УДК 519.64: 517.443: 519.254-37

**В.К. ЗАДИРАКА, С.С. МЕЛЬНИКОВА, Л.В. ЛУЦ**

# ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ СИЛЬНОЙ ОСЦИЛЛЯЦИИ В ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ КЛАССЕ ЛИПШИЦА

**Ключевые слова:** *быстроосциллирующие функции, оптимальный по точности алгоритм.*

При решении таких классов задач, как статистическая обработка экспериментальных данных, цифровая фильтрация, распознавание образов, моделирование оптических систем и синтезированных голограмм, краевые задачи для уравнений в частных производных и другие, возникает необходимость в вычислении интегралов вида [1]

$$I_1(\omega)=\int_0^1 f(x)\sin\omega x dx\,,\quad I_2(\omega)=\int_0^1 f(x)\cos\omega x dx\,, \tag{1}$$

где $f(x)\in F$ ($F$ — некоторый заданный класс функций), $\omega$ — произвольное вещественное число, $|\omega|\ge 2\pi$ и информация о $f(x)$ задана не более чем в $N$ точках.

Данная работа, которая является дальнейшим продолжением и развитием результатов, полученных в [2], посвящена нахождению оптимальных оценок [3] и построению оптимальных по точности квадратурных формул вычисления преобразования Фурье финитных функций вида (1) в предположении, что $f(x)\in C_{L,N}$, $C_{L,N}$ — интерполяционный класс функций, удовлетворяющих условию Липшица ($|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$, $x_1, x_2\in[0,1]$) и заданных $2N$ фиксированными значениями $\{f_i\}_0^{N-1}$ и $\{x_i\}_0^{N-1}$. Указанный способ задания исходной информации можно использовать для сужения класса $F$ на класс $F_N$. Он приближает к реальной ситуации, которая возникает при решении конкретной задачи [3]. В статье рассмотрен случай сильной осцилляции подынтегральной функции: $|\omega|\ge 2\pi$ и $N\le|\omega|$.

Обозначим $R=R(f,A,\omega)$ результат приближенного вычисления $I(\omega)$ с помощью квадратурной формулы $A$. Рассмотрим следующие характеристики:

$$\delta(f,A,\{f_i\}_0^{N-1},\omega)=\rho(I,R)\,,$$
$$\delta(F_N,A,\omega)=\sup_{f\in F_N}\delta(f,A,\{f_i\}_0^{N-1},\omega)\,, \tag{2}$$
$$\delta=\delta(F_N,\omega)=\inf_A\delta(F_N,A,\omega)\,.$$

Здесь $\rho(I,R)$ — погрешность численного интегрирования: $\rho(I,R)=|I(\omega)-R|$.

Квадратурную формулу $A^*$, на которой достигается оптимальная оценка $\delta$, назовем оптимальной по точности. Если для квадратурной формулы $A^*$ $\delta(F_N,A^*,N,\omega)\le\delta+\eta$, то $A^*$ назовем оптимальной по точности с точностью до $\eta$. Если $\eta=o[\delta],O[\delta]$, то $A^*$ назовем соответственно асимптотически оптимальной или оптимальной по порядку.

Для построения и обоснования оптимальных по точности и близких к ним квадратурных формул вычисления $I(\omega)$ в классе $F_N\equiv C_{L,N}$ будем применять метод граничных функций, который состоит в следующем [3, 4].

Строятся верхняя (мажоранта) и нижняя (миноранта) границы возможных значений интеграла $I(\omega)$:

$$I^{+}(\omega)=\sup_{f\in F_N} I(\omega),\ I^{-}(\omega)=\inf_{f\in F_N} I(\omega);$$

$I^{\pm}(\omega)$ достигаются на $f^{\pm}(x)\in F_N$ — соответственно мажоранте и миноранте области неопределенности входной информации функций класса $F_N \subset F$.

**Определение.** Функцию $f^{\pm}(x)$ назовем мажорантой (минорантой) класса функций $F_N$, определенных в некоторой области $D$, если

1) $f^{+}(x)\geq f(x)$ $(f^{-}(x)\leq f(x))$ для всех $f\in F_N, x\in D$;

2) $f^{+}(x)\in F_N$ $(f^{-}(x)\in F_N)$.

Чебышевский центр $I^{*}(\omega)$ и чебышевский радиус $\rho^{*}(\omega)$ области неопределенности решения задачи (1), которые представляют собой соответственно оптимальную по точности квадратурную формулу вычисления $I(\omega)$ и оптимальную оценку погрешности численного интегрирования $I(\omega)$ на классе $F_N$, вычисляются по формулам [3]:

$$I^{*}(\omega)=\frac{I^{+}(\omega)+I^{-}(\omega)}{2},\quad \rho^{*}(\omega)=\frac{I^{+}(\omega)-I^{-}(\omega)}{2}. \tag{3}$$

При данной информации о задаче никакая квадратурная формула не может дать точность меньше, чем $\rho^{*}(\omega)$. Для интерполяционных классов $F_N$ чебышевский радиус $\rho^{*}(\omega)$ совпадает с оптимальной оценкой $\delta$.

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма.** Рассмотрим задачу вычисления интеграла $I_1(\omega)$ и $f(x)\in C_{L,N}$, $f(x_i)=f_i=0$, $i=\overline{0,N-1}$. Пусть на отрезках $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ имеется $k_i$ колебаний функции $\sin\omega x$ и выполнено условие **A**: $\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]+1$ узлов $x_i$ входят в число нулей $\sin\omega x$. Тогда при $N<|\omega|$ функция $p(x)$ вида

$$p(x)=\begin{cases} L(x-x_{ik})\operatorname{sign}\sin\omega x_{ik}, & x_{ik}\leq x\leq \frac{1}{2}(x_{ik}+x_{ik+1}),\\ L(x_{ik+1}-x)\operatorname{sign}\sin\omega x_{ik}, & \frac{1}{2}(x_{ik}+x_{ik+1})\leq x\leq x_{ik+1}, \end{cases} \tag{4}$$

где $k=\overline{0,k_i-1}$, $x_{i0}=x_i$, $x_{ik_i}=x_{i+1}$, $x_{ik}=\frac{\pi}{2|\omega|}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_i+\frac{1}{2}\right]+2k+1\right\}$ — нули $\sin\omega x$ на $\Delta x_i$, $k_i=\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_{i+1}\right]-\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_i\right]$, $i=\overline{0,N-1}$, является мажорантой области неопределенности функций класса $C_{L,N}$.

**Доказательство**. Доказательство проведем методом от противного. Пусть существует функция $g(x)\neq p(x)$, на которой достигается $\sup\limits_{f(x)\in C_{L,N}} I_1(\omega)$, т.е.

$$\sup_{f(x)\in C_{L,N}} I_1(\omega)=\int_0^1 g(x)\sin\omega x dx.$$

Представим функцию $g(x)$ в виде

$$g(x)=p(x)+\varphi(x),\ g(x_i)=p(x_i)=0,\ i=\overline{0,N-1}.$$

Тогда

$$\int_0^1 g(x)\sin\omega x dx=\int_0^1 p(x)\sin\omega x dx+\int_0^1 \varphi(x)\sin\omega x dx=$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\sin\omega x dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(x)\sin\omega x dx\right\}.$$

Функция $\varphi(x)$ должна быть такой, чтобы $g(x) \in C_{L,N}$. Докажем, что при этом

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x) \sin \omega x dx \le 0. \tag{5}$$

Действительно,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x) \sin \omega x dx = \sum_{k=0}^{k_i-1} \int_{x_{ik}}^{x_{ik+1}} \varphi(x) \sin \omega x dx = \int_{x_i}^{x_i+\frac{\pi}{2|\omega|}} \varphi(x) \sin \omega x dx +$$

$$+(k_i-1)\left( \int_{x_i+\frac{\pi}{2|\omega|}}^{x_i+\frac{3\pi}{2|\omega|}} \varphi(x) \sin \omega x dx + \int_{x_i+\frac{3\pi}{2|\omega|}}^{x_i+\frac{5\pi}{2|\omega|}} \varphi(x) \sin \omega x dx \right) +$$

$$+ \int_{x_{i+1}-\frac{\pi}{2|\omega|}}^{x_{i+1}} \varphi(x) \sin \omega x dx = v_1(\omega) + (k_i-1)\{v_2(\omega) + v_3(\omega)\} + v_4(\omega).$$

Исследуем возможное поведение $\int \varphi(x) \sin \omega x dx$ на интервалах $\left[x_i, x_i + \frac{\pi}{2|\omega|}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2|\omega|}, \frac{3\pi}{2|\omega|}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2|\omega|}, \frac{5\pi}{2|\omega|}\right]$ и $\left[x_{i+1} - \frac{\pi}{2|\omega|}, x_{i+1}\right]$.

1. Пусть $x \in \left[x_i, x_i + \frac{\pi}{2|\omega|}\right]$.

1$'$. Пусть $\left[x_i, x_i + \frac{\pi}{2|\omega|}\right] \in \left[\frac{2k\pi}{|\omega|}, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{|\omega|}\right]$, $k = 0, 1, 2\ldots$ В этом случае $\sin \omega x \ge 0$ и функция $\varphi(x)$ должна быть убывающей с областью значений: $-2L(x - x_i) \le \varphi(x) \le 0$, иначе $g(x) \notin C_{L,N}$. Поскольку $g(x_i) = 0$, $i = \overline{0, N-1}$, $p(x_i) = 0$, следовательно, $\varphi(x_i) = 0$. Так как $\varphi(x)$ не может возрастать, значит, $\varphi(x) \le 0$. Учитывая, что $\sin \omega x \ge 0$, получаем $\int_{x_i}^{x_i+\frac{\pi}{2|\omega|}} \varphi(x) \sin \omega x dx \le 0$.

2$'$. Пусть $\left[x_i, x_i + \frac{\pi}{2|\omega|}\right] \in \left[(2k+1)\frac{\pi}{|\omega|}, \left(2k + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{|\omega|}\right]$, $k = 0, 1, 2\ldots$ В этом случае $\sin \omega x \le 0$ и функция $\varphi(x)$ не убывает. Она может быть только возрастающей (область ее значений $0 \le \varphi(x) \le 2L(x - x_i)$, иначе $g(x) \notin C_{L,N}$). Повторяя аналогичные п. 1$'$ рассуждения, получаем, что и в этом случае

$$\int_{x_i}^{x_i+\frac{\pi}{2|\omega|}} \varphi(x) \sin \omega x dx \le 0.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$v_1(\omega) \le 0. \tag{6}$$

2. Пусть $x \in \left[\frac{\pi}{2|\omega|}, \frac{3\pi}{2|\omega|}\right]$. На этом интервале $p(x)$ является убывающей, следовательно, $\varphi(x)$ должна быть возрастающей, иначе $g(x) \notin C_{L,N}$. Тогда для произ-

вольного $\delta \in \left[0, \frac{\pi}{2|\omega|}\right]$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{|\omega|} - \delta\right) \le \varphi\left(\frac{\pi}{|\omega|} + \delta\right). \qquad (7)$$

По определению интеграла

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2|\omega|}}^{\frac{3\pi}{2|\omega|}} \varphi(x) \sin \omega x dx = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{2M} \varphi\left(\frac{\pi}{2|\omega|} + \xi_i\right) \sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{2|\omega|} + \xi_i\right)\right) \Delta t,$$

$\xi_i \in \Delta t$, $\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{\pi}{2\omega M}$, где $M$ — количество интервалов длины $\Delta t$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2|\omega|}, \frac{\pi}{|\omega|}\right]$.

Пусть $\xi_i = t_i + \Theta_i \Delta t = (i + \Theta_i) \Delta t$, $0 \le \Theta_i \le 1$. Так как $\frac{\pi}{2\omega} + (i + \Theta_i) \Delta t = \frac{\pi}{\omega} - -\Delta t (M - i - \Theta_i)$, получим

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2|\omega|}}^{\frac{3\pi}{2|\omega|}} \varphi(x) \sin \omega x dx \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{2M} \varphi\left(\frac{\pi}{2|\omega|} + (i + \Theta_i) \Delta t\right) \sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{2|\omega|} + (i + \Theta_i) \Delta t\right)\right) \Delta t =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{2M} \varphi\left(\frac{\pi}{|\omega|} - (M - i - \Theta_i) \Delta t\right) \sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{|\omega|} - (M - i - \Theta_i) \Delta t\right)\right) \Delta t =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{2M} \left\{\varphi\left(\frac{\pi}{|\omega|} - (i + \Theta_i) \Delta t\right) \sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{|\omega|} - (i + \Theta_i) \Delta t\right)\right) + \varphi\left(\frac{\pi}{|\omega|} + (i + \Theta_i) \Delta t\right) \times\right.$$

$$\left.\times \sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{|\omega|} + (i + \Theta_i) \Delta t\right)\right)\right\} \Delta t.$$

Поскольку $\forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2\omega}\right]$ $\sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{\omega} + \alpha\right)\right) = -\sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{\omega} - \alpha\right)\right)$, получим

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2|\omega|}}^{\frac{3\pi}{2|\omega|}} \varphi(x) \sin \omega x dx = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{2M} \left\{\varphi\left(\frac{\pi}{|\omega|} - (i + \Theta_i) \Delta t\right) - \varphi\left(\frac{\pi}{2|\omega|} + (i + \Theta_i) \Delta t\right)\right\} \times$$

$$\times \sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{2|\omega|} - (i + \Theta_i) \Delta t\right)\right) \Delta t.$$

Так как $\sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{2|\omega|} - (i + \Theta_i) \Delta t\right)\right) \ge 0$, $\frac{\pi}{2\omega} \le \frac{\pi}{\omega} - (i + \Theta_i) \Delta t \le \frac{\pi}{2\omega}$, $i = \overline{0, M-1}$, и учитывая соотношение (7), окончательно имеем

$$v_2(\omega) \le 0. \qquad (8)$$

По аналогии с доказательством оценки (8) легко показать, что в случае $x \in \left[\frac{3\pi}{2|\omega|}, \frac{5\pi}{2|\omega|}\right]$ имеем $v_3(\omega) \le 0$.

Повторяя рассуждения, аналогичные п. 1, получим, что в случае $x \in \in \left[ x_{i+1} - \frac{\pi}{2|\omega|}, x_{i+1} \right]$ имеем $v_4(\omega) \le 0$.

Таким образом, утверждение (5) доказано. Следовательно, $\sup\limits_{f(x) \in C_{L,N}} \int\limits_0^1 g(x) \sin \omega x dx$ будет достигаться только в том случае, если $g(x) \equiv p(x)$. В противном случае для любой функции $g(x) \in C_{L,N}$ имеем $\int\limits_0^1 g(x) \sin \omega x dx < \int\limits_0^1 p(x) \sin \omega x dx$, т.е. $p(x)$ является функцией, на которой достигается $\sup\limits_{f(x) \in C_{L,N}} I_1(\omega)$.

**Теорема 1.** Пусть $f(x) \in C_{L,N}$, $f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0, N-1}$, $N < |\omega|$, на отрезках $\Delta x_i$ имеется $k_i$ колебаний функции $\sin \omega x$ и выполнено условие **A**. Тогда функции

$$f^+(x) = p_i^*(x) + f_i + \frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}(x - x_i), \tag{9}$$

$$f^-(x) = f_i - \frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}(x - x_i) - p_i^*(x), \tag{10}$$

$x \in \Delta x_i$, $i = \overline{0, N-1}$, $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $p^*_{i(x)}$ определяется соотношением (3) при $L_i = L - \frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}$, являются соответственно мажорантой и минорантой области неопределенности исходных данных $C_{L,N}$, причем

$$\sup_{f(x) \in C_{L,N}} I_1(x) = \int\limits_0^1 f^+(x) \sin \omega x dx, \tag{11}$$

$$\inf_{f(x) \in C_{L,N}} I_1(x) = \int\limits_0^1 f^-(x) \sin \omega x dx. \tag{12}$$

**Доказательство**. Любую функцию $f(x) \in C_{L,N}$, $f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0, N-1}$, можно представить в виде

$$f(x) = f_1(x) + f_i + \frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}(x - x_i), \ x \in \Delta x_i,$$

где $f_1(x)$ — некоторая функция, равная нулю в узлах $\{x_i\}_0^{N-1}$ и такая, чтобы $f(x) \in C_{L,N}$. Тогда

$$\sup_{f(x) \in C_{L,N}} I_1(x) = \int\limits_0^1 f(x) \sin \omega x dx = \sup_{f(x) \in C_{L,N}} \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin \omega x dx =$$

$$= \sup_{f(x) \in C_{L,N}} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f_1(x) \sin \omega x dx + f_i \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \sin \omega x dx + \frac{\Delta f_i}{\Delta x_i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \sin \omega x dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{|\omega|} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ f_i (\cos \omega x_i - \cos \omega x_{i+1}) - \Delta x_i \cos \omega x_{i+1} + \frac{1}{|\omega|} (\sin \omega x_{i+1} - \sin \omega x_i) \right\} +$$

$$+ \sup_{f(x) \in C_{L,N}} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f_1(x) \sin \omega x dx.$$

Поскольку $f(x) \in C_{L,N}$, функция $f_1(x) \in C_{L_i,N}$, где $L_i = L - \dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_i},\ i = \overline{0, N-1}$. Так как лемма справедлива для любого $L$, то, используя ее результат для $L = L_i$ на каждом отрезке $\Delta x_i$, можно утверждать, что

$$\sup_{f(x)\in C_{L,N}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_1(x) \sin \omega x dx = \sup_{f(x)\in C_{L_i,N}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_1(x) \sin \omega x dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_i^*(x) \sin \omega x dx,$$

где $p_i^*(x)$ определяются соотношениями (4) при $L = L_i$.

Следовательно, $\sup\limits_{f(x)\in C_{L,N}} I_1(\omega)$ достигается в случае, когда $f(x) \equiv f^+(x)$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать, что функция (10) является минорантой области неопределенности исходных данных функций класса $C_{L,N}$, доставляющей $\inf\limits_{f(x)\in C_{L,N}} I_1(x)$ (12).

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 справедливо соотношение для оптимальной оценки

$$\delta(C_{L,N}, \omega) = \frac{1}{2} \left| \sup_{f(x)\in C_{L,N}} I_1(\omega) - \inf_{f(x)\in C_{L,N}} I_1(\omega) \right| =$$

$$= \frac{2L}{\omega^2} \left\{ \left[ \frac{|\omega|}{\pi} \right] - 2 \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \left[ \frac{|\omega|}{\pi} x_{i+1} \right] - \left[ \frac{|\omega|}{\pi} x_i \right] \right\} \sin^2 \frac{\pi |\Delta f_i|}{4L \Delta x_i} \right\} + A(\omega),$$

где

$$A(\omega) = \frac{L}{\omega} \left| \frac{2}{\omega} \sin \frac{1}{2} \left( \omega \left( 1 - \left[ \frac{|\omega|}{\pi} \right] \frac{\pi}{|\omega|} \right) \right) \cos \left( \omega \left( 1 + \frac{\left[ \frac{|\omega|}{\pi} \right] \frac{\pi}{|\omega|} - 1}{2} \right) \right) - \left( 1 - \left( \left[ \frac{|\omega|}{\pi} \right] \frac{\pi}{|\omega|} \right) \cos \omega \right) \right|,$$

причем квадратурная формула

$$R_5(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{k_i-1} \int_{x_{i,k}}^{x_{i,k+1}} f_{ik}^*(x) \sin \omega x dx, \tag{13}$$

где $f_{ik}^*(x)$ — чебышевский центр области неопределенности функций класса $C_{L,N}$ на отрезках $\lfloor x_{i,k}, x_{i,k+1} \rfloor$,

$$f_{ik}^*(x) = \begin{cases} f_i + \dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_i} \dfrac{\pi k}{|\omega|}, & x_{i,k} \le x \le \bar{x}_{i,k}, \\ f_i + \dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_i} \dfrac{\pi k}{|\omega|} + L \left\{ x - \left\{ \left[ \dfrac{|\omega|}{\pi} x_i + 1 \right] + k + \dfrac{1}{2} \right\} \dfrac{\pi}{|\omega|} - \dfrac{1}{2L} \dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_i} \dfrac{\pi k}{|\omega|} \right\}, & \bar{x}_{i,k} \le x \le \bar{\bar{x}}_{i,k}, \\ f_i + \dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_i} (k+1) \dfrac{\pi}{|\omega|}, & \bar{\bar{x}}_{i,k} \le x \le x_{i+1}, \end{cases}$$

$\bar{x}_{i,k} = \dfrac{x_{i,k} + x_{i,k+1}}{2} - \dfrac{|\Delta f_i|}{\Delta x_i} \dfrac{\pi}{|\omega|}$, $\bar{\bar{x}}_{i,k} = \dfrac{x_{i,k} + x_{i,k+1}}{2} + \dfrac{|\Delta f_i|}{\Delta x_i} \dfrac{\pi}{|\omega|}$, $k_i$, $x_{i,k}$ определены в лемме, является оптимальной квадратурной формулой вычисления $I_1(\omega)$ в классе $C_{L,N}$ при $N < |\omega|$.

**Доказательство**. Для получения оценки снизу погрешности численного интегрирования на классе $C_{L,N}$ оценим чебышевский радиус области неопределенности $C_{L,N}$. Используя доказательство теоремы 3.13 в [3] и соотношения (11), (12), получим

$$\delta(C_{L,N},\omega)=\frac{1}{2}\left|\sup_{f(x)\in C_{L,N}} I_1(\omega)-\inf_{f(x)\in C_{L,N}} I_1(\omega)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 f^+(x)\sin\omega x dx-\int_0^1 f^-(x)\sin\omega x dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1}\int_{x_{i,k}0}^{x_{i,k+1}1}(f^+(x)-f^-(x))\sin\omega x dx\right|=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1}\int_{x_{i,k}0}^{x_{i,k+1}1} f_1(x)\sin\omega x dx,$$

где

$$f_1(x)=\begin{cases} L(x-x_{i,k})\operatorname{sign}\sin\omega x_{i,k}, & x_{i,k}\le x\le \bar{x}_{i,k},\\ \frac{1}{2}\left(L\Delta x_{i,k}\operatorname{sign}\sin\omega x_{i,k}-\frac{\pi|\Delta f_i|}{\Delta x_i\omega}\right), & \bar{x}_{i,k}\le x\le \bar{\bar{x}}_{i,k},\\ L(x_{i,k+1}-x)\operatorname{sign}\sin\omega x_{i,k}, & \bar{\bar{x}}_{i,k}\le x\le x_{i,k+1},\\ i=\overline{0,N-1},\quad k=\overline{0,k_i-1}, & x\notin[x_{N-1,[|\omega|/\pi]},x_N],\\ L(x-x_{N-1,[|\omega|/\pi]}),\ \operatorname{sign}\sin\omega x_{N-1,[|\omega|/\pi]}, & x\in[x_{N-1,[|\omega|/\pi]},1]. \end{cases}$$

Окончательно имеем

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1}\int_{x_{i,k}}^{x_{i,k+1}} f_1(x)\sin\omega x dx\ge$$

$$\ge\frac{4L}{\omega^2}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1}\left|\sin\frac{\omega}{2}(x_{i,k}+x_{i,k+1})\right|\left(\sin^2\frac{\omega\Delta x_{i,k}}{4}-\sin^2\frac{\omega|\Delta f_i|\pi}{L\omega\Delta x_i}\right)\right|+A(\omega),$$

где

$$A(\omega)=\frac{L}{\omega}\left|\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\Delta x_{N-1,[|\omega|/\pi]}\cos\omega\left(1-\frac{\Delta x_{N-1,[|\omega|/\pi]}}{2}\right)-\Delta x_{N-1,[|\omega|/\pi]}\cos\omega\right|=$$

$$=\frac{L}{\omega}\left|\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{\Delta x_{N-1,[|\omega|/\pi]}}{2}\right)\cos\omega\left(1-\frac{\Delta x_{N-1,[|\omega|/\pi]}}{2}\right)-\left(1-\frac{\Delta x_{N-1,[|\omega|/\pi]}}{2}\right)\cos\omega\right|.$$

Тогда

$$\left|\int_0^1 f_1(x)\sin\omega x dx\right|=\frac{4L}{\omega^2}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1}\left\{\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\pi|\Delta f_i|}{4L\Delta x_i}\right\}+A(\omega)\right|=$$

$$=\left|\frac{4L}{\omega^2}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_{i+1}\right]-\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_i+1\right]+1\right\}-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_{i+1}\right]-\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_i+1\right]\right\}\sin^2\frac{\omega|\Delta f_i|\pi}{4L\Delta x_i}+A(\omega)\right|=$$

$$=\frac{2L}{\omega^2}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]-2\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_{i+1}\right]-\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_i\right]\right\}\sin^2\frac{\omega|\Delta f_i|\pi}{4L\Delta x_i}\right\}+A(\omega).\qquad(14)$$

Необходимая оценка снизу доказана.

Получим соответствующую оценку сверху для $\delta_N(C_{L,N}, R_5, \omega)$.

$$\delta_N(C_{L,N}, R_5, \omega) = \sup_{f(x)\in C_{L,N}} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{k_i-1} \int_{x_{i,k}}^{x_{i,k+1}} [f(x) - f_{i,k}^*(x)] \sin \omega x dx \right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{k_i-1} \left\{ \int_{x_{i,k}}^{\bar{x}_{i,k}} (x - x_{i,k}) \operatorname{sign} \sin \omega x_{i,k} \sin \omega x dx + \right.$$

$$+ \frac{L}{2} \int_{\bar{x}_{i,k}}^{\bar{\bar{x}}_{i,k}} \left( \Delta x_{i,k} - \frac{|\Delta f_i \pi|}{L\omega \Delta x_i} \right) \operatorname{sign} \sin \omega x_{i,k} \sin \omega x dx +$$

$$\left. + L \int_{\bar{x}_{i,k}}^{x_{i,k+1}} (x_{i,k+1} - x) \operatorname{sign} \sin \omega x_{i,k} \sin \omega x dx \right\} +$$

$$+ L \int_{x_{N-1,[|\omega|/\pi]}}^{1} (x - x_{N-1,[|\omega|/\pi]}) \operatorname{sign} \sin \omega x_{N-1,[|\omega|/\pi]} \sin \omega x dx =$$

$$= \frac{4L}{\omega^2} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{k_i-1} \left| \sin \frac{\omega}{2} (x_{i,k} + x_{i,k+1}) \right| \left( \sin^2 \frac{\omega \Delta x_{i,k}}{4} - \sin^2 \frac{\omega |\Delta f_i| \pi}{L\omega \Delta x_i} \right) \right| +$$

$$+ \frac{L}{\omega} \left| \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega}{2} \Delta x_{N-1,[|\omega|/\pi]} \cos \omega \left( 1 - \frac{\Delta x_{N-1,[|\omega|/\pi]}}{2} \right) - \Delta x_{N-1,[|\omega|/\pi]} \cos \omega \right| =$$

$$= \frac{4L}{\omega^2} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{k_i-1} \left| \sin \frac{\omega}{2} (x_{i,k} + x_{i,k+1}) \right| \left( \sin^2 \frac{\omega \Delta x_{i,k}}{4} - \sin^2 \frac{\omega |\Delta f_i| \pi}{L\omega \Delta x_i} \right) \right| + A(\omega). \quad (15)$$

Доказательство теоремы завершается сравнением оценок (14) и (15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бахвалов Н.С. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // ЖВМ и МФ. — 1971. — **11**, № 4. — С. 1014–1018.
2. Задирака В.К., Мельникова С.С., Луц Л.В. Оптимальные квадратурные и кубатурные формулы вычисления преобразования Фурье финитных функций одного класса (случай сильной осцилляции) // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 5. — С. 144–164.
3. Задирака В.К. Теория вычисления преобразования Фурье. — Киев: Наук. думка, 1983. — 212 с.
4. Задирака В.К., Мельникова С.С. Цифровая обработка сигналов. — Киев: Наук. думка, 1993. — 294 с.



*Поступила 19.05.2009*