересечений и P — мера возможности, то P^* является ее (наибольшим) продолжением до меры возможности на $\beta(X)$.

Пространство возможностей $(X, \mathbf{A}, P)$ назовем регулярным, если $\mathbf{A} = \beta(X)$ и мера возможности $P: \beta(X) \to L$ полностью аддитивна и нормирована.

Пусть задано метрическое пространство $\mathbf{M} = (M, d)$.

Определение 4. Нечетким перцептивным элементом ξ на пространстве возможностей $(X, \mathbf{A}, P)$ называется $\mathbf{A}$-измеримая тотальная функция $\xi: X \to \mathbf{M}$.

Определение 5. В случае, когда $\mathbf{A} = \beta(X)$, распределением нечеткого перцептивного элемента ξ называется функция $f_\xi(y) = P\{\xi = y\}$, $y \in \mathbf{M}$.

Введем следующие обозначения:

- $M^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} M^k$ — множество кортежей из элементов M (слов в алфавите M);
- M^ω — множество последовательностей элементов M (ω-слов в алфавите M);
- $a * b$ — конкатенация кортежей (слов) a и b, где $a \in M^+$, $b \in M^+ \cup M^\omega$;
- $a \prec b$ — отношение «быть строгим префиксом», т.е. $\exists\, c \in M^+ \cup M^\omega \; a * c = b$;
- $\beta_+(M) = \bigcup_{n \ge 1} \beta(M^n)$ — множество слов фиксированной конечной длины, $\beta_\infty(M) = \beta_+(M) \cup \beta(M^\omega)$.

Для пар множеств $A \in \beta_+(M)$, $B \in \beta_\infty(M)$ введем обозначения:

- $\mathrm{len}(A) = n$, если $A \subseteq M^n$, $A \ne \varnothing$;
- $A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\} \in \beta_\infty(M)$ — конкатенация всех пар элементов;
- $\mathrm{Pref}_n(B) = \{a \in M^n \mid \exists b \;\; a * b \in B\}$ — множество префиксов длины n;
- $\mathrm{Suff}(B) = \{w \mid \exists u \in M * u * w \in A\}$ — множество суффиксов.

Определим следующие множества:

1) $FD_{\mathbf{M}}$ — множество полностью аддитивных нормированных мер возможности на $\beta(M)$, его элементы будем называть (нечеткими) распределениями;

2) $FD_{\mathbf{M}}^\omega$ — множество последовательностей распределений (элементов $FD_{\mathbf{M}}$);

3) $FS_{\mathbf{M}}^\omega$ — множество полностью аддитивных нормированных мер возможности на $\beta(M^\omega)$, его элементы будем называть (нечеткими) распределениями последовательности.

4) $FS_{\mathbf{M}}^{+}$ — множество полностью аддитивных нормированных мер возможности Q_{+} на $\beta_{+}(M)$, которые удовлетворяют условию $Q_{+}(Y)=Q_{+}(Y*M)$ для всех $Y\in\beta_{+}(M)$, его элементы будем называть системами конечномерных распределений последовательности.

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПЕРСЕПТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Определим тотальный оператор $\mathrm{Fin}\colon FS_{\mathbf{M}}^{\omega}\to FS_{\mathbf{M}}^{+}$ равенством

$$(\mathrm{Fin}(Q))(Y)=Q(Y*M^{\omega}),\; Y\in\beta_{+}(M).$$

Введем на множестве M^{ω} топологию: открытые множества имеют вид $W*M^{\omega}$, где $W\subseteq M^{+}$ (топология произведения). Множества из $BT_{M}^{0}=\{u*M^{\omega}\,|\,u\in M^{*}\}$ будем считать (открытыми) шарами. Класс открытых множеств обозначим $BT_{M}=\{U*M^{\omega},U\in\beta_{+}(M)\}$.

Утверждение 1. Выполняются следующие свойства:

1) класс BT_{M} замкнут относительно конечных объединений и пересечений;

2) тотальная функция $Q_{\omega}^{0}\colon BT_{M}\to L$, определенная равенством $Q_{\omega}^{0}(U*M^{\omega})=Q_{+}(U)$, является мерой возможности на BT_{M}, обозначим ее $\mathrm{Inf}(Q_{+})$;

3) для $Q_{+}\in FS_{\mathbf{M}}^{+}$ и $Q_{\omega}\in FS_{\mathbf{M}}^{\omega}$, $\mathrm{Fin}(Q_{\omega})=Q_{+}$ тогда и только тогда, когда $Q_{\omega}|_{BT_{M}}=\mathrm{Inf}(Q_{+})$.

Доказательство. 1. Следует из равенства $U_{1}*M^{\omega}\circ U_{2}*M^{\omega}=(U_{1}\circ U_{2})*M^{\omega}$, где $\circ$ обозначает $\cup$ или $\cap$,

2. Пусть $U*M^{\omega}=U'*M^{\omega}$ для некоторых $U\in M^{k},U'\in M^{n}$, считаем $k\le n$.

Тогда $U*M^{n-k}=\mathrm{Pref}_{n}(U*M^{\omega})=\mathrm{Pref}_{n}(U'*M^{\omega})=U'$, следовательно, $Q_{+}(U)=Q_{+}(U')$. Поэтому функция Q_{ω}^{0} корректно определена.

Рассмотрим семейство множеств $Y_{t}=U_{t}*M^{\omega}\in BT_{M},t\in T$, такое, что $Y=\bigcup\limits_{t\in T}Y_{t}=U*M^{\omega}\in BT_{M}$.

Пусть $n=\mathrm{len}(U)$. Тогда $U=\bigcup\limits_{i}U_{i}*M^{n-\mathrm{len}(U_{i})}$, где объединение по таким i, что $\mathrm{len}(U_{i})\le n$, и соответственно

$$Q_{\omega}^{0}(Y)=Q_{+}(U)=\sup_{i}Q_{+}(U_{i}*M^{n-\mathrm{len}(U_{i})})=\sup_{i}Q_{+}(U_{i})=\sup_{t\in T}Q_{+}(U_{t})=\sup_{t\in T}Q_{\omega}^{0}(Y_{t}).$$

Следовательно, Q_{ω}^{0} является полностью аддитивной мерой возможности на BT_{M}.

3. **Необходимость.** Пусть $\mathrm{Fin}(Q_{\omega})=Q_{+}$. Тогда $Q_{\omega}(U*M^{\omega})=Q_{+}(U)=$ $=\mathrm{Inf}(Q_{+})(U*M^{\omega})$.

Достаточность. Пусть $Q_{\omega}|_{BT_{M}}=\mathrm{Inf}(Q_{+})$. Тогда $Q_{+}(U)=$ $=\mathrm{Inf}(Q_{+})(U*M^{\omega})=Q_{\omega}(U*M^{\omega})$, откуда по определению $\mathrm{Fin}(Q_{\omega})=Q_{+}$.

Утверждение доказано.

Введем такое обозначение: если $\xi_{n}\colon X\to M$ — последовательность нечетких персептивных элементов, то нечеткий персептивный элемент $\xi_{(n)}\colon X\to M^{\omega}$ определяется как $\xi_{(n)}(x)=(\xi_{1}(x),\xi_{2}(x),\ldots)$.

Утверждение 2. Пусть $(X, 2^X, P)$ — пространство возможностей, $\xi_n: X \to M$— последовательность нечетких персептивных элементов, $\xi: X \to M$ — нечеткий персептивный элемент. Тогда $P_\xi \in FD_{\mathbf{M}}$, $P_{\xi_{(n)}} \in FS_{\mathbf{M}}^{\omega}$ и $\mathrm{Fin}\,(P_{\xi_{(n)}}) \in FS_{\mathbf{M}}^{+}$.

Доказательство очевидно.

Определение 6. Пара (PS, ξ), где PS — регулярное пространство возможностей $(X, 2^X, P)$, $\xi: X \to M$ — нечеткий персептивный элемент, называется моделью распределения $Q \in FD_{\mathbf{M}}$, если $Q \equiv P_\xi$.

Аналогично пара $(PS, \xi_{(n)})$, $\xi_{(n)}: X \to M^{\omega}$ называется моделью распределения последовательности $Q_\omega \in FS_{\mathbf{M}}^{\omega}$.

Моделью последовательности распределений $Q_{(n)} \in FD_{\mathbf{M}}^{\omega}$ называется пара $(PS, \xi_{(n)})$, $\xi_{(n)}: X \to M^{\omega}$ такая, что $\forall n \in \mathbf{N}$ $Q_n \equiv P_{\xi_n}$.

Моделью системы конечномерных распределений последовательности $Q_+ \in FS_{\mathbf{M}}^{+}$ называется пара $(PS, \xi_{(n)})$ такая, что $Q_+ = \mathrm{Fin}\,(P_{\xi_{(n)}})$.

Определение 7. Моделью сходимости с необходимостью 1 системы конечномерных распределений последовательности Q_+ называется такая модель $(PS, \xi_{(n)})$ системы распределений Q_+, в которой $\xi_{(n)}$ сходится с необходимостью 1.

Аналогично определяются понятия модели расходимости с необходимостью 1 и модели сходимости (расходимости) с положительной необходимостью.

Пусть $(X, \mathbf{A}, P)$ — пространство возможностей, в котором класс множеств $\mathbf{A}$ замкнут относительно конечных пересечений, а P — нормированная мера возможности.

Пусть P^* — внешняя мера возможности, соответствующая P.

Определим функцию $P_*: 2^X \to L$ для каждого $D \subseteq X$ равенством

$$P_*(D) = \sup\{P(A) | A \in \mathbf{A},\ P(A) > P^*(A \setminus D)\}$$

(в этой записи предполагается, что $\sup \varnothing = 0$).

Лемма 1. (О продолжении меры возможности с условием.)

Пусть D — подмножество X, $\delta \in L$. Тогда P можно продолжить до меры возможности $\overline{P}$ на 2^X такой, что $\overline{P}(D) = \delta$ тогда и только тогда, когда $\delta \le P^*(D)$ и выполняется хотя бы одно из следующих эквивалентных условий:

1) если A, $(B_t)_{t \in T}$ — множества из класса $\mathbf{A}$ такие, что $A \subseteq D \cup \bigcup_{t \in T} B_t$, то $P(A) \le \delta \vee \sup_{t \in T} P(B_t)$;

2) $\forall A \in \mathbf{A}$ $P(A) > \delta \Rightarrow P^*(A \setminus D) = P(A)$;

3) $P_*(D) \le \delta$.

Доказательство. Докажем утверждение леммы для условия 1.

Необходимость. Предположим, что продолжение $\overline{P}$ существует. Выберем множества $A, B_t \in \mathbf{A}$, такие, что $A \subseteq D \cup \bigcup_{t \in T} B_t$. Тогда $\overline{P}(A) \le \overline{P}(D) \vee \sup_{t \in T} \overline{P}(B_t) \le$

$\le \delta \vee \sup_{t \in T} P(B_t)$, а также $\delta = \overline{P}(D) \le P^*(D)$.

Достаточность. Положим $\mathbf{A}^D = \mathbf{A} \cup \{D\}$. Определим функцию P_1 на классе $\mathbf{A}^D$ равенствами $P_1(D) = \delta$ и $P_1(A) = P(A)$ при $A \in \mathbf{A}$. Пусть A^D и $(A_t^D)_{t \in T}$ — элементы $\mathbf{A}^D$. Докажем, что из включения $A^D \subseteq \bigcup_{t\in T} A_t^D$ следует $P_1(A^D) \le \sup_{t\in T} P_1(A_t^D)$.

Для этого рассмотрим четыре случая:

1) элементы A^D и $(A_t^D)_{t\in T}$ принадлежат $\mathbf{A}$. Тогда $A^D = \bigcup_{t\in T}(A_t^D \cap A^D)$ и $P_1(A^D) = \sup_{t\in T} P_1(A_t^D \cap A^D) \le \sup_{t\in T} P_1(A_t^D)$;

2) $A^D = D$, а элементы $(A_t^D)_{t\in T}$ принадлежат $\mathbf{A}$, тогда множества A_t^D образуют покрытие множества D, поэтому $P_1(A^D) = \delta \le P^*(D) \le \sup_{t\in \mathbf{A}} P_1(A_t^D)$;

3) $A^D \in \mathbf{A}$ и среди элементов $(A_t^D)_{t\in T}$ есть множество D. Пусть $T^0 \subseteq T$ — множество индексов t таких, что $A_t^D \in \mathbf{A}$ (возможно, пустое). Тогда по условию леммы $P_1(A^D) = P(A^D) \le \delta \vee \sup_{t\in T^0} P(A_t^D) = \sup_{t\in T} P_1(A_t^D)$;

4) $A^D = D$ и среди элементов $(A_t^D)_{t\in T}$ есть множество D, тогда $P_1(A^D) \le \sup_{t\in T} P_1(A_t^D)$.

Таким образом, выполняются условия теоремы о продолжении меры возможности для функции P на классе $\mathbf{A}^D$, поэтому существует продолжение P_1 до меры возможности $\overline{P}$ на 2^X. Мера возможности $\overline{P}$ является продолжением P и удовлетворяет условию $\overline{P}(D) = \delta$.

Докажем, что из условия 1 следует условие 2.

Пусть $A \in \mathbf{A}$ и $P(A) > \delta$, $(B_t)_{t\in T}$ — произвольное покрытие множества $A \setminus D$ элементами класса $\mathbf{A}$. Тогда $A \setminus D \subseteq \bigcup_{t\in T} B_t$, $A \subseteq D \cup \bigcup_{t\in T} B_t$ и по условию 1 $P(A) \le \delta \vee \sup_{t\in T} P(B_t)$. Учитывая, что $P(A) > \delta$, получаем $P(A) \le \sup_{t\in T} P(B_t)$.

Таким образом, $P(A) \le P^*(A \setminus D)$, откуда $P^*(A \setminus D) = P(A)$.

Докажем, что из условия 2 следует условие 3.

Из условия 2 вытекает, что для любого множества $A \in \mathbf{A}$ такого, что $P(A) > P^*(A \setminus D)$, выполняется неравенство $P(A) \le \delta$. Тогда $P_*(D) = \sup\{P(A) \mid A \in \mathbf{A},\ P(A) > P^*(A \setminus D)\} \le \delta$.

Докажем, что из условия 3 следует условие 1.

Пусть $P_*(D) \le \delta$ и A, $(B_t)_{t\in T}$ — множества из класса $\mathbf{A}$ такие, что $A \subseteq D \cup \bigcup_{t\in T} B_t$.

Тогда $A \setminus D \subseteq \bigcup_{t\in T} B_t$, т.е. множества $(B_t)_{t\in T}$ образуют покрытие множества $A \setminus D$, поэтому $P^*(A \setminus D) \le \sup_{t\in T} P(B_t)$. Если $P(A) \le P^*(A \setminus D)$, то $P^*(A \setminus D) \le \sup_{t\in T} P(B_t)$. Если же $P(A) > P^*(A \setminus D)$, то по условию 3 $P(A) \le \delta$. В обоих случаях выполняется неравенство $P(A) \le \delta \vee \sup_{t\in T} P(B_t)$.

Лемма доказана.

Следствие 2. Если $A \in \mathbf{A}$, то $P_*(A) = P(A)$.

Доказательство. Поскольку P имеет продолжение до меры возможности на 2^X и любое такое продолжение $\overline{P}$ удовлетворяет условию $\overline{P}(A) = P(A)$, то $P_*(A) = P(A) = P^*(A)$.

Примечание. Функция P_* может не быть мерой возможности, как показывает следующий пример. Положим $X = \{0,1\}$, $\mathbf{A} = \{\varnothing, X\}$, $P(\varnothing) = 0$, $P(X) = 1$. Тогда $P^*(\{0\}) = P^*(\{1\}) = 1$ и $P_*(\{0\}) = P_*(\{1\}) = 0$, но $P_*(\{0,1\}) = 1$.

Определение 8. Распределение $Q \in FD_{\mathbf{M}}$ называется вырожденным, если $Q(\{y\}) > 0$ не более чем для одного элемента $y \in M$.

Утверждение 3. Выполняются следующие свойства:

1) каждое распределение $Q \in FD_{\mathbf{M}}$ имеет модель;

2) каждое распределение последовательности $Q_\omega \in FS_{\mathbf{M}}^{\omega}$ имеет модель.

Доказательство:

1) положим $X = \{(y, p) \mid y \in M, p = Q(\{y\})\}$, $P(A) = \sup\limits_{(y,p) \in A} p$, $\xi((y, p)) = y$, тогда $P_\xi(Y) = P\{(y, p) \mid \xi((y, p)) \in Y\} = \sup\{Q\{y\} \mid y \in Y\} = Q(Y)$, $Y \subseteq M$;

2) доказательство аналогично п. 1.

Утверждение доказано.

Лемма 2. Пусть Q_+ — система конечномерных распределений последовательности. В этом случае каждая ее модель является моделью сходимости с необходимостью 1 тогда и только тогда, когда для каждой расходящейся последовательности (y_n) выполняется $\lim\limits_{n \to \infty} Q_+(\{(y_1, .., y_n)\}) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует расходящаяся последовательность $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots) \in M^\omega$ такая, что $\delta = \lim\limits_{n \to \infty} Q_+(\{(y_1^0, \dots, y_n^0)\}) > 0$.

Пусть Q^* — внешняя мера возможности, соответствующая мере возможности $\mathrm{Inf}(Q_+)$. Тогда $Q^*(\{y_{(\cdot)}\}) = \inf\limits_{n > 0} \mathrm{Inf}(Q_+)((y_1, \dots, y_n) * M^\omega) = \lim\limits_{n \to \infty} Q_+\{(y_1, \dots, y_n)\}$ для произвольного $y_{(\cdot)} \in M^\omega$. Отсюда $Q^*(\{y^0\}) = \delta > 0$, и поскольку Q^* имеет модель, которая является моделью Q_+, то Q_+ имеет модель, которая не является моделью сходимости с необходимостью 1, что противоречит предположению и завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Для каждой расходящейся последовательности (y_n) выполняется равенство $\lim\limits_{n \to \infty} Q_+(\{(y_1, \dots, y_n)\}) = 0$ и поэтому $Q^*(\{(y_1, y_2, \dots)\}) = 0$. Поскольку для произвольного продолжения Q_ω меры возможности $\mathrm{Inf}(Q_+)$ на булеан множества M^ω выполняется неравенство $Q_\omega\{(y_1, y_2, \dots)\} \le Q^*\{(y_1, y_2, \dots)\}$, то $Q_\omega\{(y_1, y_2, \dots)\} = 0$. Следовательно, произвольная модель системы конечномерных распределений Q_+ является моделью сходимости с необходимостью 1.

Лемма доказана.

Следствие 3. Если пространство M полно и ограничено, то условие леммы можно заменить: $Q_+\{(y_1, \dots, y_N)\} \sup\limits_{n,m > N} d(y_n, y_m) \to 0$ при $N \to \infty$ для произвольной последовательности (y_n).

Доказательство. Пусть для каждой расходящейся последовательности (y_n) выполняется равенство $\lim\limits_{n \to \infty} Q_+(\{(y_1, \dots, y_n)\}) = 0$. Тогда

$$\lim_{N \to \infty} Q_+\{(y_1, \dots, y_N)\} \sup_{n,m > N} d(y_n, y_m) =$$
$$= \lim_{N \to \infty} Q_+\{(y_1, \dots, y_N)\} \lim_{N \to \infty} \sup_{n,m > N} d(y_n, y_m),$$

поскольку пространство M ограничено.

Если последовательность y_n сходится, то из полноты пространства M получаем равенство $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{n,m>N} d(y_n, y_m)=0$. Если последовательность y_n расходится, то $\lim\limits_{N\to\infty} Q_+\{(y_1,\ldots,y_N)\}=0$. В обоих случаях $Q_+\{(y_1,\ldots,y_N)\}\sup\limits_{n,m>N} d(y_n, y_m)\to 0$.

Наоборот, если $Q_+\{(y_1,\ldots,y_N)\}\sup\limits_{n,m>N} d(y_n, y_m)\to 0$ для каждой последовательности (y_n), то для каждой расходящейся последовательности (y_n) выполняется неравенство $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{n,m>N} d(y_n, y_m)>0$, откуда $Q_+\{(y_1,\ldots,y_N)\}\to 0$.

Следствие доказано.

Как показывает пример, условие леммы 2 не эквивалентно условию существования модели сходимости по возможности (т.е. наличие модели сходимости по возможности является лишь достаточным условием для того, чтобы каждая модель сходимости выступала моделью сходимости с необходимостью 1).

Пример 1. Система конечномерных распределений последовательности, которая не имеет модели сходимости по возможности, и при этом все ее модели являются моделями сходимости с необходимостью 1.

Положим $M=\{0,1\}$ с дискретной метрикой и

$$Q_+(\{(y_1,\ldots,y_n)\})=\begin{cases}1, & y_1+\ldots+y_n\le 1,\\ 0, & y_1+\ldots+y_n>1.\end{cases}$$

Тогда в каждой расходящейся последовательности (y_n) имеется более одной единицы, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_+(\{(y_1,\ldots,y_n)\})=0$. По лемме 2 каждая модель Q_+ является моделью сходимости с необходимостью 1.

Пусть последовательность нечетких персептивных элементов ξ_n имеет распределение Q_+. Тогда для каждого $n\ge 1$ $P\{\sup\limits_p d(\xi_{n+p},\xi_n)\ge 1\}\ge Q_+(\{0^n 1\})=1$, поэтому $P\{\sup\limits_p d(\xi_{n+p},\xi_n)\ge 1\}\to 1$ при $n\to\infty$, значит, последовательность ξ_n не является фундаментальной по возможности. Поскольку пространство M полное, то ξ_n не является сходящейся по возможности. Следовательно, Q_+ не имеет модели сходимости по возможности.

Лемма 3. Пусть Q_+ — система конечномерных распределений последовательности. В этом случае она имеет модель сходимости с необходимостью 1 тогда и только тогда, когда для каждого $\delta>0$, $k\in N$ и элементов $y_1,\ldots,y_k\in M$ существует сходящаяся последовательность $y_{k+1}, y_{k+2},\ldots$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} Q_+\{(y_1,\ldots,y_n)\}+\delta>Q_+\{(y_1,\ldots,y_k)\}.$$

Доказательство. Применим лемму 1 к случаю, когда $X=M^{\omega}$, $\mathbf{A}=BT_M^0$, D — множество расходящихся последовательностей. Меру возможности P положим равной $\mathrm{Inf}(Q_+)$. Тогда $P^*\{(y_1,y_2,\ldots)\}=\lim\limits_{n\to\infty} Q_+\{(y_1,\ldots,y_n)\}$ и условием существования модели сходимости с необходимостью 1 для Q_+ является условие $\forall A\in\mathbf{A}\; P^*(A\setminus D)=P(A)$, т.е. каждого $k\in N$ и элементов $y_1,\ldots,y_k\in M$, $\sup\{\lim\limits_{n\to\infty}\{(y_1,\ldots,y_n)\} \mid (y_{k+1},y_{k+2},\ldots)$ — сходящаяся последовательность$\}$ $=$ $=Q_+\{(y_1,\ldots,y_k)\}$. Отсюда получаем условие леммы.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть Q_+ — система конечномерных распределений последовательности. Тогда она имеет модель расходимости с необходимостью 1, если и только если для каждого $\delta > 0$, $k \in N$ и элементов $y_1, \ldots, y_k \in M$ существует расходящаяся последовательность $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots$ такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} Q_+ \{(y_1, \ldots, y_n)\} + \delta > Q_+ \{(y_1, \ldots, y_k)\}$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

Следующий пример показывает, что условия лемм 3 и 4 не являются взаимно исключающими.

Пример 2. Рассмотрим систему конечномерных распределений последовательности, которая имеет модель сходимости с необходимостью 1 и модель расходимости с необходимостью 1.

Определим систему Q_+ таким образом, что $Q_+ (\{(y_1, \ldots, y_n)\}) = 1$ для каждого $n \ge 1$ и $y_1, \ldots, y_n \in M$. Тогда Q_+ является системой конечномерных распределений последовательности. Поскольку для произвольной последовательности y_n и индекса k выполняется $\lim\limits_{n \to \infty} Q_+ (\{(y_1, \ldots, y_n)\}) = Q_+ \{(y_1, \ldots, y_k)\}$, то по леммам 3 и 4 Q_+ имеет как модель сходимости с необходимостью 1, так и модель расходимости с необходимостью 1.

НЕЧЕТКИЕ АНАЛОГИ ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

С помощью полученных выше результатов определим, имеет ли место теоретико-возможностный аналог закона больших чисел.

Определение 9. Две последовательности нечетких персептивных элементов: $\xi_n : X \to R$ и $\xi'_n : X' \to \boldsymbol{R}$, заданные на пространствах возможностей $(X, 2^X, P)$ и $(X', 2^{X'}, P')$, называются эквивалентными по конечномерным распределениям, если для любых $n \ge 1$, $y_1, \ldots, y_n \in \boldsymbol{R}$ выполняется $P\{\xi_1 = y_1, \ldots, \xi_n = y_n\} = P' \{\xi'_1 = y_1, \ldots, \xi'_n = y_n\}$.

Теорема 2. Пусть ξ_n — последовательность независимых одинаково распределенных нечетких персептивных элементов на пространстве возможностей $(X, 2^X, P)$. Тогда:

1) существует пространство возможностей $(X', 2^{X'}, P')$ и последовательность нечетких персептивных элементов ξ'_n на нем, эквивалентная по конечномерным распределениям последовательности ξ_n такая, что последовательность $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi'_i$ сходится с необходимостью 1;

2) если распределение f_ξ персептивного элемента ξ_1 не вырожденно, то существует пространство возможностей $(X'', 2^{X''}, P'')$ и последовательность нечетких персептивных элементов ξ''_n на нем, эквивалентная по конечномерным распределениям последовательности ξ_n , такая, что последовательность $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi'_i$ расходится с положительной необходимостью.

Доказательство. Положим, Q_+ — система конечномерных распределений последовательности $\eta_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$.

1. Воспользуемся леммой 3. Пусть выбраны произвольные $\delta > 0$, $k \in N$ и элементы $z_1, \ldots, z_k \in M$. Поскольку $\sup\limits_y f_\xi(y) = 1$, то существует y^* , для которого $f_\xi(y^*) > 1 - \delta$. Положим $z_{j+1} = \dfrac{y^* + jz_j}{j+1}$ при $j \ge k$. При $n > k$ имеем

$Q_+\{(z_1,\dots,z_n)\}=P\{\xi_i=y_i, i=1\dots n\}$, где $z_i=\frac{1}{i}\sum_{j\le i} y_j \quad \forall i=1\dots n$. Поэтому $y_i=iz_i-(i-1)z_{i-1}$ и, учитывая независимость ξ_n и определение элементов $z_{j+1}, j\ge k$, получаем

$$Q_+\{(z_1,\dots,z_n)\}=f_\xi(z_1)\wedge f_\xi(2z_2-z_1)\wedge\dots\wedge f_\xi(nz_n-z_{n-1})=$$

$$=Q_+\{(z_1,\dots,z_k)\}\wedge f_\xi(y^*)\wedge\dots\wedge f_\xi(y^*).$$

Из последнего равенства следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} Q_+\{(z_1,\dots,z_n)\}\ge Q_+\{(z_1,\dots,z_k)\}\wedge(1-\delta)$ и

$$\lim_{n\to\infty} Q_+\{(z_1,\dots,z_n)\}+\delta\ge Q_+\{(z_1,\dots,z_k)\}.$$

Кроме того, $z_{j+1}-y^*=\frac{y^*+jz_j}{j+1}-y^*=\frac{j(z_j-y^*)}{j+1}$ при $j\ge k$, поэтому

$$|z_n-y^*|=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\dots\frac{k}{k+1}|z_k-y^*|=\frac{k}{n}\left|z_k-y^*\right|\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

отсюда следует сходимость последовательности z_n. Поскольку $\delta>0$ и $z_1,\dots,z_k\in M$ выбраны произвольно, то по лемме 3 Q_+ имеет модель $((X', P'),\eta'_n)$ сходимости с необходимостью 1.

Положим $\xi'_n=n\eta'_n-(n-1)\eta'_{n-1}$, $n\ge 1$. Для произвольных y_i выполняется равенство

$$P'\{\xi'_i=y_i,\ i=1\dots n\}=P'\{\eta'_i=z_i,\ i=1\dots n\}=P\{\eta_i=z_i, i=1\dots n\}=P\{\xi_i=y_i, i=1\dots n\},$$

где $z_i=\sum_{j=1}^{i} y_j$, $i=1\dots n$. Поэтому ξ'_n эквивалентна по конечномерным распределениям последовательности ξ_n.

2. Поскольку распределение ξ_1 не вырожденно, то существуют вещественные числа a,b, $a\ne b$ такие, что $f_{\xi_1}(a)>0$ и $f_{\xi_1}(b)>0$. Построим последовательность $y=\bigotimes_{k\ge 1}(a^{2^k}*b^{2^k})\in \boldsymbol{R}^\omega$, где $\otimes$ и $*$ обозначают конкатенацию элементов для образования слова или ω-слова. Положим $z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. Тогда

$$Q_+(\{(z_1,\dots,z_n)\})\ge P\{\xi_i=y_i, i=1\dots n\}=\min_{i=1\dots n} f_\xi(y_i)=f_\xi(a)\wedge f_\xi(b)$$

и соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} Q_+(\{(z_1,\dots,z_n)\})\ge f_\xi(a)\wedge f_\xi(b)>0$.

Положим $n=2(1+2+2^2+\dots+2^s)$, $p=2^{s+1}$. Тогда

$$|z_{n+p}-z_n|=\frac{1}{n+p}\left|\sum_{i=1}^{n+p} y_i-\frac{n+p}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right|=\frac{1}{n+p}\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} y_i-\frac{p}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right|=$$

$$=\frac{1}{n+p}\left|pa-\frac{p}{n}\frac{n}{2}(a+b)\right|=\frac{p}{n+p}\frac{|a-b|}{2}=\frac{2^{s+1}}{2(2^{s+1}-1)+2^{s+1}}\frac{|a-b|}{2}=\frac{1}{3-1/2^s}\frac{|a-b|}{2}.$$

Поэтому для каждого n, $\sup\limits_{p>0}|z_{n+p}-z_n|\ge\frac{|a-b|}{6}$, значит, последовательность z_n расходится. Тогда по лемме 2 не каждая модель Q_+ является моделью сходимости с необходимостью 1, и следовательно, Q_+ имеет модель $((X'',P''),\eta''_n)$ расходимости с положительной необходимостью. Аналогично п. 1 делаем вывод, что последовательность $\xi''_n = n\eta''_n - (n-1)\eta''_{n-1}$, $n \ge 1$, эквивалентна по конечномерным распределениями последовательности ξ_n.

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\xi_n : X \to \mathbf{R}$ — последовательность независимых одинаково распределенных нечетких персептивных элементов на одном пространстве возможностей. Тогда последовательность $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ сходится по возможности тогда, и только тогда, когда распределение ξ_n вырождено.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что η_n сходится с необходимостью 1, но распределение ξ_n не вырожденно. Тогда по критерию типа Коши для сходимости с необходимостью 1 выполняется соотношение $\forall c > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\sup\limits_{m>n} |\eta_m - \eta_n| > c\right) = 0$. Пусть $f(y)$ — функция распределения нечеткого персептивного элемента ξ_n. Поскольку распределение не вырожденно, то выберем пару точек $y_1 \ne y_2$, для которых $f(y_i) > 0$, $i = 1, 2$. Тогда при $m = 2n$ для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P\{|\eta_m - \eta_n| \ge |y_1 - y_2|/2\} \ge P\{\eta_n = y_1, \eta_m = (y_1 + y_2)/2\} \ge$$
$$\ge P\{\xi_1 = \ldots = \xi_n = y_1,\ \xi_{n+1} = \ldots = \xi_{2n} = y_2\} = \min\{f(y_1), f(y_2)\} > \varepsilon .$$

Положив $c = |y_1 - y_2|/4$, получим, что для каждого $n \ge 1$ существует $x_n \in X_\varepsilon$, для которого $\sup\limits_{m>n} |\eta_m(x_n) - \eta_n(x_n)| > c$, следовательно, $\underline{\lim}_{n\to\infty} P(\sup\limits_{m>n} |\eta_m - \eta_n| > c) \ge \varepsilon$ — противоречие. Таким образом, распределение ξ_n вырождено.

Достаточность. Если $P\{\xi_n \in M\} = 0$, то утверждение очевидно. Пусть распределение ξ_n вырождено, $P_{\xi_n}(\{y\}) = 0$ и $\forall y \ne y_0$, $P_{\xi_n}(\{y_0\}) > 0$. Тогда нечеткие персептивные элементы ξ_n и η_n равны с необходимостью 1 константе y_0, поэтому $P(\sup\limits_{m>n} |\eta_m - \eta_n| > c) = 0$ при $c > 0$.

Теорема доказана.

Теоремы 2 и 3 показывают, что для сходимости по возможности и для сходимости с необходимостью 1 теоретико-возможностный аналог закона больших чисел не выполняется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получены критерии существования модели сходимости и расходимости с необходимостью 1 для систем конечномерных распределений последовательностей нечетких персептивных элементов (леммы 2–4). Кроме того, доказаны теоремы о невыполнении теоретико-возможностного аналога закона больших чисел для сходимости по возможности и сходимости с необходимостью 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применение — М.: Эдиториал, УРСС, 2000. — 190 с.
2. Бичков О.С., Колесніков К.С. Побудова (PN)–моделі теорії можливостей // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. — 2007. — № 1. — С. 134–138.
3. Бычков А.С. Об одном развитии теории возможностей // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 5. — С. 67–72
4. Бичков О.С. До теорії можливостей та її застосування // Доп. НАН України. — 2007. — № 5. — С. 7–12.
5. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. — 1978. — **1**. — P. 3–28.
6. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. — М.: Радио и связь, 1990. — 288 с.
7. Wang Z., Klir G.J. Fuzzy Measure Theory. — New York: Plenum Press, 1992. — 275 p.
8. Boyel L., Cooman G. de, Kerre E.E. On the extension of P-consintent mappings // Proc. FAPT’95, Gent. — 1995. — P. 88–98.

Поступила 19.03.2009