УДК 519.854

В.А. МИХАЙЛЮК

ОБЩИЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ СЛОЖНОСТИ ПОСТОПТИМАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Ключевые слова: *постоптимальный анализ, полиномиальный алгоритм, полиномиально разрешимая задача.*

При решении конкретной оптимизационной задачи с фиксированным набором входных данных обычно получается большое количество информации, лишь часть которой может использоваться для решения именно этой задачи. Остальная часть информации теряется. Поэтому избыточную информацию целесообразно использовать для решения других оптимизационных задач, «близких» к исходной.

Для постоптимального анализа дискретных оптимизационных задач [1–4] необходимо рассмотреть следующие вопросы:

— как изменится оптимальное решение конкретной задачи, если определенным образом изменить значения ее коэффициентов;

— как использовать информацию, полученную при решении некоторой задачи конкретным методом, для решения измененной задачи;

— какую минимальную дополнительную информацию необходимо накопить при решении исходной задачи для эффективного решения измененной задачи.

Областью применения постоптимального анализа является анализ деятельности некоторого реального процесса, описываемого моделью дискретной оптимизации, который лежит в основе различного рода нововведений. Кроме того, при не-больших изменениях исходных данных модели дискретного программирования, как правило, неустойчивы и непредсказуемы.

Постоптимальный анализ той или иной задачи дискретного программирования проводится на основе некоторого определенного подхода (метода), применяемого для решения именно этой задачи. Известны процедуры постоптимального анализа задач целочисленного программирования, основанные на методе отсечений Гомори, на методе ветвей и границ [4]. При проведении постоптимального анализа можно использовать приближенные методы, в частности методы локального поиска.

С постоптимальным тесно связан параметрический анализ и вопросы устойчивости дискретных задач оптимизации. При параметрическом анализе используется семейство однотипных задач, отличающихся некоторым параметром (либо в целевой функции, либо в ограничениях), это касается оптимальных решений всего семейства, исходя из оптимальных решений задач некоторого подсемейства. При исследовании устойчивости изучаются вопросы такого изменения исходных данных, которые не влияют на оптимальные решения.

Вопросы устойчивости параметрического и постоптимального анализа рассматривались в [3], затем в [5].

Теоретическое направление исследования устойчивости [2] ориентировано на получение условий, при которых множеству эффективных решений задачи отвечает некоторое свойство, характеризующее устойчивость задач к «малым» изменениям данных.

Такие исследования, как правило, основаны на использовании свойств точечно-множественных отображений, и понимание устойчивости задачи связывается с непрерывностью (полунепрерывностью) указанных отображений по Хаусдорфу или Бержу.

Подход к проблемам устойчивости задач дискретной оптимизации, связанный с получением количественных оценок допустимых изменений в данных, рассматривается в работах [6–8]. Одно из ключевых понятий, которое лежит в основе этого подхода, — это радиус устойчивости задачи. Под ним понимается максимальный радиус окрестности данных, при которых произвольная задача со значениями параметров с этой окрестности имеет то же оптимальное решение, что и исходная.

В [9] изучаются вопросы сложности постоптимального анализа булевого дискретного программирования с линейной функцией цели, в частности, на сколько можно изменить каждый коэффициент вектора целевой функции, чтобы оптимальное решение оставалось неизменным. Показано, что для существования полиноминального алгоритма вычисления максимальных изменений коэффициентов должен существовать полиноминальный алгоритм решения исходной задачи. Таким образом, постоптимальный анализ многих известных *NP*-трудных задач не может быть выполнен полиноминальным методом (алгоритмом), если $P \neq NP$.

В данной работе изучаются вопросы проведения постоптимального анализа дискретных задач оптимизации при изменении матрицы ограничений задачи (или допустимой области, а не целевой функции [9]).

1. ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ПОСТОПТИМАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Введем формализацию понятия эффективного проведения постоптимального анализа для задач дискретной оптимизации.

Пусть Π — некоторая *NP*-трудная оптимизационная проблема (возможно, и *NP*-полная), I — экземпляр задачи Π. Каждому экземпляру I задачи Π поставлено в соответствие множество $\{\delta(I)\}$ экземпляров задачи Π. Постоптимальный анализ для пары $(I, \{\delta(I)\})$ дает ответ на вопрос: как, зная оптимальное решение экземпляра I ($\{\text{opt}(I)\}$), найти оптимальное решение (решения) I' задач с$\{\delta(I)\}$ ($\{\text{opt}(I')\}$). Введем понятие эффективного постоптимального сведения экземпляров задачи

$\Pi(\propto_{\text{efp}})$. Будем говорить, что функция $f(n)$ полиномиального роста ($f(n) = \text{poly}(n)$), если для некоторой константы c при достаточно больших n выполняется $f(n) \le n^c$.

Определение 1. Будем говорить, что экземпляр $I' \in \Pi$ эффективно постоптимально сводится к экземпляру $I \in \Pi$, если существует такая полиномиально вычислимая на детерминированной машине Тьюринга (ДМТ) функция $f(.)$, что $\text{opt}(I') = f(\text{opt}(I))$, обозначение $I' \propto_{\text{efp}} I$ (f — сложность, число тактов ДМТ).

Определение 2. Для фиксированного экземпляра $I \in \Pi$ обозначим $C(I) = \{I' : I' \propto_{\text{efp}} I\}$.

Определение 3. Проведение постоптимального анализа для пары $(I, \{\delta(I)\})$ будет эффективным, если $\{\delta(I)\} \subseteq C(I)$.

Теорема 1. Если $NP \ne P$, то существует такая пара $(I, \{\delta(I)\})$, для которой проведение постоптимального анализа неэффективно.

Доказательство. Пусть $\{\Pi\}$ — множество всех экземпляров задачи Π и экземпляр $I_1 \in \{\Pi\}$ такой, что для него существует полиномиальный по времени алгоритм, который дает точное решения задачи (такой экземпляр для каждой *NP*-трудной проблемы Π существует и зависит от особенностей задачи Π). Допустим, что для произвольной пары $(I, \{\delta(I)\})$ проведение постоптимального анализа эффективно.

Положим $I = I_1 \in \{\Pi\}$, $\{\delta(I)\} = \{\Pi\} \setminus I_1$ и рассмотрим пару $(I, \{\delta(I)\})$. Согласно определению 3 $\{\Pi\} \setminus I_1 \subseteq C(I_1)$, отсюда для произвольного $I' \in \{\Pi\} \setminus I_1$, $I' \propto_{\text{efp}} I_1$.

В силу выбора I_1 произвольный экземпляр $I \in \{\Pi\}$ можно решить за полиномиальное время, таким образом, $NP = P$, что и доказывает теорему 1.

Замечание 1. Теорема 1 показывает сложность проведения постоптимального анализа дискретных задач оптимизации. Существуют такие экземпляры *NP*-трудных задач, для которых проведение постоптимального анализа является не более простым, чем обычное перерешение соответствующих задач.

Замечание 2. Под теорему 1 подпадает результат, рассмотренный в [9], где показано, что для существования полиномиального метода для вычисления максимальных изменений коэффициентов целевой функции (чтобы оптимальное решение оставалось неизменным) должен существовать полиномиальный метод решения исходной задачи. Таким образом, если $NP \ne P$, то проведение постоптимального анализа задачи, рассмотренной в [9], неэффективно.

2. О ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим дискретную оптимизационную задачу (P) вида

$$\min\{f(x) = f(x_1, \dots, x_n)\},$$
$$x \in G \subset B^n = \{0,1\}^n,$$

а также семейство $\{P_I\}$ дискретных задач (P_I) оптимизации:

$$\min\{f(x) = f(x_1, \dots, x_n)\},$$
$$x \in G_I \subset B^n = \{0,1\}^n,$$

где $I \in \{I_1, I_2, \dots, I_q\}$ — экземпляры семейства задач (P_I), $q = \text{poly}(n)$, среди $I_1, \dots, I_q$ есть экземпляр, который соответствует задаче (P) (т.е. $\exists\, j$: $G_{I_j} = G$).

Для произвольных $x, y \in B^n$: $x \le y$ тогда и только тогда, когда $x_i \le y_i$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 2. Если одновременно выполняются условия:

а) существует полиномиальный алгоритм для определения допустимого решения x задачи (P) такого, что не существует $x' \in G$, $x' < x$, $x' \ne x$;

б) для произвольного допустимого решения x^* задачи (P) существует экземпляр I_p семейства (P_I), что x^* — оптимальное решение относительно G_{I_p};

в) $I_1 \propto_{\text{efp}} I_2 \propto_{\text{efp}} \ldots \propto_{\text{efp}} I_q$,

то задача (P) полиномиально разрешима.

Доказательство. Согласно п. а) допустимое решение задачи (P) можно получить за время $\text{poly}(n)$.

Согласно п. б) строим экземпляр I_p (за время, не большее $\text{poly}(n)$) (P_I) такой, что x^* — оптимальное решение относительно допустимого множества G_{I_p}.

Согласно п. в) за время, не большее $\text{poly}(n)\cdot\text{poly}(n)=[\text{poly}(n)]^2$, получаем оптимальное решение x^* задачи (P) (поскольку в последовательности $I_1,\ldots,I_q$ $\exists : G_{I_j}=G$).

Таким образом, за время, не большее $\text{poly}(n)+\text{poly}(n)+[\text{poly}(n)]^2$, получим оптимальное решение задачи (P).

Замечание 3. Следует обратить внимание на общность постановки задачи (P): нет никаких ограничений на целевую функцию $f(x)$ и допустимую область G.

3. СЛОЖНОСТЬ ПОСТОПТИМАЛЬНОГО АНАЛИЗА ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВАМИ

Задачу о покрытии множествами будем рассматривать в постановке (задача $\Pi(A,c)$):

$$\min\left\{ f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \,\middle|\, x\in Q(A)\right\},$$

$$Q(A)=\left\{ x\in B^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 1,\ i=1,\ldots,m\right\},$$

$A=\{a_{ij}\}$, $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$; $A-(m,n)$ — булева матрица $(m\leq n)$; $c_i>0$, $i=1,\ldots,n$.

Для булевых (m,n)-матриц $A=\{a_{ij}\}$, $B=\{b_{ij}\}$ введем метрику $\rho(A,B)=\sum_{i,j}\left|a_{ij}-b_{ij}\right|$.

Пусть x^* — оптимальное решение экземпляра I задачи о покрытии $\Pi(A,c)$ и A' такая, что $\rho(A,A')=1$.

Можно ли за полиномиальное время определить, что x^* остается оптимальным решением задачи $\Pi(A',c)$, и если нет, то найти это решение? В связи с этим пусть Find $(\Pi(A',c),x^*)$ — процедура, которая определяет оптимальное решение x^* задачи $\Pi(A',c)$, исходя из оптимального решения x^* задачи $\Pi(A,c)$ (результат x^*).

Лемма 1. Существует полиномиальный алгоритм, который содержит не больше $\dfrac{c_{\max}}{c_{\min}}\cdot n$ шагов, для определения допустимого решения задачи $\Pi(A,c)$ $(c_{\max}=\max\limits_i\{c_i\};\ c_{\min}=\min\limits_i\{c_i\})$.

Доказательство. Используем алгоритм локального поиска — метод вектора спада с начальным приближением $x^0=(1,\ldots,1)$ [2].

Теорема 3 [2]. Допустим, что функция $f(x)$, определенная на множестве G (задача (P)), удовлетворяет условиям:

1) она ограничена снизу на G, т.е. существует такая константа c, что $f(x)\geq c$ для произвольной точки $x\in G$;

2) существует такое число $\delta > 0$, что для произвольных двух точек x', $x'' \in G$ таких, что $f(x') \neq f(x'')$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| \geq \delta$.

Тогда при произвольном выборе начального приближения $x^0 \in G$ радиуса $r > 0$ процесс вычислений по алгоритму сходится за конечное число шагов, которое не превосходит величины $(f(x^0) - c) * \delta^{-1}$.

В данном случае, поскольку $c_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, из условия 1) имеем $f(x) \geq 0$, из условия 2) — $\delta = c_{\min}$; $f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} c_i \leq n \cdot c_{\max}$, что и доказывает лемму 1.

Пусть $M = \{1, \ldots, m\}$, $N = \{1, \ldots, n\}$, $K_1 = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — некоторая выборка из N, объемом $k (1 \leq k < n, k < m)$. Точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ такая, что $\alpha_j = 1$ при $j \in K_1$, $\alpha_j = 0$ при $j \in N \setminus K_1$, а $\alpha^i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i) \in B^n$ такая, что $\alpha_i^i = 1$, $\alpha_j^i = 0$ при $j \neq i$. Опишемо клас $\{A_\alpha\}$ булевых (m, n)-матриц $A = \{A_{ij}\}$. $A \in \{A_\alpha\}$ тогда и только тогда, когда матрица A не содержит одинаковых и нулевых строк и, кроме этого, выполняются условия:

• у матрицы A есть подматрица $A^1 = \begin{pmatrix} \alpha^{i_1} \\ \ldots \\ \alpha^{i_k} \end{pmatrix}$;

• у матрицы A есть подматрица $A^2 = \{a_{ij}\} (i \in M \setminus K_1, j \in N)$ такая, что для произвольного $i \in M \setminus K_1$ $\sum_{j \in K_1} a_{ij} \geq 1$ остальные элементы у A^2 произвольны.

Пусть $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in B^n$ такой, что $x_{i_1}^* = \ldots = x_{i_k}^* = 1$, остальные координаты вектора x^* равны 0, $A^* \in \{A_\alpha\}$.

Лемма 2. x^* — оптимальное решение экземпляра I задачи $\Pi(A^*, c)$.

Доказательство следует с того, что x^* — единственное допустимое решение экземпляра I задачи, такое, что не существует $x' \in Q(A^*)$, $x' \leq x^*$, $x' \neq x^*$, следовательно, оно и будет оптимальным.

Теорема 4. Задача о покрытии полиномиально разрешима для произвольного экземпляра $I \in \Pi(A, c)$, если процедуру Find $(\Pi(A', c), x^*)$ можно выполнить за полиномиальное время для произвольного экземпляра I задачи $\Pi(A', c)$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.

Пункт а) следует из леммы 1, и пусть x^* — соответствующее допустимое решение задачи $\Pi(A, c)$.

Пункт б) следует из леммы 2.

Покажем, что имеет место п. в). Будем исходить из матрицы A^*, применяя процедуру Find $(\Pi(A', c), x^*)$. Пусть для произвольной булевой (m, n)-матрицы A $T(A)$ — преобразование матрицы A с заменой произвольного ее одного элемента 0 на 1, или 1 на 0. Будем писать, что $A' = T(A)$, если после применения к A преобразования T получилась матрица A' (ясно, что $\rho(A, A') = 1$).

Произвольную матрицу A можно получить из матрицы A^*, применяя не больше $m \cdot n$ преобразований T:

$$A^* \xrightarrow{T} A_1 \xrightarrow{T} A_2 \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} A_k = A, \tag{1}$$

где $A_1 = T(A^*)$, $\rho(A_1, A^*) = 1$, $A_{i+1} = T(A_i)$, $\rho(A_{i+1}, A_i) = 1$, $i = 1, \ldots, k-1$; $k \leq m \cdot n \leq n^2$.

Применяя к последовательности (1) полиномиальную процедуру Find $(\Pi(A', c), x^*)$ k раз ($k \leq m \cdot n \leq n^2$), получим, что за полиномиальное время построено оптимальное решение x^* для произвольного экземпляра I задачи $\Pi(A,c)$ и соответствующую последовательность $I_1, I_2, \ldots, I_k, I_{k+1}$ экземпляров семейства задач (что соответствуют $\Pi(A,c)$), п. в) теоремы 2, причем $I_1 \propto_{\mathrm{efp}} I_2 \propto_{\mathrm{efp}} \ldots$ $\ldots \propto_{\mathrm{efp}} I_k \propto_{\mathrm{efp}} I_{k+1}$, где $I_1 \in \Pi(A^*, c)$, $I_2 \in \Pi(A_1, c)$, $I_3 \in \Pi(A_2, c)$, $\ldots$, $\ldots$, $I_k \in \Pi(A_{k-1}, c)$, $I_{k+1} \in \Pi(A_k, c)$, $A_k = A$.

С помощью теоремы 2 получаем утверждение теоремы 4.

Следствие 1. Если $P \neq NP$, то существует такой экземпляр I задачи $\Pi(A', c)$, что процедура Find $(\Pi(A', c), x^*)$ не может быть выполнена за полиномиальное время.

Доказательство следует из применения принципа контрпозиции к теореме 4 (если *NP*-полная задача о покрытии полиномиально разрешима для произвольного экземпляра I, то отсюда следует, что $P = NP$).

Следствие 2. Если $P \neq NP$, то существует такой экземпляр I задачи $\Pi(A,c)$, что проведение постоптимального анализа для пары (I, I') неэффективно (I' получается из I заменой матрицы A на A').

Теорема 4 и следствие из нее показывают сложность проведения постоптимального анализа задачи о покрытии множествами. Если матрица ограничений задачи о покрытии отличается от матрицы ограничений исходной задачи лишь одной позицией, то не существует полиномиального алгоритма (метода), который может проверить на оптимальность или найти оптимальное решение задачи.

4. СЛОЖНОСТЬ ПОСТОПТИМАЛЬНОГО АНАЛИЗА ЗАДАЧИ О РАНЦЕ

Рассмотрим одномерную булеву задачу о ранце в постановке ($R(a,b,c)$):

$$\max\{f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid x \in Q(a,b)\},$$

$$Q(a,b) = \{x \in B^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b\}.$$

Будем считать, что все a_j, c_j и b — целые неотрицательные числа: $a = (a_1, \ldots, a_n) \in Z^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n) \in Z^n$, $b \in Z^1$, $Z^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n\} \mid x_i \geq 0$, x_i — целые, $i = 1, \ldots, n$. Известно, что задача $R(a,b,c)$ — *NP*-полная [10].

Для $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in Z^{n+1}$, $y = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) \in Z^{n+1}$ введем метрику $\rho(x,y) = \sum_{i=0}^{n+1} |x_i - y_i|$. Пусть $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n, b) \in Z^{n+1}$, а $\bar{a}'$ такой, что $\rho(\bar{a}, \bar{a}') = 1$ (задачу $R(a,b,c)$ можно обозначить и так: $R(\bar{a}, c)$). Если x^* — оптимальное решение экземпляра I задачи $R(\bar{a}, c)$, то можно ли за полиномиальное время определить, что x^* остается оптимальным решением задачи $R(\bar{a}', c)$, а если это не так, то определить это решение? В связи с этим пусть Find $(R(\bar{a}', c), x^*)$ — процедура, которая определяет оптимальное решение x^* задачи $R(\bar{a}', c)$, исходя из оптимального решения x^* задачи $R(\bar{a}, c)$ (результат — в x^*).

Будем действовать аналогично, как и при доказательстве теоремы 4.

Лемма 1′. Существует полиномиальный алгоритм, который содержит не более $\frac{c_{\max}}{c_{\min}} \cdot n$ шагов, для определения допустимого решения задачи $R(\bar{a}, c)$ ($c_{\max} = \max_i\{c_i\}$; $c_{\min} = \min_i\{c_i\}$).

Доказательство. Используем алгоритм локального поиска — метод вектора спада с начальным приближением $x^0 = (0, \ldots, 0)$.

Теорема 3′ [2] . Допустим, что функция $f(x)$, определена на множество G (задача (P) с заменой min на max), удовлетворяет условиям:

1) она ограничена сверху на G, т.е. существует такая константа c, что $f(x) \le c$ для произвольной точки $x \in G$;

2) существует такое число $\delta > 0$, что для произвольных двух точек $x', x'' \in G$ таких, что $f(x') \ne f(x'')$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| \ge \delta$.

Тогда при произвольном выборе начального приближения $x^0 \in G$ радиуса $r > 0$ процесс вычислений по алгоритму сходится за конечное число шагов, которое не превосходит величины $(c - f(x^0))*\delta^{-1}$.

В данном случае ($x^1 = (1, \ldots, 1)$) условие 1) дает $f(x) \le c = f(x^1) = \sum_{i=1}^{n} c_i \le$ $\le n * c_{\max}$, $f(x^0) = 0$, условие 2) — $\delta = c_{\min}$, что и доказывает лемму.

Будем пользоваться теоремой $2'$, полученной из теоремы 2 заменой п. а) на следующий пункт: существует полиномиальный алгоритм для нахождения допустимого решения x задачи (P) такого, что не существует $x' \in G$, $x' \ge x$, $x' \ne x$.

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $K_1 = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — некоторая выборка из N объема $k (1 \le k \le n)$, $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in B^n$ такой, что $x_{i_1^*} = \ldots = x_{i_k^*} = 1$, остальные координаты вектора x^* равны 0. Пусть вектор $\overline{a}^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*, b^*)$ такой, что $a_{i_1^*} = \ldots = a_{i_k^*} = 1, a_j^* = k + 1$ при $j \in N \setminus K_1$, $b^* = k$.

Лемма 2′ . x^* — оптимальное решение экземпляра I задачи $R(\overline{a}^*, c)$.

Доказательство следует из того, что x^* — единственное оптимальное решение I задачи $R(\overline{a}^*, c)$ такое, что не существует $x' \in Q(a^*, b^*)$, $x' \ge x^*$, $x' \ne x^*$.

Теорема 4′ . Задача о ранце полиноминально разрешима для произвольного экземпляра $I \in R(\overline{a}, c)$, если процедуру Find ($R(\overline{a}', c)$, x^*) можно выполнить за полиноминальное время для произвольного экземпляра I задачи $R(\overline{a}', c)$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой $2'$.

Пункт а) следует из леммы $1'$, и пусть x^* — соответствующее допустимое решение задачи $R(\overline{a}, c)$, п. б) следует из леммы $2'$. Сформулируем п. в). Будем считать, что компоненты вектора $\overline{a}$ ограничены сверху константой c, которая не зависит от размерности задачи n.

Будем исходить из вектора $\overline{a}^*$, применяя процедуру Find ($R(\overline{a}^*, c), x^*$). Пусть для произвольного вектора $a \in Z^{n+1}$ $T(a)$ — преобразование вектора a с увеличением или уменьшением ровно одного его компонента на единицу. Будем считать, что $a' = T(a)$, если после применения к a преобразования T получим вектор a' (ясно, что $\rho(a, a') = 1$).

Произвольный вектор $\overline{a}$ можно получить из вектора $\overline{a}^*$, применяя не больше $c \cdot (n+1)$ преобразований T:

$$\overline{a}^* \xrightarrow{T} \overline{a}^1 \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} \overline{a}^k = \overline{a}; \tag{2}$$

где $\overline{a}^1 = T(\overline{a}^*)$, $\rho(\overline{a}^1, \overline{a}^*) = 1$; $\overline{a}^{i+1} = T(\overline{a}^i)$, $\rho(\overline{a}^{i+1}, \overline{a}^i) = 1$, $i = 1, \ldots, k-1$; $k \le c \cdot (n+1)$.

Применяя к последовательности (2) полиномиальную процедуру Find ($R(\overline{a}^*, c), x^*$) k раз ($k \le c \cdot (n+1)$), получим, что за полиномиальное время (не больше, чем $c * (n+1) * \mathrm{poly}(n)$) построено оптимальное решение x^* для произвольного экземпляра I задачи $R(\overline{a}, c)$ и соответствующую последовательность $I_1, I_2, \ldots, I_k, I_{k+1}$ экземпляров семейства задач (которые соответствуют $R(\overline{a}^*, c)$)

с п. в) теоремы 2′, причем

$$I_1 \propto_{\text{efp}} I_2 \propto_{\text{efp}} \ldots \propto_{\text{efp}} I_k \propto_{\text{efp}} I_{k+1},$$
$$I_1 \in R(\overline{a}^*, c),\ I_2 \in R(\overline{a}^1, c),\ I_3 \in R(\overline{a}^2, c),\ \ldots,\ I_k \in R(\overline{a}^{k-1}, c),$$
$$I_{k+1} \in R(\overline{a}^k, c),\ \overline{a}^k = \overline{a}.$$

Применяя теорему 2′, получим утверждение теоремы 4′.

Замечание 4. Доказательство теоремы 4′ подходит для случая, когда компоненты вектора $\overline{a}$ ограничены сверху полиномом от размерности задачи $(\text{poly}(n))$.

Следствие 1′. Если $P \neq NP$, то существует экземпляр I задачи $R(\overline{a}', c)$ такой, что процедура Find $(R(\overline{a}', c), x^*)$ не может быть выполнена за полиномиальное время.

Следствие 2′. Если $P \neq NP$, то существует экземпляр I задачи $R(\overline{a}, c)$ такой, что проведение постоптимального анализа для пары (I, I') неэффективно (I' получается из I заменой вектора $\overline{a}$ на $\overline{a}'$).

Таким образом, теорема 4′ и следствия из нее показывают сложность проведения постоптимального анализа задачи о ранце.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. Вопросы устойчивости, параметрический и постоптимальный анализ задач дискретной оптимизации // Кибернетика. — 1983. — № 4. — С. 71–80.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. — Киев: Наук. думка, 2003. — 261с.
3. Geoffrion A.M., Nauss R. Parametric and postoptimality analysis in integer linear programming // Management Science. — 1977. — **23.** — N 5. — P. 453–466.
4. Roodman G.M. Postoptimality analysis in zero one programming by implicit enumeration // Naval Res. Logist. Quart. — 1972. — **19**, N 3. — P. 435–447.
5. Greenberg H.J. An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization // D.L. Woodruff (ed.) Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming, and Heuristic search. — N.Y.: Kluwer Acad. Publ., 1998. — P. 97–148.
6. Sotskov Yu. N., Leontev V.K., Gordeev E.N. Some Concepts of Stability Analysis in Combinatorial Optimization // Discrete Appl. Mathemat. — 1995. — **58**. — P. 169–190.
7. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. О количественной мере устойчивости в векторной задаче целочисленного линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1998. — **38**, №11. — С. 1801–1805.
8. Леонтьев В.К. Устойчивость в линейных дискретных задачах // Пробл. кибернетики. — 1979. — Вып. 35. — С. 169–184.
9. Van Hoesel S., Wagelmans A. On the complexity of postoptimality analysis of 0/1 programs // Discrete Appl. Mathemat. — 1999. — **91**. — P. 251–263.
10. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.

Поступила 28.05.2009