УДК 519.86

Н.А. НЕДАШКОВСКИЙ, Т.И. КРОШКА

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ БАЛАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ МЕЖОТРАСЛЕВОГО ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Ключевые слова: *эколого-экономическая система, межотраслевой эколого-экономический баланс, отсеченные системы, рекуррентные соотношения, теплицевы матрицы.*

Современные экономические системы функционируют в условиях сильного влияния экосистем, и наоборот, антропогенное воздействие на экосистемы существенно влияет на их динамику. В связи с этим следует в большинстве случаев рассматривать экономику и экологию как подсистемы единой целостной эколого-экономической системы. Это особенно важно в настоящее время, когда человеческое сообщество стремится к достижению устойчивого развития.

Среди методов изучения эколого-экономических систем или отдельных процессов их взаимодействия важное значение имеют методы математического моделирования. Данная работа посвящена математическому моделированию эколого-экономического взаимодействия на производственно-технологическом уровне. Рассматриваются так называемые модели межотраслевого эколого-экономического баланса, или модели Леонтьева–Форда.

Один из вариантов прямой линейной модели Леонтьева–Форда формализуется соотношениями

$$\begin{cases} x^{(1)} = A_{11}x^{(1)} + A_{12}x^{(2)} + y^{(1)}, \\ x^{(2)} = A_{21}x^{(1)} + A_{22}x^{(2)} - y^{(2)}, \end{cases} \tag{1}$$

где $x^{(1)} \in \mathbf{R}_+^n$ — вектор основного производства ($\mathbf{R}_+^l$ — неотрицательный ортант l-измеримого пространства); $x^{(2)} \in \mathbf{R}_+^m$ — вектор уничтоженных загрязнителей (вспомогательных продуктов-отходов); $y^{(1)} \in \mathbf{R}_+^n$ — вектор конечной продукции; $y^{(2)} \in \mathbf{R}_+^m$ — вектор неуничтоженных загрязнителей; $A_{11} = (a_{ij}^{(11)})_{i,j=1}^n$ — квадратная матрица затрат продукции i на выпуск единицы продукции j; $A_{12} = (a_{il}^{(12)})_{i,l=1}^{n,m}$ — прямоугольная матрица затрат продукции i на уничтожение единицы загрязнителя l; $A_{21} = (a_{lj}^{(21)})_{l,j=1}^{m,n}$ — прямоугольная матрица выпусков загрязнителя l при выпуске единицы продукции j; $A_{22} = (a_{ls}^{(22)})_{l,s=1}^m$ — квадратная матрица выпусков загрязнителя l при уничтожении единицы загрязнителя s. Компоненты всех перечисленных векторов и матриц являются неотрицательными величинами, поскольку они отображают реальную экономическую сущность.

Суть модели (1) очевидна: первое равенство — распределение продукции материального производства на затраты в основном и вспомогательном производствах, а также на конечную продукцию; второе равенство — балансовое соотношение, состоящее в том, что объем ликвидированного загрязнения равен разности между объемами всего загрязнения и неуничтоженного.

По аналогии с классическим межотраслевым балансом соотношения (1) основываются на соответствующей схеме межотраслевого эколого-экономического баланса «по строкам».

Часто более интересными, чем модель (1), являются ее двойственные варианты, поскольку их можно использовать при решении проблем ценообразования. Эти модели базируются на схемах межотраслевого эколого-экономического баланса [1, 2] в стоимостной форме «по столбцам» (первый и третий квадранты).

Обозначим:

- T — операция транспонирования;
- $p^{(1)} = (p_1^{(1)}, \ldots, p_n^{(1)})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}_+^n$ — вектор цен основной продукции;
- $p^{(2)} = (p_1^{(2)}, \ldots, p_m^{(2)})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}_+^m$ — вектор стоимости уничтожения единичных объемов загрязнения;
- $k^{(1)} = (k_1^{(1)}, \ldots, k_n^{(1)})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}_+^n$ — вектор коэффициентов условно-чистой продукции либо относительных цен той части основной продукции, которая включена в условно-чистую продукцию (если $z_j^{(1)}$ — условно-чистая продукция j в натуральной форме, то $k_j^{(1)} = (z_j^{(1)} / x_j^{(1)}) p_j^{(1)}$);
- $k^{(2)} = (k_1^{(2)}, \ldots, k_m^{(2)})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}_+^m$ — вектор коэффициентов условно-чистой продукции отраслей вспомогательного производства либо относительных стоимостей уничтожения загрязнителей (если $z_s^{(2)}$ — условно-чистая продукция s в натуральной форме, то $k_s^{(2)} = (z_s^{(2)} / x_s^{(2)}) p_s^{(2)}$).

Тогда одним из вариантов двойственной относительно цен модели Леонтьева–Форда является следующая модель [3, 4]:

$$\begin{cases} p^{(1)} = A_{11}^{\mathrm{T}} p^{(1)} + A_{21} p^{(2)} + k^{(1)}, \\ p^{(2)} = A_{12}^{\mathrm{T}} p^{(1)} + A_{22}^{\mathrm{T}} p^{(2)} + k^{(2)}. \end{cases} \tag{2}$$

Как для модели (1), так и для модели (2) основной математической проблемой является проблема продуктивности, т.е. существования неотрицательных решений при заданных технологических матрицах $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ и векторах $y^{(1)}, y^{(2)}$.

На сегодняшний день эта проблема достаточно хорошо изучена [3]. Для прямой модели Леонтьева–Форда (1) установлены определенные условия продуктивности, в частности, если существуют обратные матрицы

$$(I_n - A_{11})^{-1},\ (I_m - A_{22})^{-1},\ (I_n - A_1)^{-1},\ (I_m - A_2)^{-1},$$

где

$$A_1 = A_{11} + A_{12}(I_m - A_{22})^{-1} A_{21}, \quad A_2 = A_{22} + A_{21}(I_n - A_{11})^{-1} A_{12},$$

I_n, I_m — диагональные единичные матрицы размерностей $(n \times n)$ и $(m \times m)$, то при $y^{(1)} > 0$ $(\{y^{(1)}, 0\} \subset \mathbf{R}^n)$, $y^{(2)} \geq 0$ $(\{y^{(2)}, 0\} \subset \mathbf{R}^m)$ достаточным условием неотрицательности решений системы (1) будет условие

$$A_{21}(I_n - A_{11})^{-1} y^{(1)} \geq y^{(2)} \tag{3}$$

или более жесткое условие

$$A_{21} y^{(1)} \geq y^{(2)}. \tag{4}$$

В случае продуктивности блочной матрицы $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, т.е. существования матрицы A^{-1}, при $y^{(1)} > 0$ $(\{y^{(1)}, 0\} \subset \mathbf{R}^n)$, $y^{(2)} \geq 0$ $(\{y^{(2)}, 0\} \subset \mathbf{R}^m)$ условие

$$(I_m - A_2)^{-1} [A_{21}(I_n - A_{11})^{-1} y^{(1)} - y^{(2)}] \geq 0 \ (0 \in \mathbf{R}^m) \tag{5}$$

является необходимым и достаточным для существования неотрицательных решений (1).

Исследование продуктивности двойственной относительно цен модели (2) фактически сводится к исследованию продуктивности классической модели Леонтьева [5], так как ее можно записать в виде

$$p = A^{\mathrm{T}} p + k, \tag{6}$$

где $p = (p^{(1)}, p^{(2)})^{\mathrm{T}}$, $k = (k^{(1)}, k^{(2)})^{\mathrm{T}}$.

Для продуктивности модели (6) (т.е. (2)) с неотрицательной и неразложимой [5] матрицей A^{T} необходимо и достаточно, чтобы собственное число Фробениуса матрицы A^{T} было меньше единицы. Воспользовавшись условием $|A^{\mathrm{T}} - \lambda E| = 0$ и решив квадратное уравнение, которое при этом получилось, имеем число Фробениуса для матрицы A^{T} следующего вида: $\lambda_{A^{\mathrm{T}}} = 1/2\Big(A_{11} + A_{22} + {}$ $+ \sqrt{(A_{11} + A_{22})^2 + 4A_{12}A_{21}}\Big)$.

Простейшими достаточными условиями существования неотрицательных решений системы (6) с неотрицательной и неразложимой матрицей A^{T} являются условия

$$\rho_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\mathrm{T}} \le 1, \; i = \overline{1, n}, \tag{7}$$

среди которых хотя бы для одного i_0 выполняется строгое неравенство ($\rho_{i_0} < 1$).

Таким образом, условия (3)–(5) для модели (1) и условия (7) для модели (2) играют важную содержательную роль на уровне модельного анализа, поскольку они обеспечивают на практике существование экономически обоснованных решений.

Другой важной особенностью моделей (1), (2) (как и других вариантов балансовых моделей эколого-экономического взаимодействия) является структура матриц $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$. В практических приложениях элементы матриц A_{11}, A_{12} и A_{21}, A_{22} имеют совершенно разный порядок. К тому же некоторые из этих матриц могут быть сильно разряженными или плохо обусловленными, или иметь большую размерность. Эти факторы стимулируют разработку специфических методов и алгоритмов для нахождения решений моделей (1), (2) и им подобных. Некоторые из них предлагаются ниже.

Сначала рассмотрим случай, когда элементы матриц $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ — некоторые фиксированные числа, связанные с производством; $y^{(1)} \in \mathbf{R}_+^n$ — параметрический вектор конечной продукции; $y^{(2)} \in \mathbf{R}_+^m$ — параметр неуничтоженных загрязнителей. Будем искать вектор валового (основного) производства $x^{(1)} \in \mathbf{R}_+^n$ и вектор уничтоженных загрязнителей $x^{(2)} \in \mathbf{R}_+^m$ (вспомогательных продуктов-отходов) в виде некоторого аналитического выражения, зависящего от параметров $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$.

Система (1) может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ -y^{(2)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

или

$$\left[\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Введя обозначение $C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, систему (9) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

откуда

$$\begin{cases} (C_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{21}) x^{(1)} = y^{(1)} - C_{12} C_{22}^{-1} y^{(2)}, \\ (C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12}) x^{(2)} = y^{(2)} + C_{21} C_{11}^{-1} y^{(1)}. \end{cases} \tag{11}$$

Для определения неизвестных $x^{(1)}, x^{(2)}$ нужно вычислить $C_{21} C_{11}^{-1}$ и $C_{12} C_{22}^{-1}$ либо решить системы линейных алгебраических уравнений

$$C_{11}^{\mathrm{T}} z^{(1)} = C_{21}^{\mathrm{T}}, \tag{12}$$

$$C_{22}^{\mathrm{T}} z^{(2)} = C_{12}^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

где $C_{11} = (c_{ij}^{(11)})_{i,j=1}^{n}$, $C_{22} = (c_{ls}^{(22)})_{l,s=1}^{m}$, $C_{12} = (c_{il}^{(12)})_{i,l=1}^{n,m}$, $C_{21} = (c_{lj}^{(21)})_{l,j=1}^{m,n}$, т.е. нужно решить систему n-го порядка (12) с m правыми частями и систему m-го порядка с n правыми частями (13).

Для системы (12) можно записать, согласно второму алгоритму усеченных систем [6, 7], рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} b_{i,k} = \dfrac{a_{i,k}^{\mathrm{T}} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{i,j}^{\mathrm{T}} u_j^{(k-1)}}{a_{k,k}^{\mathrm{T}} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{k,j}^{\mathrm{T}} u_j^{(k-1)}} & (i = \overline{k+1, n}), \\ v_k^{(k)} = b_{k+1,k} & (k = \overline{1, n-1}), \\ v_s^{(k)} = b_{k+1,s} - \sum\limits_{i=s+1}^{k} b_{i,s} v_i^{(k)} & (s = \overline{k-1, 1}); \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} b_{k,i} = \dfrac{a_{k,i}^{\mathrm{T}} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{j,i}^{\mathrm{T}} v_j^{(k-1)}}{a_{k,k}^{\mathrm{T}} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{j,k}^{\mathrm{T}} v_j^{(k-1)}} & (i = \overline{k+1, n+m}), \\ u_k^{(k)} = b_{k+1,k} & (k = \overline{1, n-1}), \\ u_s^{(k)} = b_{s,k+1} - \sum\limits_{i=s+1}^{k} b_{s,i} u_i^{(k)} & (s = \overline{k-1, 1}). \end{cases} \tag{15}$$

Проведя вычисления по формулам (14) и (15) для $z^{(1)}$, можно записать:

$$z_{i,j}^{(1)} = b_{i,n+j} - \sum_{k=1}^{m-1} b_{i,n+k} z_{k,j}. \tag{16}$$

После разового вычисления $z_{i,j}^{(1)}$ вектор $x^{(1)}$ определяется из формулы

$$x^{(1)} = (C_{11} - z^{(1)} C_{21})^{-1} (y^{(1)} - z^{(1)} y^{(2)}).$$

Матрица $w = (C_{11} - z^{(1)} C_{21})^{-1}$ может быть вычислена как решение системы n-го порядка

$$(C_{11} - z^{(1)} C_{21}) w = E \tag{17}$$

с помощью алгоритма, подобного схеме (14)–(15).

Таким образом, для вычисления вектора $x^{(1)}$ после решения систем (12) и (17) используется формула $x^{(1)} = wy^{(1)} - wz^{(1)} y^{(2)}$.

Для системы (13) можно записать, согласно второму алгоритму усеченных систем [6, 7], рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} b_{i,k} = \dfrac{a_{i,k}^{\mathrm{T}} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{i,j}^{\mathrm{T}} u_j^{(k-1)}}{a_{k,k}^{\mathrm{T}} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{k,j}^{\mathrm{T}} u_j^{(k-1)}} & (i = \overline{k+1, m}), \\ v_k^{(k)} = b_{k+1,k} & (k = \overline{1, m-1}), \\ v_s^{(k)} = b_{k+1,s} - \sum\limits_{i=s+1}^{k} b_{i,s} v_i^{(k)} & (s = \overline{k-1, 1}); \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} b_{k,i} = \dfrac{a_{k,i}^{\mathrm{T}} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{j,i}^{\mathrm{T}} v_j^{(k-1)}}{a_{k,k}^{\mathrm{T}} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{j,k}^{\mathrm{T}} v_j^{(k-1)}} & (i = \overline{k+1, m+n}), \\ u_k^{(k)} = b_{k+1,k} & (k = \overline{1, m-1}), \\ u_s^{(k)} = b_{s,k+1} - \sum\limits_{i=s+1}^{k} b_{s,i} u_i^{(k)} & (s = \overline{k-1, 1}). \end{cases} \tag{19}$$

После проведения вычислений по формулам (18) и (19) для вычисления $z^{(2)}$ можно записать:

$$z_{i,j}^{(2)} = b_{i,n+j} - \sum_{k=1}^{n-1} b_{i,m+k} z_{k,j}, \; (C_{22} - z^{(2)} C_{12}) w = E, \; x^{(2)} = wy^{(2)} + wz^{(2)} y^{(1)}.$$

Несложные вычисления показывают, что для реализации метода на ЭВМ в общем случае нужно выполнить с точностью до главного члена $(2mn^2 + 2m^2 n + 3\frac{2}{3}n^3 + 3\frac{2}{3}m^3)$ аддитивных и $(2mn^2 + 2m^2 n + 3\frac{2}{3}n^3 + 3\frac{2}{3}m^3)$ мультипликативных операций.

Такой подход позволяет вычислять для каждого нового набора $y^{(1)}, y^{(2)}$ неизвестные $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, выполнив всего $(2n^2 + 2m^2)$ арифметических операций сложения и умножения.

Рассмотрим теперь случай, когда элементы системы (1) зависят от времени, т.е.

$$\begin{cases} x^{(1)}(t) = A_{11}x^{(1)}(t) + A_{12}x^{(2)}(t) + y^{(1)}(t), \\ x^{(2)}(t) = A_{11}x^{(1)}(t) + A_{12}x^{(2)}(t) - y^{(2)}(t), \end{cases} \tag{20}$$

где

$$a_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{l} a_{i,j,k} t^k \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m+n), \tag{21}$$

$$y_i^{(1)}(t) = \sum_{k=0}^{l} y_{i,k}^{(1)} t^k \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

$$y_i^{(2)}(t) = \sum_{k=0}^{l} y_{i,k}^{(2)} t^k \quad (i = n+1, n+2, \ldots, m+n). \tag{23}$$

По аналогии с предыдущим случаем система (20) может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} G_{11}(t) & G_{12}(t) \\ G_{21}(t) & G_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{(1)} \\ H^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где

$$G(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} H^{(1)} \\ H^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ -y^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

В общем виде (24) можно записать как

$$G(t)X(t) = H(t). \tag{26}$$

Решение системы (26) будем искать в виде

$$X = \frac{\sum_{k=0}^{(m+n)l} X_k^{(1)} t^k}{\sum_{k=0}^{(m+n)l} v_k t^k}, \tag{27}$$

где X_k — числовые матрицы размера $(m+n) \times (m+n)$, а v_k — числа.

Тогда систему (26) можно записать следующим образом:

$$G(t)X(t) = (t^l G_0 + t^{l-1} G_1 + t^{l-2} G_2 + \ldots$$

$$\ldots + t^2 G_{l-2} + t^1 G_{l-1} + G_l)(t^{(m+n)l} X_0 + t^{(m+n)l-1} X_1 + t^{(m+n)l-2} X_2 + \ldots$$

$$\ldots + t^1 X_{(m+n)l-1} + X_{(m+n)l}) = (t^l H_0 + t^{l-1} H_1 + t^{l-2} H_2 + \ldots$$

$$\ldots + t^2 H_{l-2} + t^1 H_{l-1} + H_l)(t^{(m+n)l} v_0 + t^{(m+n)l-1} v_1 + t^{(m+n)l-2} v_2 + \ldots$$

$$\ldots + t^2 v_{l-2} + t^1 v_{(m+n)l-1} + v_{(m+n)l}).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему $(n+m)[l(n+m+1)+1]$ уравнений с $[(n+m)l+1](n+m+1)$ неизвестными

$$
\begin{cases}
G_0 X_0^{(1)} - H_0 v_0 = 0, \\
G_0 X_1^{(1)} + G_1 X_0^{(1)} - (H_0 v_1 + H_1 v_0) = 0, \\
G_0 X_2^{(1)} + G_1 X_1^{(1)} + G_2 X_0^{(1)} - (H_0 v_2 + H_1 v_1 + H_2 v_0) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum\limits_{s=0}^{l} G_s X_{p-s}^{(1)} - \sum\limits_{s=0}^{l} H_s v_{p-s} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{l-1} X_{(n+m)l}^{(1)} + G_l X_{(n+m)l-1}^{(1)} - (H_{l-1} v_{(n+m)l} + H_l v_{(n+m)l-1}) = 0, \\
G_l X_{(n+m)l}^{(1)} - H_l v_{(n+m)l} = 0.
\end{cases} \qquad (28)
$$

Для большей наглядности дальнейших выкладок и облегчения анализа систему (28) блочного вида запишем в матричном виде:

$$
\left(\begin{array}{llllllllllllll}
G_0 & & & & & & & & & & & & & -H_0 \\
G_1 & G_0 & & & & & & & & & & & & -H_1 \\
G_2 & G_1 & G_0 & & & & & & & & & & & -H_2 \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & \cdots \\
G_l & G_{l-1} & \cdots & G_1 & G_0 & & & & & & & & & -H_l \\
 & G_l & G_{l-1} & \cdots & G_1 & G_0 & & & & & & & & \\
 & & G_l & G_{l-1} & \cdots & G_1 & G_0 & & & & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & & & & G_l & G_{l-1} & \cdots & G_1 & G_0 & & & & \\
 & & & & & & G_l & G_{l-1} & \cdots & G_1 & G_0 & & & \\
 & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \iddots \\
 & & & & & & & & G_l & G_{l-1} & \cdots & G_1 & G_0 \quad -H_0 & \iddots \\
 & & & & & & & & & G_l & G_{l-1} & \cdots & G_1 \quad -H_0 \quad -H_1 & \iddots \\
 & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \quad \iddots \quad \iddots & \iddots \\
 & & & & & & & & & & & G_l & G_{l-1} \quad -H_{l-1} \quad -H_l & \\
 & & & & & & & & & & & & G_l \quad H_l &
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
X_0^{(1)} \\ X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ \cdots \\ X_{n+m}^{(1)} \\ X_{n+m+1}^{(1)} \\ X_{n+m+2}^{(1)} \\ \cdots \\ X_{(n+m)(l+1)}^{(1)} \\ \cdots \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ v_{(n+m)(l+1)-1} \\ v_{(n+m)(l+1)}
\end{array}\right) = 0.
$$

Если данную систему рассматривать как плотно заполненную, то можно получить алгоритмы со сложностью порядка $O(l^3 (n+m)^6)$. Поэтому более эффективные способы могут быть получены лишь с учетом специфики заполнения численной системы.

Схема разрезания. Поделим матрицу системы (28) на блоки:

$$
\left\| \begin{array}{c} D_{11} \mid D_{12} \\ -- \mid -- \\ D_{21} \mid D_{22} \end{array} \right\|,
$$

где D_{11} — квадратная матрица размера $(n+m+1)(l+2)$, а D_{12}, D_{21}, D_{22} — прямоугольные матрицы соответствующих размеров.

Без ограничения общности предположим, что минор D_{11} отличен от нуля (для этого достаточно, чтобы выполнялось условие $\det G_0 \neq 0$).

Пусть, например, $v_{(n+m)l}=1$, тогда запишем неоднородную систему:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Решения системы (29) с точностью до множителя совпадают с решениями системы (28). На основе формулы Шура [8] вектор Q_2 может быть определен из системы уравнений

$$(D_{22}-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12})Q_2=B_2-D_{21}D_{11}^{-1}B_1. \tag{30}$$

После определения Q_2 можно переходить к вычислению Q_1 из системы

$$D_{11}Q_1=B_1-D_{12}Q_2. \tag{31}$$

Таким образом, вычисление неизвестных Q_1 и Q_2 в системе (29) может быть сведено к решению систем (30) и (31) меньшего порядка.

Остановимся более детально на выполнении каждого звена алгоритма и проведем оценку вычислительных затрат данной схемы на каждом шаге реализации.

Этап 1 (вычисление $D_{11}^{-1}D_{12}$ и $D_{11}^{-1}B_1$). Рассмотрим сначала процесс вычисления произведения $D_{11}^{-1}D_{12}$. Как известно [9], для этого достаточно для всех $i=1,2,\ldots,(n+m)l$ найти решения систем вида

$$\begin{pmatrix} G_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ G_1 & G_0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ G_2 & G_1 & G_0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_l & G_{l-1} & G_{l-2} & \cdots & G_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & G_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_0^{(i)} \\ W_1^{(i)} \\ W_2^{(i)} \\ \cdots \\ W_l^{(i)} \\ \cdots \\ W_{(n+m)l}^{(i)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_0 \\ \cdots \\ B_l \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

По типу заполнения D_{11} — блочно-треугольная квадратная матрица клеточно-теплицевого типа. С учетом этого обстоятельства нетрудно сделать вывод, что достаточно решить систему

$$\begin{pmatrix} G_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ G_1 & G_0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ G_2 & G_1 & G_0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_l & G_{l-1} & G_{l-2} & \cdots & G_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & G_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_0^{(i)} \\ W_1^{(i)} \\ W_2^{(i)} \\ \cdots \\ W_l^{(i)} \\ \cdots \\ W_{(n+m)l}^{(i)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \cdots \\ B_l \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

После вычисления $W_j^{(1)}$ $(j=1,2,\ldots,(n+m)l)$ оставшиеся неизвестные $W_j^{(i)}$ $(i=2,3,\ldots,(n+m)l;\ j=0,1,2,\ldots,(n+m)l)$ можно определить из соотношений

$$\begin{cases} W_0^{(i)}=W_1^{(i)}=\ldots=W_{i-1}^{(i)}=0, \\ W_i^{(i)}=W_0^{(i)}, \\ W_{i+1}^{(i)}=W_1^{(i)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_{(n+m)l}^{(i)}=W_{(n+m)l-i}^{(i)}. \end{cases} \tag{34}$$

Подсчитаем количество арифметических операций, необходимых для решения системы (28). Как было отмечено, ее матрица является клеточно-теплицевой и, кроме того, блочно-треугольной и ленточной. Для решения системы (34) запишем аналог соответствующего метода Е.Е. Тыртышникова [9], адаптировав его для конкретной цели.

Введем в рассмотрение матрицы

$$U=\begin{pmatrix} G_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_1 & G_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_l & G_{l-1} & G_{l-2} & \cdots & G_0 \end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix} 0 & G_l & G_{l-1} & \cdots & G_1 \\ 0 & 0 & G_l & \cdots & G_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда вследствие их определения G можно записать как блочно-двухдиагональную матрицу

$$G=\begin{pmatrix} U & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ V & U & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & V & U \end{pmatrix}. \tag{35}$$

В соответствии с (33) введем также следующие представления о векторных столбцах W и B:

$$W=\begin{pmatrix} W^{(1)} \\ W^{(2)} \\ \dots \\ W^{(n+m)} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \\ \dots \\ B^{(n+m)} \end{pmatrix}.$$

С учетом (35) можно записать:

$$\begin{cases} W^{(1)}=U^{-1}B^{(1)}, \\ W^{(2)}=B^{(2)}-U^{-1}VW^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ W^{(n+m)}=B^{(n+m)}-U^{-1}VW^{(n+m-1)}. \end{cases} \tag{36}$$

В соответствии с введенными обозначениями матрица U является нижней треугольной, поэтому можно сосредоточить внимание на алгоритме вычисления элементов U^{-1}. Как известно [9], обратная матрица для левой теплицевой матрицы остается теплицевой левой треугольной, т.е. имеет вид

$$U^{-1}=\begin{pmatrix} G_0^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_1^{-1} & G_0^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_l^{-1} & G_{l-1}^{-1} & G_{l-2}^{-1} & \cdots & G_0^{-1} \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Предположим, что $l+1$ является степенью двойки. Тогда процесс поиска U^{-1} легко сводится к обращению ее ведущей подматрицы $U_{l/2}$, которая имеет вдвое меньший порядок. Действительно, согласно (37) находим

$$U_{l/2}^{-1}=\begin{pmatrix} G_0^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_1^{-1} & G_0^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{l/2}^{-1} & G_{l/2-1}^{-1} & G_{l/2-2}^{-1} & \cdots & G_0^{-1} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Матрица $U_{l/2}^{-1}$ — ведущая подматрица матрицы U^{-1}. Она имеет половину элементов, которые определяют матрицу U^{-1}. Чтобы найти второю половину, рассмотрим следующее соотношение:

$$\begin{pmatrix} G_{l/2+1}^{(-1)} \\ G_{l/2+2}^{(-1)} \\ \cdots \\ G_{l}^{(-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ G_1^{-1} & G_0^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{l/2}^{-1} & G_{l/2-1}^{-1} & \cdots & G_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{l/2+1} & 0 & \cdots & 0 \\ G_{l/2+2} & G_{l/2+1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_l & G_{l-1} & \cdots & G_{l/2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_0^{(-1)} \\ G_1^{(-1)} \\ \cdots \\ G_{l/2}^{(-1)} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

В соответствии с (38) и (39) обращение теплицевой треугольной матрицы порядка l сводится к решению аналогичной задачи для матрицы порядка $l/2$ и выполнению умножения на блочный вектор теплицевых матриц порядка $l/2$.

При этом одно такое умножение может быть реализовано с помощью $3(n+m)^2$ дискретных преобразований Фурье, т.е. с затратой $3/2(n+m)^2 l \log_2 l$ операций умножения и $3(n+m)^2 l \log_2 l$ операций сложения [9].

Таким образом, в предложенном рекурсивном алгоритме количество операций умножения определяется по формуле

$$Q = 3(n+m)^2 \left[l \log_2 l + \frac{l}{2} \log_2 \frac{l}{2} + \frac{l^2}{2} \log_2 \frac{l^2}{2} + \cdots \right].$$

Выражение в квадратных скобках равно $2l \log_2((n+m)/2)+2$, поэтому $Q = 6(n+m)^2 l \log_2 l$. Количество операций сложения-вычитания вдвое больше.

Следует отметить, что когда l не является степенью двойки, то можно считать U ведущей подматрицей некоторой треугольной теплицевой матрицы, порядок которой равен степени двойки. Найдя обратную ей матрицу, найдем также U^{-1}.

Итак, в дальнейшем можно полагать, что l — степень двойки. Тогда в соответствии с рассмотренным алгоритмом для нахождения U^{-1} нужно выполнить $6(n+m)^2 l \log_2 l$ операций умножения и $12(n+m)^2 l \log_2 l$ операций сложения. Согласно (28) вычисление W связано с реализацией $(2l+1)$ умножений на «блочный вектор» теплицевых матриц блочного порядка не выше l, среди которых лишь четыре разных. В таком случае необходимо выполнить с точностью до главного члена $[4(n+m)^3 \log_2 l + 12(n+m) l \log_2 l]$ умножений и $[8(n+m)^3 \log_2 l + 24(n+m) l \log_2 l]$ сложений.

Учитывая (32), можно записать:

$$D_{11}^{-1} D_{12} = \begin{pmatrix} W_0^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ W_1^{(1)} & W_0^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ W_2^{(1)} & W_1^{(1)} & W_0^{(1)} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_l^{(1)} & W_{l-1}^{(1)} & W_{l-2}^{(1)} & \cdots & W_0^{(1)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{(n+m)l}^{(1)} & W_{(n+m)l-1}^{(1)} & W_{(n+m)l-2}^{(1)} & \cdots & W_{(n+m)l-l}^{(1)} & \cdots & W_0^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Нетрудно убедиться, что $D_{11}^{-1} B_1 = (0\ 0 \ldots W_0^{(1)}\ W_1^{(1)} \ldots W_l^{(1)})^{\mathrm{T}}$, причем $W_i^{(1)}$ — векторы размерности $(n+m)$. Таким образом, для определения $D_{11}^{-1} B_1$ не нужно выполнять дополнительных вычислений.

Этап 2 (вычисление $D_{21}(D_{11}^{-1}B_1)$ и $D_{21}(D_{11}^{-1}D_{12})$). Вычисление произведения матриц $D_{21}(D_{11}^{-1}B_1)$ можно выполнить по предыдущей схеме, затратив не более чем $(n+m)^2 l^2$ операций умножения и сложения. Алгоритм вычисления $D_{21}(D_{11}^{-1}D_{12})$ вследствие более тщательного исследования может быть существенно ускорен. Для этого произведение двух матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & G_l & G_{l-1} & \cdots & G_3 & G_2 & G_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & G_l & \cdots & G_4 & G_3 & G_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & G_5 & G_4 & G_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & G_l & G_{l-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & G_l \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} W_0^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ W_1^{(1)} & W_0^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ W_2^{(1)} & W_1^{(1)} & W_0^{(1)} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_l^{(1)} & W_{l-1}^{(1)} & W_{l-2}^{(1)} & \cdots & W_0^{(1)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{(n+m)l}^{(1)} & W_{(n+m)l-1}^{(1)} & W_{(n+m)l-2}^{(1)} & \cdots & W_{(n+m)l-l}^{(1)} & \cdots & W_{l+1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

будем вычислять иначе, чем в предыдущей схеме. Для умножения столбца $(W_0^{(1)} \; W_1^{(1)} \; \ldots \; W_l^{(1)} \; W_{l+1}^{(1)} \; \ldots \; W_{l(n+m-1)-1}^{(1)} \; \ldots \; W_{(n+m)l}^{(1)})^{\mathrm{T}}$ на клеточно-теплицеву матрицу, записанную в произведении слева, можно использовать быстрое преобразование Фурье. Для его реализации нужно выполнить $4(n+m)^2 l \log_2 l$ операций умножения и $4(n+m)^2 l \log_2 l$ операций сложения. В результате будут найдены все поддиагональные элементы искомой матрицы.

По аналогии для нахождения всех наддиагональных элементов произведения достаточно умножить строку

$$(0 \;\; 0 \; \ldots \; 0 \;\; G_l \;\; G_{l-1} \; \ldots \; G_2 \;\; G_1) \tag{41}$$

на каждый столбец второй матрицы. Тогда при умножении (41) на второй столбец второй матрицы будут в качестве промежуточных величин вычислены и элементы первой наддиагонали. При умножении этой строки на третий столбец в процессе вычислений будут найдены также все элементы второй наддиагонали и т.д. Всего для выполнения этой процедуры с применением быстрого преобразования Фурье нужно выполнить $4(n+m)^2 l \log_2 (n+m)l$ операций умножения и $4(n+m)^2 l \log_2 (n+m)l$ операций сложения.

В результате выполнения описанных операций найдена матрица G размера $(n+m)l \times (n+m)l$ общего вида

$$G^* = \begin{pmatrix} G_{11}^* & G_{12}^* & \cdots & G_{1l}^* \\ G_{21}^* & G_{22}^* & \cdots & G_{2l}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{l1}^* & G_{l2}^* & \cdots & G_{ll}^* \end{pmatrix},$$

которая будет использована в процессе дальнейших вычислений.

Этап 3 (определение Q_2). На этом этапе сначала нужно вычислить величины $[D_{22}-D_{21}(D_{11}^{-1}D_{12})]$ и $[B_2-D_{21}(D_{11}^{-1}B_1)]$. Как было показано на этапе 2 реализации алгоритма, $D_{21}(D_{11}^{-1}D_{12})=G^*$ — матрица размера $(n+m)l\times(n+m)l$, а $-D_{21}(D_{11}^{-1}B_1)=B^*$ — вектор размерности $(n+m)l$. Поэтому для вычисления $D_{22}-D_{21}(D_{11}^{-1}D_{12})$ достаточно выполнить $(n+m)^2 l^2$ операций сложения, а для нахождения $B_2-D_{21}(D_{11}^{-1}B_1)$ — $(n+m)l$ операций сложения. Непосредственно для определения Q_2 из системы $(n+m)l$-го порядка с $(n+m)l$ неизвестными затрачено $O(((n+m)l)^\beta$ операций. При использовании алгоритма отсеченных систем $\beta=3$, для быстрых схем типа Ф. Штрассена $\beta=\log_2 7$, а для новейших методов еще меньше — $\beta=2{,}3176$.

Этап 4 (определение Q_1). На этом этапе сначала необходимо вычислить правую часть $B_1-D_{12}Q_2$ системы (31). Для ее нахождения можно воспользоваться предыдущей схемой, затратив $(n+m)^2 l^2/2$ операций умножения и такое же количество операций сложения. Вычисление Q_1 можно провести и по схеме, описанной на этапе 1. Итак, при использовании приведенного алгоритма будет затрачено $4(n+m)^2 l\log_2 l$ операций умножения и $8(n+m)^2 l\log_2 l$ операций сложения.

Таким образом, для полной реализации алгоритма вычисления $z^{(1)}(t)$ нужно выполнить $C_1[(n+m)l]^\beta+4(n+m)^3 l\log_2 l+4(n+m)^2 l\log_2(n+m)l$ мультипликативных операций и $C_2[(n+m)l]^\beta+8(n+m)^3 l\log_2 l+8(n+m)^2 l\log_2(n+m)l$ аддитивных действий на ЭВМ.

Константы C_1, C_2 и β зависят от выбранного алгоритма решения систем линейных алгебраических уравнений.

После вычисления коэффициентов $X_k^{(1)}$ и ν_k $(k=0,1,\ldots,(n+m)l)$ в (27) пересчет $X(t)$ для произвольного t потребует не более $(n+m)^3 l$ операций сложения и $(n+m)^3 l$ операций умножения.

В работе предложены эффективные с точки зрения вычислительной математики компьютерные алгоритмы для линейных балансовых моделей эколого-экономического взаимодействия, а также проведена оценка эффективности их применения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григоркiв В.С. Моделювання економіки. Ч. 1: Навч. посіб. — Чернівці: Рута, 2006. — 124 с.
2. Григоркiв В.С., Верстяк А.В. Прогнозування системи збалансованих цін на основі моделі Леонтьєва-Форда // Наук. вісн. Львів. нац. ун-ту імені Івана Франка. Проблеми економічної кібернетики / За ред. проф. В.М. Вовка. — Львів: Інтереко, 2007. — **16** (спецвипуск). — С. 61–68.
3. Григоркiв В.С. Моделювання еколого-економічної взаємодії: Навч. посіб. — Чернівці: Рута, 2007. — 84 с.
4. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. — К.: Вища шк., 1999. — 236 с.
5. Григоркiв В.С. Моделювання економіки. Ч. 2: Навч. посіб. — Чернівці: Рута, 2006. — 100 с.
6. Недашковський М.О., Ковальчук О.Я. Обчислення з λ-матрицями. — Київ: Наук. думка, 2007. — 294 с.
7. Недашковський М.О. Швидка схема розв'язання для систем лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями // Доп. НАН України. Сер. А. — Київ, 1995. — № 4. — С. 23–29.
8. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977. — 303 с.
9. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. — М.: Наука, 1987. — 320 с.

Поступила 28.05.2009