УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК

РАВНОВЕСИЯ КУРНО–НЭША И БЕРТРАНА–НЭША ДЛЯ ГЕТЕРОГЕННОЙ ДУОПОЛИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ ПРОДУКТОВ

Ключевые слова: *равновесие, Курно, Нэш, Бертран, гетерогенная дуополия, фирма, дифференцированные продукты, конкуренция.*

Глобальная инфляция влияет на состояние экономики различных стран и рынки. Цена на топливо — один из основных экономических показателей. По официальным данным, в Украине в 2007 г. цена бензина А-95 возросла от 3,82 до 5,11 UAH / литр (при фиксированном обменном курсе USD = 5,05 UAH), а дизельного топлива — от 3,71 до 5,09 UAH / литр [1]; в 2008 г. цена дизельного топлива в Украине превысила цену бензина А-95, в 2009 г. цена сжиженного газа выросла почти в два раза. Профсоюзы в странах Европейского Союза (ЕС) организовали массовые забастовки в связи с высокими ценами на моторные топлива. Поскольку биотопливо является альтернативным (дифференцированным) продуктом для обычных моторных топлив [2], страны ЕС приступили к организации его промышленного производства в 1990-х гг., а Украина в 2008 г. вышла в лидеры в Европе по посевам рапса [3]. Как следствие таких процессов, сокращаются площади продовольственных культур и возрастают цены на продукты питания. Таким образом, исследование рынков дифференцированных продуктов актуально как с точки зрения практики [4, 5], так и теории [5–10].

Обозначим 1 и 2 два дифференцированных продукта, тогда цена продукта *i* равна

$$P_i = a_i - b_i Q_i - d_i Q_j, \ i, j = 1, 2, \ i \neq j, \tag{1}$$

где Q_i — неотрицательное количество продукта *i*, а a_i, b_i, d_i — некоторые параметры [6, 7]. Естественно предположить, что $a_i > 0$ и $b_i > 0$. При $d_i > 0$ продукт *j* называют заменителем для продукта *i*, а при $d_i < 0$ — дополнителем. При $d_i = 0$ цена продукта *i* не зависит от продукта *j*.

Предположим, продукт *i* производится фирмой $i = 1, 2$.

При конкуренции производители продуктов могут решать задачу Курно–Нэша (Cournot–Nash), где стратегиями являются выпуски фирм [11–20],

$$\pi_i = (P_i - c_i) Q_i = (a - b_i Q_i - d_i Q_j - c_i) Q_i \to \max_{Q_i}, \ i = 1, 2, \tag{2}$$

и задачу Бертрана–Нэша (Bertrand–Nash), где стратегии — цены фирм [12, 21],

$$\pi_i = (P_i - c_i) Q_i \to \max_{P_i}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь c_i — (положительные) удельные производственные затраты для продукта *i*. В общем случае a_i интерпретируется как верхняя граница удельных затрат и цены: $0 < c_i < a_i$.

В литературе по данной тематике часто предполагается некоторая гомогенность дуополии, т.е. выполняется хотя бы одно из равенств $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $d_1 = d_2$ в задаче (2) [6, 7]. Потребности практики вынуждают отказываться от таких предположений и анализировать гетерогенную дуополию, когда эти равенства не выполняются.

Покажем, что можно найти и охарактеризовать решения задач Курно–Нэша и Бертрана–Нэша для гетерогенной дуополии, не прибегая к численным методам [14]. Если вместо соотношения (1) рассматривать, например, дробную функцию цены [9]

$$P_i = \frac{a_i}{e_i + b_i Q_i + d_i Q_j}, \quad i, j = 1, 2, \ i \neq j,$$

где e_i — достаточно большие числа, то задачи существенно усложняются.

Теорема 1. Если выполняются соотношения (1), (2),

$$\Lambda = 4b_1 b_2 - d_1 d_2 > 0, \tag{3}$$

$$\Delta_j = 2b_i (a_j - c_j) - d_j (a_i - c_i) > 0, \ i, j = 1,2, \ i \neq j, \tag{4}$$

то в равновесии Курно–Нэша дифференцированной дуополии выпуск фирмы i составляет

$$Q_i^{CN} = \frac{2b_j (a_i - c_i) - d_i (a_j - c_j)}{4b_1 b_2 - d_1 d_2} = \frac{\Delta_i}{\Lambda}, \ i, j = 1,2, \ i \neq j. \tag{5}$$

Из вогнутости по Q_i функции π_i следует

$$0 = \partial \pi_i / \partial Q_i = a_i - c_i - 2b_i Q_i - d_i Q_j, \ i, j = 1,2, \ i \neq j,$$

откуда получаем

$$Q_1 = \frac{a_1 - c_1 - d_1 Q_2}{2b_1} = \frac{2b_2 (a_1 - c_1) - d_1 (a_2 - c_2 - d_2 Q_1)}{4b_1 b_2}$$

и приходим к соотношениям (5).

Теорема доказана.

Условие (3) является непосредственным следствием естественных неравенств

$$|d_i| < b_i, \ i = 1,2, \tag{6}$$

т.е. большей зависимости цены продукта i от спроса на этот продукт, чем от спроса на дифференцированный продукт j. Если продукты однородные, то

$$d_i = b_i, \ i = 1,2, \tag{7}$$

и условие (3) выполняется. Дифференцированные продукты, удовлетворяющие условию (6), назовем эндогенными дифференцированными продуктами. Дифференцированные продукты, не удовлетворяющие условиям (6) и (7), назовем экзогенными дифференцированными продуктами.

Заметим, что при

$$a_i - c_i = a_j - c_j \tag{8}$$

из соотношения (4) следует условие (3). Для дифференцированной дуополии равенство (8) может выполняться с достаточной точностью. Если выполняются условия (7) и (8), а также

$$b_1 = b_2, \tag{9}$$

то формула (5) сводится к известной формуле выпуска в равновесии Курно–Нэша для однородной дуополии [17].

Теорема 2. При условиях (3), (4) цена на продукт i в равновесии Курно–Нэша равна

$$P_i^{CN} = \frac{b_i [2b_j (a_i - c_i) - d_i (a_j - c_j)]}{\Lambda} + c_i = \frac{b_i \Delta_i}{\Lambda} + c_i =$$

$$= b_i Q_i^{CN} + c_i, \ i, j = 1,2, \ i \neq j. \tag{10}$$

Действительно, имеем

$$P_1^{CN} - c_1 = a_1 - c_1 - b_1 Q_1^{CN} - d_1 Q_2^{CN} =$$

$$= \frac{(a_1 - c_1)(4b_1 b_2 - d_1 d_2) - b_1 [2b_2 (a_1 - c_1) - d_1 (a_2 - c_2)]}{\Lambda} -$$

$$- \frac{d_1 [2b_1 (a_2 - c_2) - d_2 (a_1 - c_1)]}{\Lambda} =$$

$$= \frac{(a_1 - c_1)(4b_1 b_2 - d_1 d_2 - 2b_1 b_2 + d_1 d_2) + (a_2 - c_2)(b_1 d_1 - 2b_1 d_1)}{\Lambda} =$$

$$= \frac{b_1 [2b_2 (a_1 - c_1) - d_1 (a_2 - c_2)]}{\Lambda} = b_1 Q_1^{CN} .$$

Аналогично получаем формулу для P_2.

Теорема доказана.

Соотношения (5) и (10) обобщают известные в литературе [6, 7].

Следствие 1. При условиях (3), (4) в равновесии Курно–Нэша отношение выпусков составляет

$$\frac{Q_1^{CN}}{Q_2^{CN}} = \frac{2b_2 (a_1 - c_1) - d_1 (a_2 - c_2)}{2b_1 (a_2 - c_2) - d_2 (a_1 - c_1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} , \qquad (11)$$

а разность цен —

$$P_1^{CN} - P_2^{CN} = b_1 Q_1^{CN} - b_2 Q_2^{CN} + c_1 - c_2 = \frac{b_1 \Delta_1 - b_2 \Delta_2}{\Lambda} + c_1 - c_2 . \qquad (12)$$

Следствие 2. При условиях (3), (4) прибыль в равновесии Курно–Нэша определяется равенством

$$\pi_i^{CN} = (P_i^{CN} - c_i) Q_i^{CN} = b_i (Q_i^{CN})^2 = \frac{b_i (\Delta_i)^2}{\Lambda^2}, \; i, j = 1, 2, \; i \neq j. \qquad (13)$$

Сравнивая формулы (13) и формулы (18), (19) из [17], находим интерпретацию отношения $\dfrac{\Delta_i}{\Lambda}$ как выпуска фирмы i для однородной дуополии.

Следствие 3. При условиях (3), (4) разность прибылей в равновесии Курно–Нэша равна

$$\pi_1^{CN} - \pi_2^{CN} = \frac{b_1 (\Delta_1)^2 - b_2 (\Delta_2)^2}{\Lambda^2} . \qquad (14)$$

Следствие 4. При условиях (3), (4), (9) разность прибылей определяется соотношением

$$\pi_1^{CN} - \pi_2^{CN} = b_1 (Q_1^{CN} - Q_2^{CN})(Q_1^{CN} + Q_2^{CN}) = \frac{b_1 (\Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_1 + \Delta_2)}{\Lambda^2} =$$

$$= \frac{b_1 (\Delta_1 + \Delta_2)[2b_1 (a_1 - c_1) - d_1 (a_2 - c_2) - 2b_1 (a_2 - c_2) + d_2 (a_1 - c_1)]}{\Lambda^2} =$$

$$= \frac{b_1 (\Delta_1 + \Delta_2)[(2b_1 + d_2)(a_1 - c_1) - (2b_1 + d_1)(a_2 - c_2)]}{\Lambda^2}$$

и имеет знак

$$\operatorname{sign} (\pi_1^{CN} - \pi_2^{CN}) = \operatorname{sign} (Q_1^{CN} - Q_2^{CN}) ,$$

совпадающий со знаком разности выпусков в равновесии Курно–Нэша.

Следствие 5. При условиях (3), (4), (6), (9) и одинаковой степени однородности продуктов

$$\Omega = \frac{d_1}{b_1} = \frac{d_2}{b_2}$$

разность прибылей в равновесии Курно–Нэша составляет

$$\pi_1^{CN} - \pi_2^{CN} = \frac{(b_1)^2 (\Delta_1 + \Delta_2)(2 + \Omega)[(a_1 - c_1) - (a_2 - c_2)]}{\Lambda^2}$$

и имеет знак

$$\operatorname{sign}(\pi_1^{CN} - \pi_2^{CN}) = \operatorname{sign}[(a_1 - c_1) - (a_2 - c_2)],$$

совпадающий со знаком разности между максимально возможными ценами и удельными производственными затратами дифференцированных продуктов.

Чем ближе значение Ω к 1, тем однороднее (менее дифференцированы) продукты 1 и 2 [6, 7].

Теорема 3. Если выполняются условие (6) и неравенство

$$\delta_i = b_j(a_i - c_i) - d_i(a_j - c_j) = \Delta_i - b_j(a_i - c_i) > 0, \tag{15}$$

то в равновесии Бертрана–Нэша дифференцированной дуополии цена продукта i составляет

$$P_i^{BN} = \frac{\lambda a_i + b_i(\delta_i + 3b_j c_i)}{\Lambda}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \tag{16}$$

а выпуск продукта i определяется величиной

$$Q_i^{BN} = \frac{b_j[\lambda(a_i - c_i) + b_i \delta_i]}{\lambda \Lambda},$$

где

$$\lambda = b_1 b_2 - d_1 d_2 = \Lambda - 3b_1 b_2 > 0. \tag{17}$$

Отметим, что из условия (15) вытекает условие (4), а из условия (6) следуют условия (3) и (17). Иными словами, для существования равновесия Бертрана–Нэша нужны более жесткие условия, чем для равновесия Курно–Нэша.

Заметим, что из соотношений (1) следует

$$Q_1 = \frac{a_1 - P_1 - d_1 Q_2}{b_1} = \frac{b_2(a_1 - P_1) - d_1(a_2 - P_2 - d_2 Q_1)}{b_1 b_2},$$

$$Q_1 = \frac{b_2(a_1 - P_1) - d_1(a_2 - P_2)}{b_1 b_2 - d_1 d_2} = \frac{a_1 b_2 - a_2 d_1 - b_2 P_1 + d_1 P_2}{b_1 b_2 - d_1 d_2}, \tag{18}$$

откуда получаем

$$\pi_1 = (P_1 - c_1)\frac{(a_1 b_2 - a_2 d_1 - b_2 P_1 + d_1 P_2)}{\lambda}.$$

Тогда из вогнутости по P_1 функции π_1 следует

$$0 = \partial \pi_1 / \partial P_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 d_1 - 2b_2 P_1 + d_1 P_2 + b_2 c_1}{\lambda}. \tag{19}$$

Аналогично

$$0 = a_2 b_1 - a_1 d_2 - 2b_1 P_2 + d_2 P_1 + b_1 c_2,$$

откуда имеем

$$P_2 = \frac{b_1(a_2 + c_2) - d_2(a_1 - P_1)}{2b_1}.$$

Подставляя последнее равенство в уравнение (19), получаем

$$0 = a_1 b_2 - a_2 d_1 - 2b_2 P_1 + \frac{d_1}{2b_1}[b_1(a_2 + c_2) - d_2(a_1 - P_1)] + b_2 c_1,$$

$$0 = 2b_1(a_1 b_2 - a_2 d_1) - 4b_1 b_2 P_1 + b_1 d_1(a_2 + c_2) - d_1 d_2(a_1 - P_1) + 2b_1 b_2 c_1,$$

$$\Lambda P_1 = 2a_1 b_1 b_2 - 2a_2 b_1 d_1 + a_2 b_1 d_1 + b_1 c_2 d_1 - a_1 d_1 d_2 + 2b_1 b_2 c_1,$$

$$P_1=\frac{a_1(b_1b_2-d_1d_2)+b_1(a_1b_2-a_2d_1+c_2d_1+2b_2c_1)}{\Lambda}=$$

$$=\frac{\lambda a_1+b_1[b_2(a_1-c_1)+3b_2c_1-d_1(a_2-c_2)]}{\Lambda}=\frac{\lambda a_1+b_1(\delta_1+3b_2c_1)}{\Lambda}.$$

Аналогично получаем выражение для P_2. Соотношения (16) доказаны.

Подставляя соотношения (16) в уравнение (18), получаем

$$Q_1=\frac{a_1b_2-a_2d_1-b_2P_1+d_1P_2}{\lambda}=$$

$$=\frac{\Lambda(a_1b_2-a_2d_1)-b_2[\lambda a_1+b_1(\delta_1+3b_2c_1)]+d_1[\lambda a_2+b_2(\delta_2+3b_1c_2)]}{\lambda\Lambda}=$$

$$=\frac{\Lambda a_1b_2-\Lambda a_2d_1-\lambda a_1b_2-\delta_1b_1b_2-3b_1(b_2)^2c_1+\lambda a_2d_1+\delta_2b_2d_1+3b_1b_2c_2d_1}{\lambda\Lambda}=$$

$$=\frac{(\Lambda-\lambda)a_1b_2-(\Lambda-\lambda)a_2d_1+b_2(\delta_2d_1-\delta_1b_1-3b_1b_2c_1+3b_1c_2d_1)}{\lambda\Lambda},$$

$$\lambda\Lambda Q_1=(\Lambda-\lambda)(a_1b_2-a_2d_1)+b_2\{d_1[b_1(a_2-c_2)-d_2(a_1-c_1)]-$$
$$-3b_1b_2c_1+3b_1c_2d_1-b_1[b_2(a_1-c_1)-d_1(a_2-c_2)]\}=$$
$$=3b_1b_2(a_1b_2-a_2d_1)+b_2(a_2b_1d_1-b_1c_2d_1-a_1d_1d_2+$$
$$+c_1d_1d_2-3b_1b_2c_1+3b_1c_2d_1-a_1b_1b_2+b_1b_2c_1+a_2b_1d_1-b_1c_2d_1)=$$
$$=b_2[3a_1b_1b_2-3a_2b_1d_1+2a_2b_1d_1+b_1c_2d_1-d_1d_2(a_1-c_1)-2b_1b_2c_1-a_1b_1b_2]=$$
$$=b_2[2a_1b_1b_2-a_2b_1d_1+b_1c_2d_1-d_1d_2(a_1-c_1)-2b_1b_2c_1]=$$
$$=b_2[(a_1-c_1)(b_1b_2-d_1d_2)+a_1b_1b_2-b_1b_2c_1+b_1d_1(c_2-a_2)]=$$
$$=b_2[\lambda(a_1-c_1)+b_1[b_2(a_1-c_1)-d_1(a_2-c_2)]]=b_2[\lambda(a_1-c_1)+b_1\delta_1].$$

Аналогично получаем выражение для Q_2.

Теорема доказана.

Следствие 6. При условиях (6) и (15) в равновесии Бертрана–Нэша отношение выпусков составляет

$$\frac{Q_1^{BN}}{Q_2^{BN}}=\frac{b_2[\lambda(a_1-c_1)+b_1\delta_1]}{b_1[\lambda(a_2-c_2)+b_2\delta_2]},\tag{20}$$

а отношение цен —

$$\frac{P_1^{BN}}{P_2^{BN}}=\frac{\lambda a_1+b_1(\delta_1+3b_2c_1)}{\lambda a_2+b_2(\delta_2+3b_1c_2)}.\tag{21}$$

Соотношения (11), (12) и (20), (21) могут использоваться для проверки конкурентности соответственно по Курно–Нэшу и Бертрану–Нэшу дифференцированной дуополии, так как выпуски продуктов и их цены известны, а параметры a_i, b_i, d_i, c_i, $i=1,2$, и функции Δ_i, δ_i, λ от этих параметров можно оценить [22].

Теорема 4. При условиях (6), (15) прибыль в равновесии Бертрана–Нэша определяется величиной

$$\pi_i^{BN}=\frac{b_j[\lambda(a_i-c_i)+b_i\delta_i]^2}{\lambda\Lambda^2}=\frac{\lambda(Q_i^{BN})^2}{b_j},\ i,j=1,2,\ i\neq j.$$

Поскольку в силу теоремы 3

$$\pi_1^{BN}=(P_1^{BN}-c_1)Q_1^{BN}=\frac{[\lambda a_1+b_1(\delta_1+3b_2c_1)-\Lambda c_1]b_2[\lambda(a_1-c_1)+b_1\delta_1]}{\lambda\Lambda^2},$$

остается показать, что $\lambda(a_1-c_1)+b_1\delta_1=\lambda a_1+b_1(\delta_1+3b_2c_1)-\Lambda c_1$.

Не уменьшая общности, при $i=1$ имеем

$$\lambda a_1 + b_1(\delta_1 + 3b_2c_1) - \Lambda c_1 = (b_1b_2 - d_1d_2)a_1 + b_1[b_2(a_1-c_1) -$$

$$-d_1(a_2-c_2)] + 3b_1b_2c_1 - (4b_1b_2 - d_1d_2)c_1 =$$

$$= a_1b_1b_2 - a_1d_1d_2 + a_1b_1b_2 - b_1b_2c_1 - a_2b_1d_1 + b_1c_2d_1 + 3b_1b_2c_1 -$$

$$-4b_1b_2c_1 + c_1d_1d_2 = 2a_1b_1b_2 - a_1d_1d_2 - 2b_1b_2c_1 - a_2b_1d_1 + b_1c_2d_1 + c_1d_1d_2 =$$

$$= 2b_1b_2(a_1-c_1) - d_1d_2(a_1-c_1) - b_1d_1(a_2-c_2) = (a_1-c_1)(b_1b_2-d_1d_2) +$$

$$+ b_1[b_2(a_1-c_1) - d_1(a_2-c_2)] = \lambda(a_1-c_1) + b_1\delta_1.$$

Теорема доказана.

Следствие 7. При условиях (6), (15) разность прибылей в равновесии Бертрана–Нэша равна

$$\pi_1^{BN} - \pi_2^{BN} = \frac{\lambda(Q_1^{BN})^2}{b_2} - \frac{\lambda(Q_2^{BN})^2}{b_1} = \frac{\lambda[b_1(Q_1^{BN})^2 - b_2(Q_2^{BN})^2]}{b_1b_2}.$$

Следствие 8. При условиях (6), (9), (15) разность прибылей в равновесии Бертрана–Нэша равна

$$\pi_1^{BN} - \pi_2^{BN} = \frac{\lambda(Q_1^{BN})^2}{b_1} - \frac{\lambda(Q_2^{BN})^2}{b_1} = \frac{\lambda(Q_1^{BN} - Q_2^{BN})(Q_1^{BN} + Q_2^{BN})}{b_1} =$$

$$= \frac{(Q_1^{BN} + Q_2^{BN})\{b_2[\lambda(a_1-c_1) + b_1\delta_1] - b_1[\lambda(a_2-c_2) + b_2\delta_2]\}}{\Lambda b_1}$$

и имеет знак

$$\operatorname{sign}(\pi_1^{BN} - \pi_2^{BN}) = \operatorname{sign}(Q_1^{BN} - Q_2^{BN}),$$

совпадающий со знаком разности выпусков фирм в равновесии Бертрана–Нэша. В свою очередь, знак этой разности можно определить из отношения (20).

Следствие 9. При условиях (6), (9), (14), (15) имеет место

$$\delta_1 = b_2(a_1-c_1) - d_1(a_2-c_2) = \delta_2,$$

откуда для разности прибылей в равновесии Бертрана–Нэша выполняется

$$\pi_1^{BN} - \pi_2^{BN} = \frac{\lambda(Q_1^{BN} + Q_2^{BN})[(a_1-c_1)-(a_2-c_2)]}{\Lambda},$$

причем эта разность имеет знак

$$\operatorname{sign}(\pi_1^{BN} - \pi_2^{BN}) = \operatorname{sign}[(a_1-c_1)-(a_2-c_2)].$$

Сравнивая следствия 4 и 8, 5 и 9, видим, что преимущество фирмы в равновесиях Курно–Нэша и Бертрана–Нэша определяется одинаковыми признаками — большим равновесным выпуском и большей разностью между максимально возможной ценой и удельными производственными затратами для дифференцированных продуктов.

Теорема 5. При условиях (6) и (15) разность цен в равновесиях Курно–Нэша и Бертрана–Нэша составляет

$$P_i^{CN} - P_i^{BN} = \frac{d_1d_2(a_i-c_i)}{\Lambda}, \quad i,j=1,2, \quad i \neq j, \tag{22}$$

причем эта разность имеет знак

$$\operatorname{sign}(P_1^{CN} - P_1^{BN}) = \operatorname{sign}(d_1 d_2).$$

Ввиду теорем 2 и 4, равенств (15) и (17) для $i = 1$ имеем

$$P_1^{CN} - P_1^{BN} = \frac{\Lambda c_1 + b_1 \Delta_1 - \lambda a_1 - b_1 \delta_1 - 3 b_1 b_2 c_1}{\Lambda} =$$

$$= \frac{(\Lambda - 3 b_1 b_2) c_1 + (\Delta_1 - \delta_1) b_1 - \lambda a_1}{\Lambda} =$$

$$= \frac{\lambda c_1 + b_2 (a_1 - c_1) b_1 - \lambda a_1}{\Lambda} = \frac{(a_1 - c_1)(b_1 b_2 - \lambda)}{\Lambda} = \frac{d_1 d_2 (a_1 - c_1)}{\Lambda},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6. При условиях (6) и (15) разность выпусков в равновесиях Бертрана–Нэша и Курно–Нэша составляет

$$Q_i^{BN} - Q_i^{CN} = \frac{d_1 d_2 \delta_1}{\lambda \Lambda}, \; i, j = 1, 2, \; i \neq j, \tag{23}$$

причем эта разность имеет знак

$$\operatorname{sign}(Q_i^{BN} - Q_i^{CN}) = \operatorname{sign}(d_1 d_2).$$

Ввиду теорем 2 и 4, равенств (15) и (17) для $i = 1$ имеем

$$Q_1^{BN} - Q_1^{CN} = \frac{\lambda b_2 (a_1 - c_1) + b_1 b_2 \delta_1 - \lambda \Delta_1}{\lambda \Lambda} = \frac{\lambda [b_2 (a_1 - c_1) - \Delta_1] + b_1 b_2 \delta_1}{\lambda \Lambda} =$$

$$= \frac{b_1 b_2 \delta_1 - \lambda \delta_1}{\lambda \Lambda} = \frac{\delta_1 (b_1 b_2 - \lambda)}{\lambda \Lambda} = \frac{d_1 d_2 \delta_1}{\lambda \Lambda},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что формулы (22) и (23) имеют место как для заменителей, так и для дополнителей. Если традиционно рассматривать заменители, то в равновесии Курно–Нэша цена дифференцированного продукта i выше по сравнению с равновесием Бертрана–Нэша, а выпуск — ниже. Поэтому представляет интерес соотношение прибылей в этих равновесиях.

Теорема 7. При условиях (6) и (15) разность прибылей в равновесиях Курно–Нэша и Бертрана–Нэша составляет

$$\pi_i^{CN} - \pi_i^{BN} = \frac{d_j (d_i)^2 [\delta_j b_j (a_i - c_i) + \delta_i b_i (a_j - c_j)]}{\lambda \Lambda^2}, \; i, j = 1, 2, \; i \neq j,$$

и имеет знак

$$\operatorname{sign}(\pi_i^{CN} - \pi_i^{BN}) = \operatorname{sign}(d_j),$$

который положителен, когда дифференцированный продукт i — заменитель для продукта j, и отрицателен, когда продукт i — дополнитель для продукта j.

В силу теорем 5 и 6 для $i = 1$ имеем

$$\pi_1^{CN} - \pi_1^{BN} = (P_1^{CN} - c_1) Q_1^{CN} - (P_1^{BN} - c_1) Q_1^{BN} =$$

$$= \left(P_1^{BN} + \frac{d_1 d_2 (a_1 - c_1)}{\Lambda} - c_1 \right) Q_1^{CN} - (P_1^{BN} - c_1) \left(Q_1^{CN} + \frac{d_1 d_2 \delta_1}{\lambda \Lambda} \right) =$$

$$= P_1^{BN} Q_1^{CN} + \frac{d_1 d_2 (a_1 - c_1) Q_1^{CN}}{\Lambda} - c_1 Q_1^{CN} - P_1^{BN} Q_1^{CN} +$$

$$+ c_1 Q_1^{CN} - \frac{d_1 d_2 \delta_1 P_1^{BN}}{\lambda \Lambda} + \frac{c_1 d_1 d_2 \delta_1}{\lambda \Lambda} = \frac{d_1 d_2 [\lambda (a_1 - c_1) Q_1^{CN} - \delta_1 (P_1^{BN} - c_1)]}{\lambda \Lambda}.$$

Тогда, учитывая теоремы 1 и 2, получаем

$$P_1^{BN} - c_1 = P_1^{CN} - \frac{d_1 d_2 (a_1 - c_1)}{\Lambda} - c_1 = c_1 + b_1 Q_1^{CN} - \frac{d_1 d_2 (a_1 - c_1)}{\Lambda} - c_1 =$$

$$= \frac{b_1 \Delta_1 - d_1 d_2 (a_1 - c_1)}{\Lambda};$$

$$\pi_1^{CN} - \pi_1^{BN} = \frac{d_1 d_2 \{\lambda (a_1 - c_1) \Delta_1 - \delta_1 [b_1 \Delta_1 - d_1 d_2 (a_1 - c_1)]\}}{\lambda \Lambda^2} =$$

$$= \frac{d_1 d_2 \{\Delta_1 [\lambda (a_1 - c_1) - \delta_1 b_1] + \delta_1 d_1 d_2 (a_1 - c_1)\}}{\lambda \Lambda^2}. \qquad (24)$$

Далее, ввиду равенств (15) и (17) имеем

$$\lambda (a_1 - c_1) - \delta_1 b_1 = (b_1 b_2 - d_1 d_2)(a_1 - c_1) - b_1 [b_2 (a_1 - c_1) - d_1 (a_2 - c_2)] =$$

$$= b_1 b_2 (a_1 - c_1) - d_1 d_2 (a_1 - c_1) - b_1 b_2 (a_1 - c_1) + b_1 d_1 (a_2 - c_2) =$$

$$= b_1 d_1 (a_2 - c_2) - d_1 d_2 (a_1 - c_1);$$

$$\Delta_1 [\lambda (a_1 - c_1) - \delta_1 b_1] + \delta_1 d_1 d_2 (a_1 - c_1) = \Delta_1 b_1 d_1 (a_2 - c_2) - \Delta_1 d_1 d_2 (a_1 - c_1) +$$

$$+ \delta_1 d_1 d_2 (a_1 - c_1) = d_1 d_2 (a_1 - c_1)(\delta_1 - \Delta_1) + \Delta_1 b_1 d_1 (a_2 - c_2) =$$

$$= [2 b_2 (a_1 - c_1) - d_1 (a_2 - c_2)] b_1 d_1 (a_2 - c_2) - b_2 d_1 d_2 (a_1 - c_1)^2 =$$

$$= d_1 \{[b_2 (a_1 - c_1) - d_1 (a_2 - c_2)] b_1 (a_2 - c_2) + b_1 b_2 (a_1 - c_1)(a_2 - c_2) -$$

$$- b_2 d_2 (a_1 - c_1)^2\} = d_1 \{\delta_1 b_1 (a_2 - c_2) + b_2 (a_1 - c_1)[b_1 (a_2 - c_2) - d_2 (a_1 - c_1)]\} =$$

$$= d_1 [\delta_1 b_1 (a_2 - c_2) + \delta_2 b_2 (a_1 - c_1)].$$

Подставляя последнее равенство в уравнение (24), получаем

$$\pi_1^{CN} - \pi_1^{BN} = \frac{d_2 (d_1)^2 [\delta_2 b_2 (a_1 - c_1) + \delta_1 b_1 (a_2 - c_2)]}{\lambda \Lambda^2},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 10. Если существуют асимметричные дифференцированные продукты 1 и 2 с $d_1 > 0$ и $d_2 < 0$ (продукт 2 является заменителем для продукта 1, а продукт 1 — дополнителем для продукта 2), то $\pi_1^{CN} - \pi_1^{BN} < 0$, $\pi_2^{CN} - \pi_2^{BN} > 0$.

Вопрос существования нового класса асимметричных дифференцированных продуктов в реальности является предметом отдельных исследований, при которых будут полезны теоремы 5–7.

Основной вывод состоит в том, что в общем случае гетерогенной дуополии для разности прибылей в равновесиях Курно–Нэша и Бертрана–Нэша факт заменяемости или дополнительности дифференцированных продуктов важнее, чем степень Ω их однородности [23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. www.me.gov.ua
2. Г е л е т у х а Г. Проблема биодизеля в Украине — не технологическая, а экономическая // Эксперт. Украина. — 2007. — 3 сентября.
3. Д а в ы д о в И. Биотопливный придаток Европы. Украина делает ставку на рапс // Независимая газета. — 2008. — 10 апреля.
4. В е л и к и й А.П., Г о р б у л і н В.П., С е р г і є н к о І.В. Про підходи та принципи дослідження економічної безпеки та деякі результати їх практичного застосування // Управляющие системы и машины. — 1997. — № 4–5. — С. 5–16.
5. М и х а л е в и ч М.В., С е р г и е н к о И.В. Моделирование переходной экономики. — К.: Наук. думка, 2005. — 670 с.
6. D i x i t A.K. A model of duopoly suggesting a theory of entry barriers // Bell J. Economics. — 1979. — **10**, N 1. — P. 20–32.
7. S i n g h N., V i v e s X. Price and quantity competition in a differentiated duopoly // RAND J. Economics. — 1984. — **15**, N 4. — P. 546–554.
8. C h i k r i i A. Conflict-controlled processes. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 424 p.
9. O l i g o p o l y dynamics — models and tools / T. Puu, I. Sushko (Eds.) — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2002. — 313 p.
10. Л я ш е н к о І.М., К о р о б о в а М.В., С т о л я р А.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів. — Тернопіль: Богдан, 2006. — 304 с.
11. C o u r n o t A. Researches into the mathematical principles of the theory of wealth. English edition of Cournot (1838) translated by N.T. Bacon. — New York: A.M. Kelley, 1971. — 213 p.
12. N a s h J. Equilibrium points in n-person games // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1950. — **36**. — P. 48–49.
13. Е р м о л ь е в Ю.М., У р я с ь е в С.П. О поиске равновесия по Нэшу в играх многих лиц // Кибернетика. — 1982. — № 3. — С. 85–88.
14. Г о р б а ч у к В.М. Методы стохастической и негладкой оптимизации в задачах поиска равновесий по Нэшу: Автореф. … канд. физ.-мат. наук. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1985. — 16 с.
15. Г о р б а ч у к В.М. Поиск равновесий Нэша в условиях нестационарности негладких функций выигрыша // Математичесие методы анализа и оптимизации сложных систем, функционирующих в условиях неопределенности — К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН Украины, 1986. — С. 8–12.
16. G o r b a c h u k V. Methods for Nash equilibria search // Nonsmooth analysis and its applications to mathematical economics. — Baku: Ac. Sci. USSR, 1991. — P. 65.
17. Г о р б а ч у к В.М. Обобщенное равновесие Курно–Штакельберга–Нэша // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 1. — С. 3–9.
18. Г о р б а ч у к В.М., Г а р к у ш а Н.І. Рівноваги Курно–Неша за асиметричної невизначеності та узагальнені рівноваги Курно–Штакельберга–Неша // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2007. — № 1. — С. 143–148.
19. Г о р б а ч у к В.М., Г а р к у ш а Н.І. Рівновага Курно–Неша за умов асиметричної невизначеності як узагальнена рівновага Курно–Штакельберга–Неша // PDMU-2007 (21–23 травня 2007 р., Чернівці, Україна). — К.: Київ. нац. ун-т імені Тараса Шевченка, 2007. — С. 94.
20. Г о р б а ч у к В.М. Равновесие Курно–Нэша при асимметричной неопределенности как обобщенное равновесие Курно–Штакельберга–Нэша // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 3–10.
21. B e r t r a n d J. Revue de la theorie mathematique de la richesse sociale et des recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses // J. des Savants. — 1883. — P. 499–508.
22. Г р и ц е н к о О.Г., Я с т р е м с ь к и й О.І. Аналіз взаємозалежності «ціна — обсяг продажу» як засіб визначення рівня монопольної влади // Банк. справа. — 2005. — **5**. — С. 3–16.
23. Г о р б а ч у к В.М., Г а р к у ш а Н.І. Рівноваги Курно–Неша та Бертрана–Неша для диференційованих продуктів // PDMU-2009 (Східниця, 27–30 квітня 2009 р.) — К.: Київ. нац. ун-т імені Тараса Шевченка, 2009. — С. 85–86.

Поступила 02.06.2008