УДК 519.21

П.С. КНОПОВ

О НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Ключевые слова: *случайные поля, полезный сигнал, распознавание, случайный шум, оценка*.

ВВЕДЕНИЕ

Использование теоретико-вероятностных подходов в настоящее время получило широкое развитие в различных областях науки. Даже краткое освещение этих проблем — достаточно трудоемкая и сложная задача, которую в рамках одной статьи трудно разрешить. Но, надеемся, что освещение некоторых прикладных проблем, связанных с применением теории случайных полей, привлечет внимание специалистов при исследовании конкретных научных и прикладных проблем. В настоящей работе они затронуты лишь частично.

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОФИЗИКЕ И ГЕОЛОГИИ

Одной из важнейших проблем в геофизике и геологии является проблема правильной интерпретации статистических наблюдений. Она включает следующие задачи:

а) обнаружение сигнала, характеризующего наличие некоторого геологического или геофизического объекта;

б) собственно его выделение или измерение, состоящее в оценке характеристик сигнала;

в) распознавание нескольких сигналов.

Остановимся сначала подробнее на первой задаче. Предположим, что в точках плоскости измеряются составляющие магнитного поля $u(x, y)$, которые представляют собой наложение детерминированной полезной составляющей $f(x, y)$ и случайной $n(x, y)$:

$$u(x, y) = f(x, y) + n(x, y). \qquad (1)$$

Будем говорить, что $f(x, y)$ определяет поле аномального объекта. Выбранная математическая модель экспериментального материала, конечно, идеализирована, однако на практике во многих случаях она достаточна для решения задач интерпретации геофизических наблюдений. Заметим, прежде всего, что предположение об аддитивности модели, как правило, достаточно точно отражает физическую реальность. Это связано с тем, что интерпретация магнитных аномальных полей весьма эффективна при условии, что среднеквадратическая амплитуда случайной компоненты $n(x, y)$ мала по сравнению с максимальной амплитудой неслучайного поля, поэтому допустима линеаризация реального поля относительно случайной компоненты, которая приводит к аддитивной модели (1). Особые трудности вызывает случай, когда аномалии соизмеримы с уровнем случайных помех, тогда их прямое обнаружение невозможно. Таким образом, задачу можно сформулировать следующим образом: наблюдается случайное поле $u(x, y)$ в некоторой области D. Предполагается наличие в этой области детерминированной аномалии $f(x, y)$, которая осложнена помехами и не может быть выделена обычными, прямыми методами. Требуется сделать вывод о наличии или отсутствии полезной аномалии. При этом, исходя из предпосылок геологического характера, известно, что помехи могут быть либо гауссовскими однородными полями, либо гауссовским белым шумом на плоскости. Таким образом, требуется решить задачу о различении гипотез. Любое решающее правило проверки гипотез сводится к разбиению пространства наблюдений на две части: область принятия гипотезы, т.е. наличия аномалии, и область отвержения. При этом возникают ошибки первого и второго рода. При геофизической разведке, казалось бы, хуже пропустить аномалию, чем выделить ложную, т.е. к меньшим потерям приводят ошибки второго рода. Однако на практике это далеко не так. Например, имеется множество аномалий «рудного типа», 30–40% которых годами не проверяется, так как отвлекает значительные силы, что снижает экономическую эффективность разведки, пропуск же аномалии (ошибки первого рода) ведет к прямому снижению геологической эффективности разведки. Поэтому вопрос о предпочтительности одного из видов ошибок весьма сложный. Как правило, считается, что ошибки равнозначны и отпадает необходимость в выработке критерия оптимизации потерь от ошибки определенного рода. Если отношение правдоподобия обозначить $\Lambda(D)$, где D — область наблюдения, то критерием выделения аномалии будет условие $\Lambda(D)>1$. Если помехи гауссовы: гауссовское случайное поле или гауссовский белый шум, величина $\Lambda(D)$ известна и решение задачи сводится к классической задаче различения гипотез.

Выше предполагалось, что случайный шум является гауссовским. Это ограничение на помеху не всегда выполняется, но во многих случаях выполняется ограничение другого типа: однородность и эргодичность. Условие эргодичности случайного поля предполагает необходимость определения статистических свойств наблюдений по одному профилю или одной трассе. Физически это обусловлено отсутствием корреляционных связей между наблюдаемыми значениями в точках, достаточно удаленных одна от другой. Например, если имеется одиночная аномалия, которая создает элементарное поле

$$f(x, y) = A_0 \varphi(\omega_1 x, \omega_2 y),$$

где A_0 — амплитуда, а $\varphi(x, y)$ — некоторая периодическая функция, зависящая от неизвестных частот ω_1 и ω_2, то приходим к задаче параметрического оценивания в нелинейной модели регрессии.

Другой класс задач, имеющий широкий спектр приложений в геофизике, относится к так называемой проблеме непараметрической идентификации, когда по наблюдениям сигнала в конечном числе точек или кривых требуется восстановить его как функцию нескольких переменных. Приведем пример одной из них. При геофизических исследованиях часто применяют метод анализа отражений сейсмических волн с помощью сейсмических датчиков $A_1, \ldots, A_n$, расположенных в точках плоскости соответственно с координатами $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. С помощью мощного импульсного источника возбуждаются сейсмические волны, которые, отразившись от неоднородностей H_0, улавливаются сейсмическими датчиками A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, которые фиксируют также интенсивность отраженных от неоднородностей H_0 волн. При этом другие неоднородности H_k, $k = 1, \ldots, n$, и другие источники сейсмических колебаний создают помехи. Обработка информации заключается в оптимальном восстановлении отраженного от H_0 сигнала по его наблюдениям в конечном числе точек. (Оптимальность понимается в смысле критерия максимального правдоподобия, наименьших квадратов, наименьших модулей или какого-либо другого критерия.) Эти же идеи используются и при изучении проблемы шероховатости обработки поверхностей [1]. Идея использования аппарата теории случайных функций принадлежит академику Ю.В. Линнику, и в настоящее время исследования в этой области с использованием теоретико-вероятностного подхода получили широкое развитие. Естественным подходом к изучению шероховатостей является моделирование шероховатости функцией двух или трех переменных, при этом обработанная поверхность интерпретируется как реализация случайного поля, и задача состоит в оценивании характеристик поля по его реализациям.

2. ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ И КЛАССИФИКАЦИИ

В наиболее общей постановке этот класс задач связан с проблемой восстановления функциональной зависимости по эмпирическим данным. При этом всякий раз возникает необходимость решать одну и ту же оптимизационную задачу: среди множества функций из некоторого класса выбрать такую, которая оптимизировала бы некоторый критерий качества. Предполагается, что на некотором множестве X определена плотность распределения $p(x)$, а функционал $J(\alpha)$ записан в виде

$$J(\alpha)=MQ(\xi,\alpha)=\int_X Q(x,\alpha)p(x)dx,$$

где α — неизвестный параметр из некоторого множества A, которое, вообще говоря, может быть бесконечномерным, $Q(x,\alpha)$ — функция потерь. Проблема состоит в том, чтобы по наблюдаемой выборке $(x_1,\dots,x_n)$ выбрать величину $\alpha^*\in A$, которая минимизировала бы средние потери $J(\alpha)$. К этой проблеме сводится две основные задачи теории распознавания: а) обучения распознаванию образов; б) восстановления функции регрессии по эмпирическим данным. Они довольно подробно изучены, например, в [2–4]. Ограничимся их кратким описанием и проследим их связь с классическими задачами статистики случайных функций.

Остановимся сначала на задаче обучения распознаванию образов [2, 3]. Пусть учитель наблюдает случайно возникающие ситуации и определяет, к какому из n классов каждая из них относится. Другими словами, необходимо построить такое устройство, которое после наблюдения за работой учителя проводило бы классификацию подобно тому, как это делает учитель. Одна из возможных формальных постановок этой задачи следующая. Предположим, что в некоторой области D на плоскости наблюдаются ситуации $z(x,y)$, $(x,y)\in D$. Требуется, наблюдая $z(x,y)$ в области D, построить характеристическую функцию таким образом, чтобы вероятность классификации, отличной от классификации учителя, была минимальной. Если наблюдения независимы с известными законами распределения, то решающее правило строится с помощью отношения правдоподобия и его поиск не вызывает затруднений. Если же наблюдения ведутся непрерывно в некоторой области D плоскости, то аналогом дискретных независимых наблюдений является модель, в которой случайные ситуации возникают вследствие аддитивно накладываемого белого шума на плоскости. Для построения решающего правила необходимо построить отношение правдоподобия, как это сделано, например, в [4–7].

Сложнее обстоит дело, если закон распределения вероятностей, характеризующий случайную среду, неизвестен. Один из подходов к решению задачи следующий. Пусть задано параметрическое семейство решающих правил $F(x,\alpha)$, где параметр α может быть, вообще говоря, элементом некоторого бесконечномерного пространства, $F(x,\alpha)$ — характеристическая функция. Предположим, что $\Theta=\{0,1\}$ — множество решающих правил, т.е. ситуации разделены на два класса. Требуется, наблюдая n пар

$$(x_1,\theta_1),\dots,(x_n,\theta_n)$$

(x — ситуация, θ — реакция на нее учителя), выбрать в классе характеристических функций $F(x,\alpha)$ такую, которая минимизировала бы функционал

$$J(\alpha)=\sum_{\Theta=\{0,1\}}\int_X(\theta-F(x,\alpha))^2\,p(\theta/x)p(x)dx,$$

где $p(x)$ — плотность распределения вероятностей случайной среды, а $p(\theta/x)$ — условная плотность распределения вероятностей при заданном x. Таким образом, если обозначить

$$Q(x,\theta,\alpha)=(\theta-F(x,\alpha))^2,\quad p(x,\theta)=p(\theta/x)p(x),$$

придем к следующей задаче: найти

$$\min_{\alpha\in A}J(\alpha)=\min_{\alpha\in A}MQ(x,\theta,\alpha)=\min_{\alpha\in A}\sum_{\Theta=\{0,1\}}\int_X(\theta-F(x,\alpha))^2\,p(x,\theta)dx$$

при условии, что функция $p(x,\theta)$ неизвестна, но известен набор наблюдений $(x_1,\theta_1),\ldots,(x_n,\theta_n)$. Если он достаточно большой, то данную задачу можно решать методами стохастического программирования при произвольных законах распределения двумерной случайной величины (x,θ). Одним из способов решения этой задачи является так называемый метод эмпирических средних, который заключается в замене величины $J(\alpha)=MQ(x,\theta,\alpha)$ ее эмпирической оценкой

$$J_n(\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-F(x_i,\alpha))^2 \tag{2}$$

и в решении задачи нахождения $\min J_n(\alpha)$. Если обозначить

$$\alpha_n=\arg\min J_n(\alpha),\ \alpha^*=\arg\min J(\alpha),$$

то проблема будет состоять в нахождении условий, когда

$$\alpha_n\to\alpha^*,\ J_n(\alpha_n)\to J(\alpha^*)$$

в том или ином вероятностном смысле. Такие исследования проводились в работах [4–10] при достаточно общих условиях на функцию критерия, частным случаем которой будет функция вида (2).

3. ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ РЕГРЕССИИ

Проблема состоит в восстановлении функции по ее измерениям в некоторых точках со случайными ошибками. Предполагается, что неизвестная функция $f(x)$ принадлежит некоторому допустимому компактному множеству K и задача восстановления функции $f(x)$ сводится к задаче оптимизации некоторого функционала на K на основании выборки

$$\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_n \\ z_1,\ldots,z_n \end{pmatrix},$$

где z_i — наблюдение неизвестной функции $f(x)$ в точке x_i со случайной ошибкой ξ_i:

$$z_i=f(x_i)+\xi_i.$$

Как правило, предполагается, что величины ξ_i, $i=\overline{1,n}$, независимы. В задачах распознавания часто возникает проблема восстановления функции двух переменных $f(x,y)$ на плоскости, тогда модель наблюдения следующая:

$$z_{ik}=f(x_i,y_k)+\xi_{ik},$$

где z_{ik} — наблюдение функции $f(x,y)$ в точке (x_i,y_k) со случайной ошибкой ξ_{ik}.

В качестве функции критерия, характеризующей качество восстановления, как правило, выбирают функционалы максимального правдоподобия, наименьших квадратов, наименьших модулей. Достаточно полно эти задачи описаны в монографиях [2, 4, 5, 10]. Кроме того, они содержат результаты, касающиеся асимптотического поведения полученных оценок (условия состоятельности, асимптотическое распределение, слабая сходимость мер, порожденных этими оценками). Эти результаты необходимы для знания полученных оценок. Вообще говоря, ниоткуда не следует, что близким значениям функционала будут соответствовать близкие в какой-либо метрике функции. В то же время следует подчеркнуть, что при восстановлении функции регрессии проблема состоит не столько в том, чтобы минимизировать функционал, а и в том, чтобы найти функцию, близкую в какой-либо метрике к искомой функции регрессии. Чтобы гарантировать такую близость, просто минимизации функционала недостаточно. Необходимо найти некоторые условия, при которых будут иметь место указанные выше свойства. Что касается численных методов восстановления неизвестной функции, то достаточно полно они описаны в [2, 11].

Сделаем несколько замечаний относительно параметрических моделей восстановления зависимостей, т.е. оценивания функции $f_0(x) = f(x, \alpha_0)$, где $f(x, \alpha)$ — функция известного вида с неизвестным параметром α, который необходимо оценить. Это так называемые нелинейные модели регрессии, достаточно полно изученные в специальной литературе, например, в [2, 5]. Эти же задачи исследовались и в случае, когда x — вектор (двух и более переменных) [4, 7]. В указанных монографиях рассматривались асимптотические свойства оценок, для их численного нахождения можно воспользоваться методами математического программирования [12, 13].

4. ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СВЯЗИ

Развитие техники передачи информации привело к тому, что возможности ее дальнейшего роста лимитируются в основном физическими явлениями стохастического характера. Согласно основному принципу теории информации при передаче какого-либо сигнала сообщение на выходе источника должно быть в той или иной мере непредсказуемо, в противном случае потребитель, не прибегая к системе связи, может предвидеть все будущие сообщения, посылаемые источником. Случайные возмущения в канале связи могут возникнуть в силу множества причин: распространение сигнала различными, случайно изменяющимися путями, в результате единый переданный сигнал возникает у приемника в виде множества взаимно интерферирующих сигналов; в передатчике и приемнике к сигналу может добавляться шум и т.д. Отметим, что специалисты проявляют значительный интерес к вопросам теории пространственно-временной обработки сигналов в измерительных радиосистемах [14–16]. С одной стороны, это объясняется всевозрастающими требованиями к качественным характеристикам измерительных радиосистем и стремлением повысить их помехоустойчивость, а с другой — развитием техники фазированных антенных решеток и систем многопозиционного приема, открывающим новые пути для улучшения этих характеристик. Измерительные системы получают информацию об удаленных объектах путем анализа волновых полей, создаваемых этими объектами за счет собственного излучения или отражения зондирующих сигналов. Пространственная обработка включает анализ пространственной структуры поля и определение ее параметров, основную роль в этом процессе играет приемная антенна. Временная обработка включает те же операции по отношению к временной структуре поля, основную роль при этом играет приемник. В оптимальных системах эти элементы взаимосвязаны, а приемник и антенна образуют единую систему обработки пространственно-временных сигналов.

Применяемый на практике метод синтеза оптимальных систем приема основан на критерии Немана–Пирссона. Рассмотрим пример построения решающей функции в случае, когда полезный сигнал, обозначим его $x(t, \rho)$ (t и ρ — соответственно временная и пространственная координаты) детерминирован, а помеха $n(t, \rho)$ — гауссовский белый шум.

Пусть наблюдается случайное поле $y(t, \rho)$ в области D, для которого проверяется справедливость одной из гипотез:

$$\begin{aligned} H_1 &: \ y(t,\rho) = x(t,\rho) + n(t,\rho), \\ H_2 &: \ y(t,\rho) = n(t,\rho). \end{aligned} \tag{3}$$

Из [15, 16] следует, что отношение правдоподобия имеет вид

$$\Lambda(D) = \exp\left\{ \frac{2}{N_0} \iint\limits_D y(t,\rho) x(t,\rho) dt d\rho - \frac{1}{N_0} \iint\limits_D x^2(t,\rho) dt d\rho \right\}, \tag{4}$$

где N_0 — спектральная плотность белого шума. Заметим, что (3), (4) следует понимать условно, так как $y(t, \rho)$ — обобщенное случайное поле, состоящее из суммы полезного сигнала и обобщенного поля — белого шума. В строгом смысле выражения (3), (4) определены в [14–16], однако при решении практических задач часто оперируют выражениями, в которые входят обобщенные случайные поля. Эти результаты легко распространяются на следующие гипотезы:

$$H_1: y(t,\rho) = x_1(t,\rho) + n(t,\rho),$$

$$H_2: y(t,\rho) = x_2(t,\rho) + n(t,\rho).$$

Однако подробнее на этом останавливаться не будем.

Рассмотрим один из примеров, который подтверждает необходимость рассмотрения модели наблюдения (3).

Пусть источник сигнала расположен в некоторой жидкой среде и находится на значительном расстоянии от поверхности. Приемники сигналов также находятся на значительном расстоянии от источника излучения и располагаются на поверхности слоя жидкости. Естественно, что наряду с сигналом, излучаемым источником (назовем его полезным сигналом), приемник воспринимает и пространственно распределенные шумы, расположенные как в жидкой среде, так и на поверхности. Поскольку спектры частот полезного сигнала и помех перекрываются, то сосредоточенное приемное устройство не способствует достаточно надежному выделению полезного сигнала. При этих условиях за счет объемного распределения приемников внутри заданной области можно обеспечить более высокое отношение сигнал/помеха. Физически это явление можно объяснить как результат оптимальной компенсации помех за счет правильно подобранной весовой функции распределенной системы. Однако дискретная модель канала передачи информации из точечного недвижущегося источника полезного сигнала не всегда удобна. Во-первых, на приемном пункте не всегда известно расположение источников помех, во-вторых, источник полезной информации может перемещаться в пространстве, в-третьих, источники помех могут располагаться настолько плотно в пространстве, что дискретная модель может оказаться неприемлемой. В этом случае становится естественным рассмотрение непрерывной модели наблюдения и использование результатов [14–16], касающихся нахождения отношения правдоподобия и построения оптимальных правил различения гипотез.

Рассмотрим природу помех. Один из источников возникновения помех — тепловой шум. Могут встречаться и другие помехи, более существенные, однако во многих случаях эту систему можно перестроить таким образом, чтобы влияние этих помех полностью устранить. В результате помехоустойчивость будет определяться наличием теплового шума, который хорошо моделируется белым гауссовым шумом.

Таким образом, если $x(t,\rho)$ — детерминированная функция, то здесь можно поставить две задачи: 1) определить, является ли $y(t,\rho)$ смесью полезного сигнала и помехи $n(t,\rho)$; 2) если $y(t,\rho)$ имеет вид (3), то как оценить $x(t,\rho)$. Первая из них относится к проблематике различения гипотез и рассматривалась выше. Если эта гипотеза подтвердилась, то, как уже отмечалось, следующим этапом распознавания является определение структуры сигнала. Здесь возможно несколько подходов к решению задачи, остановимся на некоторых из них подробнее. Предположим, что известна форма обнаруженного сигнала, но неизвестны его параметры. Например, в (3) $x(t,\rho) = A\, x_1(t,\rho)$, где A — неизвестный параметр, а $x_1(t,\rho)$ — известная функция. В этом случае, если помеха $n(t,\rho)$ — белый гауссовый шум, то, применяя метод максимального правдоподобия, получаем оценку $\widetilde{A}$ параметра A, явный вид которой приведен в [14–16]. Достаточной статистикой при этом является величина

$$l(D) = \iint\limits_D x(t,\rho)\, y(t,\rho)\, dt d\rho,$$

и нет необходимости наблюдать непосредственно $y(t,\rho)$, достаточно наблюдать лишь величину $l(D)$. Оптимальная оценка при этом имеет вид $\hat{A} = \frac{l(D)}{E}$, где E — энергия сигнала $x(t,\rho)$:

$$E = \frac{1}{2}\iint_D x^2(t,\rho)dtd\rho.$$

Можно показать [16], что дисперсия оценки максимального правдоподобия обратно пропорциональна величине $\frac{E}{N_0}$, где N_0 — спектральная плотность белого шума. Единственный способ уменьшить среднеквадратическую ошибку — увеличить величину $\frac{2E}{N_0}$ — отношение сигнал/шум. Во многих случаях достижимые отношения сигнал/шум недостаточны для обеспечения требуемой достоверности. В таких случаях следует применять нелинейные методы передачи и обработки сигналов. Особо выделим пример, когда полезный сигнал — случайное гауссовское поле, линейно зависящее от неизвестного параметра A, а наблюдается его смесь с гауссовской помехой. Из результатов [16] следует, что достаточно хорошей оценкой A является оценка наименьших квадратов, явный вид которой можно выписать. Более сложная ситуация наблюдается в случае, когда полезный сигнал нелинейно зависит от неизвестных параметров. Рассмотрим несколько подходов к решению задачи с учетом полезного сигнала и помехи. Если помеха является белым гауссовым шумом на плоскости, можно воспользоваться соотношением (4) для нахождения оценок максимального правдоподобия, что весьма трудоемко. Однако в ряде случаев ее можно значительно упростить. Например, если полезный сигнал имеет вид

$$u(t,\rho) = u_1(t)u_2(\rho),$$

то задача нахождения оптимума $\log\Lambda(D)$ значительно упрощается.

Рассмотрим задачи, ведущие к модели (1). Например, в радиофизике и оптике большой интерес представляет специальный вид случайных полей, а именно, случайные волны. Рассмотрим волну, близкую к регулярной плоской монохроматической волне вида

$$u(x,y,z,t) = A(x,y,z,t)\exp\{i(\omega_0 t - k_0 z)\}, \tag{5}$$

где $A(x,y,z,t)$ — комплексная амплитуда, медленно меняющаяся в масштабах среднего периода колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, k_0 — волновое число. При передаче сигнала (5) появляется аддитивный шум. Как и ранее, приходим к задаче выделения полезного сигнала и его идентификации, если неизвестны некоторые его параметры, например ω_0 или k_0.

Представляет интерес рассмотрение ряда ситуаций, в которых помеха не является белым шумом. Например: а) между источником шума и демоделирующей частью приемника находятся антенна и высокочастотные фильтры, которые придают спектру шума форму своей частотной характеристики; б) помимо полезного сигнала в приемнике могут находиться мешающие параметры с гауссовым или другим распределением. В радиолокации мешающими сигналами являются отражения от целей. Если помеха гауссова, то естественно использовать оценки максимального правдоподобия, здесь встречаются те же трудности, что и в случае, когда помеха является белым гауссовым шумом. Однако представляет значительный интерес случай, когда распределение помехи неизвестно, а известны его корреляционные или спектральные характеристики. Например, в теории автоматического регулирования, геофизике, гидрологии и других областях физические процессы моделируются периодическими или почти периодическими функциями с неизвестными амплитудами и частотами, которые наблюдаются с аддитивными помехами, являющимися стационарными процессами или однородными случайными полями. Приведем простейший пример. Пусть наблюдается случайный процесс

$$y(t) = A\cos(\omega t) + n(t),$$

где гармонический сигнал $\varphi(t) = A\cos(\omega t)$ имеет неизвестную частоту ω и амплитуду A. Сигнал $\varphi(t)$ называется немодулированным колебанием. Случайный шум $n(t)$ — стационарный случайный процесс. Необходимо оценить величины A и ω. Сигнал более сложного вида получается, если рассматривать суперпозицию гармонических колебаний. Каждый гармонический осциллятор колебаний излучает электромагнитное колебание определенной амплитуды A_k и частоты ω_k. В результате суммарный полезный сигнал $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(\omega_k t),$$

на который накладывается помеха $n(t)$.

Часто на практике приходится иметь дело с процессами, представимыми в виде суммы очень большого числа осцилляторов, излучающих на низко расположенных частотах. Например, излучение нагретого тела (газа) есть суммарное излучение отдельных атомов, выступающих в качестве осцилляторов, их число имеет порядок 10^{20}. Поэтому возникает необходимость исследования периодического сигнала $x(t)$, представимого в виде абсолютно сходящегося ряда

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k t}.$$

При этом типичной является ситуация, когда $c_k = Aa_k$, $\lambda_k = \omega k$ и $x(t)$ представим в виде

$$x(t) = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega t}.$$

Если сигнал $x(t)$ передается по каналу связи с аддитивным шумом $n(t)$, а параметры A и ω неизвестны, то приходим к модели идентификации (оценки неизвестных параметров A и ω), исследованной в работах [1, 4, 10]. Аналогично рассматривается и модель с однородным случайным полем [4].

Кратко остановимся еще на одной задаче, имеющей широкое поле приложений в радиофизике и радиолокации. Предположим, что измерительные системы получают информацию об удаленных объектах путем анализа волновых полей, создаваемых этими объектами за счет собственного излучения или отражения зондирующих сигналов. Структура и анализ волнового поля зависят от положения объекта, скорости его движения, размеров, формы и т.д. Во многих системах приходится принимать несколько сообщений одновременно, обработать их и передать результирующий сигнал в канал связи. При этом могут возникать как мультипликативные, так и аддитивные помехи. Приведем пример таких моделей:

$$z(x, y) = \left[\sum_{j=1}^{n} a_j f_j(x, y)\right]\eta(x, y) + n(x, y).$$

Здесь $f_j(x, y)$ — детерминированные сигналы, $\eta(x, y)$ и $n(x, y)$ — соответственно мультипликативная и аддитивная помехи, $\{a_j;\ j = \overline{1, n}\}$ — неизвестные параметры. Различные методы оценивания a_j приведены в [4–7]. Более сложной является задача так называемой непараметрической идентификации, в которой структура сигнала неизвестна, известно лишь, что он принадлежит некоторому классу функций, например, что искомая функция периодическая и удовлетворяет некоторым условиям гладкости. Наиболее простой путь к решению задачи — ограничиться некоторой конечной суммой гармоник и решать задачу параметрической идентификации, однако нет никакой уверенности, что найденная оценка оптимальна. Но часто это решение приемлемо с практической точки зрения, так как отыскание функции, оптимизирующей некоторый функционал на компакте, — достаточно сложная проблема, и нахождение оптимума сводится к нахождению приближенного решения этой задачи, некоторые подходы к его нахождению описаны в [17].

5. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Остановимся на задаче, возникающей при изучении процессов сорбции и десорбции газов. Пусть трубка длины L заполнена поглощающим веществом (сорбентом). В качестве координатной оси x выберем ось трубки, началом будем считать вход трубки, через который с момента времени $t=0$ начинает подаваться воздушная смесь. Если $u(x,t)$ — концентрация газа, находящегося в момент времени t в слое трубки x, то для случая малой концентрации подаваемого газа будет иметь место следующее соотношение [18]:

$$u_{xt}+\frac{\beta}{\nu}u_t+\beta\gamma u_x=0, \tag{6}$$

где β — кинетический коэффициент, ν — скорость газа, $\dfrac{1}{\gamma}$ — коэффициент Генри. Пусть

$$u(x,0)=e^{-\frac{\beta}{\nu}}u_0,$$

$$u_0(t)=u(0,t),\ u_0(0)=u_0,$$

$u_0(t)$ — концентрация газа на входе в трубку в момент времени t. Обозначив

$$u(x,t)=e^{-\frac{\beta}{\nu}x-\beta\gamma t}\upsilon(x,t),$$

приведем уравнение (6) к виду

$$\upsilon(x,t)=\varphi(x,t,u_0(t))+\int_0^x\int_0^t a(s,y,\upsilon(s,y))dsdy, \tag{7}$$

$$\varphi(x,t,u)=e^{\beta\nu t},\ a(s,y,z)=\beta^2\frac{\gamma}{\nu}z,$$

со значениями на характеристиках

$$\upsilon(x,0)=e^{-\frac{\beta}{\nu}(u_0-1)}u_0,\ \upsilon(0,t)=e^{\beta\gamma t}u_0(t).$$

Всевозможные неравномерности при распределении сорбента в трубке, при подаче потока газовоздушной смеси, ее неоднородность и другие факторы приводят к необходимости рассматривать уравнения со случайными коэффициентами и дополнительными слагаемыми, отражающими различные отклонения процесса, которые можно характеризовать с помощью белых шумов на плоскости. Таким образом, приходим к стохастическому уравнению

$$\upsilon(x,t)=\varphi(x,t,u_0(t))+\int_0^x\int_0^t a(s,y,\upsilon(s,y))dsdy+\int_0^x\int_0^t b(s,y,\upsilon(s,y))w(ds,dy). \tag{8}$$

Задача оптимального управления для уравнения (8) заключается в выборе такого режима концентрации газа на входе $u_0(t)$, при котором целевой функционал

$$\Phi(u_0(t)) = M\int_0^L\int_0^T |\widetilde{v}(x,t) - v(x,t)|^{\lambda}\, dxdt, \tag{9}$$

где $\lambda \geq 1$, $\widetilde{v}(x,t)$ — заданная функция, принимает минимальное значение. Уравнение (9) является типичным при изучении процессов сорбции и десорбции газов.

Рассмотрим еще одну задачу, связанную с проблемами сорбции и десорбции газов. Пусть $A(x,t)$ — количество газа, поглощенного единицей сорбента. Тогда для функции $A(x,t)$ выполняется соотношение [18]

$$A_{xt} + \frac{\beta}{\gamma} A_t + \beta\nu A_x = 0,$$

$$A(x,0) = 0,\ A(0,t) = \frac{1}{\gamma}[u_0(t) - u_0 e^{-\beta\gamma t}]. \tag{10}$$

Аналогично предыдущему случаю, уравнение (10) также можно привести к уравнению вида (8) и рассматривать задачу оптимального управления типа (9). С аналогичными задачами Гурса приходится иметь дело при изучении процесса сушки воздушным потоком, процесса прогревания потоком воды и т.д. При решении задач оптимального управления вида (8), (9) необходимо, чтобы уравнение (8) имело, по крайней мере, слабое решение. Доказательство существования слабого решения использует двумерный аналог теоремы Гирсанова, приведенный в [4]. Пример его использования при исследовании довольно общего класса задач управления рассмотрен в [19].

6. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ НА ГРАФАХ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

При исследовании сложных биологических, технических, физических и экономических проблем все большее применение находит теория стохастических систем с локальным взаимодействием. Частным случаем таких систем являются гиббсовские случайные поля, поля Изинга, которые достаточно используются при изучении различных проблем статистической физики. Эти поля при некоторых естественных условиях обладают марковским свойством, поэтому являются удобными и широко используемыми представлениями реальных задач в целях их моделирования и изучения реальных процессов, принятия оптимальных решений. Нет возможности подробно останавливаться на многочисленных прикладных задачах, связанных с этими полями, они достаточно изложены в [20–22]. Остановимся лишь на одной задаче из экономики, впервые рассмотренной в [23], и в дальнейшем исследованной в [21]. Предварительно приведем необходимые понятия и определения [20–22].

Пусть $\Gamma = (V, B)$ — некоторый конечный граф с множеством вершин V и множеством ребер B, (k, j) — ребро графа, соединяющее вершины k и j. Назовем окрестностью вершины k множество $N(k) = \{j, (k, j) \in B\}$, т.е. множество вершин, соединенных дугами с вершиной k. Пусть $X_i = \{x_i\}$ — множество состояний элемента $i \in V$, т.е. X_i — множество значений, принимаемых элементом (вершиной) $i \in V$; $X = \prod_{i\in V} X_i$. Случайную величину ξ, определенную на V и принимающую значение в X, будем называть случайным полем на V. Во многих прикладных задачах случайная величина ξ зависит от времени t. В этом случае будем обозначать $\xi = \xi^t$, подчеркивая зависимость ξ от времени t. Введем следующее обозначение:

$$\xi_K = \{\xi_k,\ k \in K\},\ x_K = \{x_k,\ k \in K\},\ K \subset V.$$

Определение 1. Случайное поле ξ на (V, B) называется марковским, если для всех $k \in V$ выполняется соотношение

$$P\{\xi_k = y_k / \xi_{J \setminus \{k\}} = x_{J \setminus \{k\}}\} = P\{\xi_k = y_k / \xi_{N(k)} = x_{N(k)}\}$$

для любых $y_k \in x_K$, где $K \subset J \subset V$.

Если поле ξ зависит от времени, то возникает необходимость в расширении понятия окрестности вершины $k \in V$. Будем говорить, что $\widetilde{N}(k)$ — расширенная окрестность вершины k, если $\widetilde{N}(k) = N(k) \cup k$. В этом случае $\widetilde{N}(K) = N(K) \cup K$.

Для полей $\xi = \xi^t$ дадим следующее определение марковости.

Определение 2. Случайное поле $\xi = \xi^t$ называется марковским, если выполняется соотношение

$$P\{\xi_k^{t+1} = y_k / \xi^t = x^t, \ldots, \xi^0 = x^0\} = P\{\xi_k^{t+1} = y_k / \xi^t_{\widetilde{N}(k)} = x^t_{\widetilde{N}(k)}\}.$$

Можно показать [22], расширяя фазовое пространство X и накладывая некоторые дополнительные предположения, что марковское свойство в виде второго определения можно описать с помощью определения 1.

Возвратимся к экономической задаче, которую можно моделировать с помощью приведенной выше модели. Пусть множество вершин в графе Г означает множество организаций или фирм, а множество ребер — множество взаимодействий между организациями. Пусть $X_i = \{x_i^1, \ldots, x_i^{n_i}\}$ — множество состояний элементов x_i, т.е. каждой организации i соответствует некоторое множество состояний. В частности, каждый элемент i-множества X_i может соответствовать принятию i-й фирмой того или иного стандарта или технологии. Марковость в смысле определения 2 означает, что это решение зависит лишь от решений в предыдущий момент времени, принадлежащих окрестности $\widetilde{N}(k)$ организации k. Это естественное предположение, которое, как правило, выполняется в реальных системах. Для простоты предположим, что i-я фирма имеет продукцию двух видов, и пусть r_{ij} — доход от продажи j-й продукции i-й фирмой за один период времени. Предположим, что p_{ij} — финальные вероятности (нетрудно выписать условия их существования), означающие вероятности того, что i-я фирма примет решение выпустить на рынок продукцию j-го типа, $j = 1, 2$. Тогда средний доход r_i i-й фирмы за один период равен

$$Er_i = p_{i1} r_{i1} + p_{i2} r_{i2}. \tag{11}$$

Можно показать, что величина (11) равна средним доходам в единицу времени системы, функционирующей в стационарном режиме. Очевидно, что финальные вероятности p_{ij} зависят от переходных вероятностей рассматриваемого процесса, а они, в свою очередь, от стратегии, применяемой той или иной фирмой. В частности, экономическую модель, описывающую соревнование нескольких конкурирующих фирм, довольно адекватно можно описать стохастической моделью Изинга, в которой переходные вероятности имеют вид

$$P(y_k / x_{\widetilde{N}(k)}) = \frac{\exp[-\beta \sum\limits_{j \in N(k)} y_k x_j]}{\sum\limits_{y \in X} \exp[-\beta \sum\limits_{j \int \widetilde{N}(k)} y x_j]},$$

где y_k и x_j принимают значения ± 1, а $\beta > 0$ — некоторый параметр. Доказано, что существует такое значение β^*, что при $\beta < \beta^*$ имеется эргодическое распределение [20]. Таким образом, чтобы выбрать оптимальную политику для i-й фирмы, необходимо решить следующую оптимизационную задачу с ограничениями: найти $\max\limits_{\beta} Er_i$ при ограничениях $0 \le \beta \le \beta^*$.

Можно поставить и более общую задачу. По-прежнему будем предполагать, что i-я фирма выпускает продукцию двух видов, т.е. $x_i \in \{-1, 1\}$, и в каждый момент времени решение, принимаемое ею, зависит от состояния всей системы и принятого решения в предыдущий момент. В каждый момент времени для i-й фирмы задано множество управлений U_i, которое будем считать не зависящим от времени. По-прежнему будем считать, что наша модель описывается стохастической моделью Изинга, но не известен параметр β, характеризующий эту модель. Предположим, что множество управлений U_i состоит из двух точек: $\{\beta_1, \beta_2\}$. В каждый момент времени решение принимается в соответствии с переходной вероятностью, зависящей от принятого управления. Если задан некоторый функционал, то задача состоит в выборе управления, при котором функционал достигает оптимального значения. Примеры выбора функционала и нахождения оптимального решения приведены в [21, 24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хусу А.П., Виттенберг Ю.Р., Пальмов В.А. Шероховатость поверхностей. — М.: Наука, 1975. — 344 с.
2. Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. — М.: Наука, 1979. — 448 с.
3. Шлезингер М.И., Главич В. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию. — Киев: Наук. думка, 2004. — 544 с.
4. Кнопов П.С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем. — Киев: Наук. думка, 1981. — 152 с.
5. Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов. — Киев: Вища шк., 1982. — 190 с.
6. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. — Киев: Вища шк., 1980. — 208 с.
7. Леоненко Н.Н., Иванов А.В. Статистический анализ случайных полей. — Киев: Вища шк., 1986. — 216 с.
8. Pfanzagl J. On the measurability and consistency of minimum contrast estimates // Metrika. — 1969. — **14**. — P. 249–272.
9. Кнопов П.С. Асимптотические свойства некоторого класса *M*-оценок // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 4. — С. 10–27.
10. Knopov P.S., Kasitskaya E.J. Empirical estimates in stochastic optimization and identification. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academ. Publ., 2002. — 250 p.
11. Немировский А.С., Поляк Б.Т., Цыбаков А.В. Оценки сигналов непараметрическим методом максимального правдоподобия // Проблемы передачи информации. — 1984. — **20**, № 3. — С. 29–46.
12. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 240 с.
13. Ermoliev Yu., Wets R. (eds) Numerical techniques of stochastic optimization. — Berlin: Springer Verlag, 1988.
14. Давенпорт В.Б., Рут В.А. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 468 с.
15. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применение. — М.: Наука, 1965. — 464 с.
16. Кремер И.Я. (ред.) Пространственно-временная обработка сигналов. — М.: Радио и связь, 1984. — 224 с.
17. Пиявский С.А. Алгоритм отыскания абсолютного минимума функций // Теория оптимальных решений. — 1967. — Вып. 2. — С. 13–24.
18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 724 с.
19. Ермольев Ю.М., Гуленко В.П., Царенко Т.И. Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. — Киев: Наук. думка, 1978. — 164 с.
20. Лигетт Т. Марковские процессы с локальным взаимодействием. — М.: Наука, 1989. — 550 с.
21. Chornei R., Daduna H., Knopov P. Control of spatially structured random processes and random fields with applications. — Berlin: Springer, 2006. — 262 p.
22. Аверинцев М.Б. О некоторых классах гиббсовских случайных полей // Взаимодействующие марковские процессы в биологии. — Академия наук СССР, Научный центр биологических исследований. — Пущино, 1977. — С. 102–109.
23. David P.A., Foray D. Percolation structures. Markov random fields. The Economics and Edi Standards Diffusion. — Center for Economic Policy Research, Stanford University, 1992.
24. Derman C. Markovian sequential decision processes // Proc. Symposia Appl. Math. — 1964. — **16**. — P. 281–289.

Поступила 02.06.2009