УДК 519.67

С.И. ЯРЕМЧУК, Р.В. БУРДА, С.С. МАТУЩЕНКО

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Ключевые слова: *оптимизация размещения, транспортная задача, посадочное место, минимаксная задача.*

Задача отыскания оптимального назначения исследовалась во многих работах. Публикация [1] посвящена двухуровневой задаче о назначениях, которая решается с методом ветвей и границ. В [2] рассматривается некоторое обобщение минимаксной задачи о назначениях и для ее решения предлагается алгоритм псевдополиномиальной сложности. Исследование [3] посвящено задаче нахождения непересекающихся и несовпадающих циклов на сети с двумя весами дуг. Приводятся основные этапы полиномиального алгоритма для решения задачи в общем случае. Для улучшения производительности программ (в частности, решающих задачи о назначениях) в [4] показана эффективная реализация древовидных структур, что позволяет значительно увеличить скорость работы программ.

В настоящей статье рассматривается минимаксная задача о назначениях специального вида, которая возникает при размещении источников физического поля [5]. Авторам статьи не известны алгоритмы ее решения. Предлагается алгоритм нахождения приближенного решения задачи. Результаты вычислительного эксперимента для конкретной задачи представлены в Приложении.

Минимаксная задача о назначениях имеет следующий вид:

$$f(x) = \max_{k \in [1:K]} f_k(x) \to \min, \tag{1}$$

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij} , \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad j \in [1:N], \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad i \in [1:N], \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in [1:N], \quad j \in [1:N]. \tag{5}$$

Здесь N, K — заданные положительные целые числа, $c_{ij}^{k,i} \in [1, N]$, $j \in [1, N]$, $k \in [1, K]$ — вещественные.

Пусть x^r, $r = 0, 1, 2$, — некоторое допустимое решение задачи (1)–(5). Найдем допустимое решение x^{r+1} так, чтобы было справедливо неравенство

$$f(x^{r+1}) < f(x^r). \tag{6}$$

© С.И. Яремчук, Р.В. Бурда, С.С. Матущенко, 2009

Для этого на каждом шаге решения задачи (1)–(5) будем рассматривать K задач о назначении с разными функциями цели, но с одинаковым множеством допустимых решений:

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij} \to \min ,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \ i \in [1:N], \\ \sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \ i \in [1,N], \end{cases} \tag{7}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \ i \in [1:N], \ j \in [1:N], \ k \in [1:K].$$

Для того чтобы неравенство (6) выполнялось, x^{r+1} должно удовлетворять системе неравенств

$$f_k(x^{r+1}) < f(x^r) \quad \forall \ k \in [1:K]. \tag{8}$$

Из теории решения транспортных задач известно, что задача, полученная после линейной релаксации (7), имеет целочисленное базисное оптимальное решение, в котором n компонент равны единице, остальные — нулю. Так как задача (7) — частный случай транспортной задачи, то для определения x^{r+1} применяем метод потенциалов.

Введем обозначения

$$K_{\max}(x^r) = \{k \in [1:K] \mid f_k(x^r) = f(x^r)\}. \tag{9}$$

Для уменьшения $f(x^r)$ уменьшим значения $f_k(x^r)$, $k \in K_{\max}(x^r)$ так, чтобы выполнялись условия

$$f_k(x^{r+1}) < f(x^r) \ \forall \ k \notin K_{\max}(x^r). \tag{10}$$

Для всех задач (7) построим опорный план $\bar{x}_0^r$, соответствующий x^r, и найдем потенциалы

$$u_i^k(\bar{x}_0^r), \ i \in [1:N]; \ v_j^k(\bar{x}_0^r), \ j \in [1:N]. \tag{11}$$

Тогда оценки можно рассчитать по формуле

$$\Delta_{ij}^k(\bar{x}_0^r) = u_i^k(\bar{x}_0^r) + v_j^k(\bar{x}_0^r) - c_{ij}^{k,i}, \ i \in [1:N], j \in [1:N]. \tag{12}$$

Если хотя бы для одного $k \in K_{\max}(x^r)$ для небазисных ячеек нет ни одной положительной оценки $\Delta_{ij}^k(\bar{x}_0^r) > 0$, то опорный план задачи k улучшить невозможно. Это утверждение вытекает из условий оптимальности опорного плана транспортной задачи [6]. Иными словами, функция f_k достигла своего минимума на множестве допустимых решений в точке x^r. А так как $k \in K_{\max}(x^r)$, то f тоже достигла минимума в этой точке.

Если $\forall k \in K_{\max}(x^r)$ существует хотя бы одна положительная оценка, необходимо провести дополнительные исследования.

Рассмотрим два возможных случая:

- в базис вводится ячейка, которая приводит к перевозке нуля по циклу;
- в базис вводится ячейка, которая приводит к перевозке единицы по циклу.

При нулевой перевозке получим ту же точку x^r, которой соответствует некоторый базис, отличающийся от $\bar{x}_0^r$ положением одной базисной ячейки, которая содержит фиктивную перевозку. Для удобства обозначим через $\bar{x}_s^r$ s-й базис, соответствующий x^r-й точке $(s = 0,1,\ldots)$.

При единичной перевозке получим точку $x^{r+1} \neq x^r$. В зависимости от того, какая именно ячейка будет вводиться в базис, функция цели $f(x^{r+1})$ может увеличиться, уменьшиться или остаться прежней. Из теории решения транспортных задач легко следует справедливость следующей теоремы.

Теорема. При введении в базис ячейки (i^*, j^*), которая инициирует единичную перевозку, справедливо

$$\tilde{f}(x^r) - \tilde{f}(x^{r+1}) = \Delta_{i^* j^*}(\bar{x}_s^r). \tag{13}$$

Доказательство. Значение функции цели в точке x^r, которой соответствует базис $\bar{x}^r$, вычисляется по формуле

$$\tilde{f}(x^r) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij}^r . \tag{14}$$

Для получения точки x^{r+1} строится цикл, проходящий через ячейки, принадлежащие базису $\bar{x}^r$, и ячейку, которая вводится в базис, — (i^*, j^*). Пусть цикл содержит $L+1$ ячейку. Тогда (14) можно записать так:

$$\tilde{f}(x^r) = \sum_{l=1}^{L} c_{i_l j_l} x_{i_l j_l}^r + O(x^r, i^*, j^*). \tag{15}$$

Здесь (i_l, j_l) задает индексы l-й ячейки в цикле, а $O(x^r, i^*, j^*)$ — остаточное значение функции цели по ячейкам, которые не вошли в цикл. Поскольку $c_{i_l j_l} = u_{i_l}(\bar{x}) + v_{j_l}(\bar{x})$ для базисных ячеек, где $u_{i_l}(\bar{x})$ и $v_{j_l}(\bar{x})$ — значения потенциалов ячейки (i_l, j_l), то

$$\tilde{f}(x^r) = \sum_{l=1}^{L} (u_{i_l}(\bar{x}^r) + v_{j_l}(\bar{x}^r)) x_{i_l j_l}^r + O(x^r, i^*, j^*). \tag{16}$$

Рассмотрим значение функции цели после единичной перевозки. Все базисные ячейки, которые входили в цикл и были единичными, станут нулевыми, и наоборот, нулевые, станут единичными. Одна из единичных ячеек покинет базис, т.е. значение соответствующей переменной станет равным нулю, поэтому значение функции в следующей точке рассчитывается таким образом:

$$\tilde{f}(x^{r+1}) = c_{i^* j^*} + \sum_{l=1}^{L} (u_{i_l}(\bar{x}^r) + v_{j_l}(\bar{x}^r))(1 - x_{i_l j_l}^r) + O(x^r, i^*, j^*), \tag{17}$$

где (i^*, j^*) — координаты ячейки, которая вводится в базис.

Найдем разницу функций до и после единичной перевозки. Воспользовавшись (16) и (17), получим

$$\begin{gathered} \tilde{f}(x^r) - \tilde{f}(x^{r+1}) = \\ = -c_{i^* j^*} + \sum_{l=1}^{L} (u_{i_l}(\bar{x}^r) + v_{j_l}(\bar{x}^r)) x_{i_l j_l}^r - \sum_{l=1}^{L} (u_{i_l}(\bar{x}^r) + v_{j_l}(\bar{x}^r))(1 - x_{i_l j_l}^r) = \\ = -c_{i^* j^*} + \sum_{l=1}^{L} (u_{i_l}(\bar{x}^r) + v_{j_l}(\bar{x}^r))(2x_{i_l j_l}^r - 1). \end{gathered} \tag{18}$$

Для базиса $\bar{x}^r$ построим два подмножества:

1) $L^0(\bar{x}^r)=\{l\,|\,\bar{x}^r_{i_l j_l}=0,\ l\in[1:L]\}$:

2) $L^1(\bar{x}^r)=\{l\,|\,\bar{x}^r_{i_l j_l}=1,\ l\in[1:L]\}$.

Тогда (18) можно записать в следующем виде:

$$\tilde{f}(x^r)-\tilde{f}(x^{r+1})=-c_{i^* j^*}+\sum_{l\in L^1}(u_{i_l}(\bar{x}^r)+v_{j_l}(\bar{x}^r))-\sum_{l\in L^0}(u_{i_l}(\bar{x}^r)+v_{j_l}(\bar{x}^r)). \qquad (19)$$

После раскрытия скобок и перегруппировки получим

$$\tilde{f}(x^r)-\tilde{f}(x^{r+1})=$$

$$=\left(\sum_{l\in L^1}(u_{i_l}(\bar{x}^r)-\sum_{l\in L^0}u_{i_l}(\bar{x}^r)\right)+\left(\sum_{l\in L^1}v_{j_l}(\bar{x}^r)-\sum_{l\in L^0}v_{j_l}(\bar{x}^r)\right)-c_{i^* j^*}. \qquad (20)$$

В построенном цикле количество базисных ячеек, которые содержат единичные перевозки, на единицу больше, чем количество базисных ячеек, содержащие фиктивные перевозки. В каждой строке таблицы, в которой построен цикл, содержится две ячейки, принадлежащие циклу: одна с единичной перевозкой, другая с фиктивной. Исключением является строка i^*, в ней имеется ячейка цикла с единичной перевозкой и ячейка (i^*, j^*), поэтому первое слагаемое правой части (20) преобразуется к виду

$$\sum_{l\in L^1}u_{i_l}(\bar{x}^r)-\sum_{l\in L^0}u_{i_l}(\bar{x}^r)=u_{i^*}(\bar{x}^r). \qquad (21)$$

Аналогичным свойством обладают столбцы, поэтому

$$\sum_{l\in L^1}v_{j_l}(\bar{x}^r)-\sum_{l\in L^0}v_{j_l}(\bar{x}^r)=v_{j^*}(\bar{x}^r). \qquad (22)$$

Тогда (20) приобретет вид

$$\tilde{f}(x^r)-\tilde{f}(x^{r+1})=u_{i^*}(\bar{x}^r)+v_{j^*}(\bar{x}^r)-c_{i^* j^*}=\Delta_{i^* j^*}(\bar{x}^r), \qquad (23)$$

что и необходимо было доказать.

Пусть в базис вводится ячейка (i^*, j^*), и при этом возникает единичная перевозка. Тогда имеет место один из случаев:

1) $\exists k^*\in K_{\max}$ такое, что $\Delta^{k^*}_{i^* j^*}(\bar{x}^r_s)<0$; (24)

2) $\exists k^*\in K_{\max}$ такое, что $\Delta^{k^*}_{i^* j^*}(\bar{x}^r_s)=0$, и $\nexists\, k^*\in K_{\max}$ такого, что $\Delta^{k^*}_{i^* j^*}(\bar{x}^r_s)<0$; (25)

3) $\forall k^*\in K_{\max}$ справедливо $\Delta^{k^*}_{i^* j^*}(\bar{x}^r_s)>0$. (26)

Использовав уравнение (13), можно сделать следующие выводы.

В первом случае функция f_{k^*} увеличится, что приведет к увеличению функции максимума (1). Во втором случае она не изменится ($f_{k^*}(x^{r+1})=f_{k^*}(x^r)$), поэтому

$$f(x^{r+1})=\max\left\{\max_{\substack{k\in[1:K]\\ k\neq k^*}}f_k(x^{r+1}),\ f_{k^*}(x^r)\right\}.$$

Поскольку $k^* \in K_{\max}$, то $f_{k^*}(x^r) = f(x^r)$, отсюда

$$f(x^{r+1}) = \max \left\{ \max_{\substack{k \in [1:K] \\ k \neq k^*}} f_k(x^{r+1}), f(x^r) \right\} \geq f(x^r),$$

т.е. значение функции максимума не уменьшится $f(x^{r+1}) \geq f(x^r)$.

В третьем случае f_{k^*} уменьшится ($f_k(x^{r+1}) < f_k(x^r)\ \forall k \in K_{\max}$). Для того чтобы значение функции максимума также уменьшилось, должно выполняться условие

$$f_k(x^r) - \Delta^k_{i^* j^*}(\bar{x}^r_s) < f(x^r)\ \ \forall k \notin K_{\max}. \tag{27}$$

Таким образом, для выполнения (6) в базис можно вводить те из ячеек, которые удовлетворяют условиям (26), (27).

Пусть при введении в базис ячейки (i^*, j^*) возникает фиктивная перевозка. Тогда функция цели (1) не изменится, так как останется та же точка x^r, которой соответствует другой опорный план $\bar{x}^r_{s+1}$. Введение в базис таких ячеек не противоречит условию (6). Для того чтобы избежать зацикливания метода, будем вводить в базис лишь те ячейки, которые удовлетворяют условиям (26), (27).

Алгоритм решения задачи

1. Выбирается начальный базис (опорный план) $\bar{x}^0_0$, которому соответствует точка x^0. Его можно получить, например, с помощью метода северо-западного угла: $s = 0$, $r = 0$.

2. Пусть имеется базис $\bar{x}^r_s$, которому соответствует точка x^r. Определяется следующий опорный план:

- строится множество $K_{\max}(x^r) = \{k \in [1:K] \mid f_k(x^r)\} = f(x^r)$, для $\bar{x}^r_s$ находятся потенциалы (11) и оценки (12) для всех $k \in [1:K]$;
- выбирается множество ячеек $I(\bar{x}^r_s)$, каждый элемент которого удовлетворяет условию (26), если данное множество пустое, то выполняется переход в п. 4.
- среди элементов множества $I(\bar{x}^r_s)$ выбирается такой, который удовлетворяет условию (27); если таких элементов не существует, то переходим в п. 4, если таких элементов несколько, то в первую очередь выбирается тот, который приводит к единичной перевозке, обозначим его (i^*, j^*);
- находится следующий опорный план, для этого ячейка (i^*, j^*) из предыдущего пункта вводится в базис.

3. Если имела место единичная перевозка, получаем новую точку x^{r+1}, которой соответствует базис $\bar{x}^{r+1}_0$. При этом r увеличиваем на единицу, а s присваиваем нулевое значение. В случае фиктивной перевозки получим ту же точку x^r, но другой базис $\bar{x}^r_{s+1}$. При этом r не меняется, а s увеличивается на единицу. Происходит переход в п. 2.

4. В качестве решения принимается $x^* = x^r$.

Конец работы алгоритма.

Эффективность алгоритма. Разработанный алгоритм является приближенным. Определим границы, в которых лежит точное решение задачи (1)–(5). Пусть x^* — решение, полученное в результате применения разработанного алгоритма, а x^{**} — точное решение. Очевидно следующее неравенство:

$$f(x^{**}) \leq f(x^*). \tag{28}$$

Таким образом, $f(x^*)$ — верхняя граница решения $f(x^{**})$. Нижнюю границу можно получить, решив ослабленную задачу (1)–(5), т.е. задачу (29):

$$
\begin{gathered}
f(x) = \max_{k \in [1:K]} f_k(x) \to \min , \\
f_k(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij} , \\
\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \;\; j \in [1:N], \\ \sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \; i \in [1:N], \end{cases} \\
x_{ij} \ge 0 , \;\; i \in [1:N] , \;\; j \in [1:N] .
\end{gathered} \tag{29}
$$

Она сводится к следующей задаче линейного программирования [6]:

$$
\begin{gathered}
f(x, z) = z \to \min , \\
\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij} - z \le 0, \; k \in [1:K], \\ \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \;\; j \in [1:N], \\ \sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \;\; i \in [1:N], \end{cases} \\
x_{ij} \ge 0 , \;\; i \in [1:N] , \;\; j \in [1:N] .
\end{gathered} \tag{30}
$$

Ее можно решить методами линейной оптимизации (например, симплекс-методом). В результате решения получаем точку (x', z') и значение функции цели $f(x', z') = z'$. Решение задачи (29) $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ определяется по решению задачи (30) следующим образом: $\tilde{x} = x'$, $f(\tilde{x}) = z'$. Очевидно,

$$
f(\tilde{x}) \le f(x^{**}) . \tag{31}
$$

Итак, $f(\tilde{x})$ — нижняя оценка точного решения $f(x^{**})$. Объединив неравенства (28) и (31), получим $f(x^{**}) \in [f(\tilde{x}), f(x^*)]$.

Приложение. Рассмотрим следующую задачу размещения источников физического поля [5]. Пусть имеется область Ω и источники физического поля $D_i, i \in [1:N]$. Каждый источник описывается геометрическими (форма, размеры) и физическими (интенсивность) характеристиками. Необходимо найти такое допустимое размещение источников физического поля в области Ω, при котором заданная функция цели достигает своего экстремального значения. Допустимо размещение, при котором все источники попарно не пересекаются и не выходят за границы области.

Введем вектор $Z(Z^1, Z^2, \ldots, Z^N)$, который определяет размещение источников в области Ω, где $Z^i(p_1^i, \ldots, p_n^i)$, $i \in [1:N]$, определяет положение i-го источника в области Ω. Оно полностью определяется координатами его полюса $p^i, i \in [1:N]$. Полюсом источника называется некоторая фиксированная точка, принадлежащая данному источнику [7]. Физическое поле, которое создается источниками и окружающей средой, описывается краевой задачей

$$Lu = \widetilde{f}(y,Z), \tag{32}$$

$$B_j u = \varphi_j, \ j \in [1:J], \tag{33}$$

где L — заданный дифференциальный оператор, u — функция, характеризующая пространственное распределение поля; B_j — заданные операторы, которые определяют граничные условия, φ_j — заданные функции; y — текущая точка области Ω, $\widetilde{f}$ — функция, характеризующая распределение источников поля в области Ω, вида

$$\widetilde{f}(y,Z) = \begin{cases} A^i(y - Z^i), \text{ если } y \in D_i, \\ 0, \qquad\qquad \text{ если } y \notin D_i. \end{cases} \tag{34}$$

Здесь A^i — интенсивность i-го источника. Очевидно, решением данной задачи является функция, которая зависит от Z: $u = u(y,Z)$.

Далее будем рассматривать задачу размещения источников физического поля с дополнительными ограничениями:

• краевая задача линейна, т.е. операторы L и $B_j, j \in [1:J]$ линейны;

• источники размещаются на фиксированные места, т.е. полюс каждого источника должен совпадать с одним из посадочных мест $m^j \in \Omega, j \in [1:N]$:

$$p^i \in M = \bigcup_{j=1}^{N} m^j, \ i \in [1:N]; \tag{35}$$

• на каждое посадочное место необходимо поставить только один источник:

$$\left| \left\{ m^j \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{N} p^i \right) \right\} \right| = 1, \ j \in [1:N]; \tag{36}$$

• каждый источник необходимо поставить только на одно посадочное место:

$$|\{p^i \bigcap M\}| = 1, \ i \in [1:N]. \tag{37}$$

Пусть посадочные места расположены таким образом, что условия взаимного непересечения и невыхода за границы области выполняются при любом размещении источников на посадочные места.

Необходимо найти такое размещение Z с учетом ограничений (35)–(37), при котором максимальное значение физического поля в заданных точках области $y^k \in \Omega, k \in [1:K]$, будет наименьшим, т.е. нужно решить следующую задачу:

$$f(Z) = \max_{k \in [1:K]} u(y^k, Z) \to \min. \tag{38}$$

Сделаем математическую постановку сформулированной задачи в удобном для ее решения виде.

Пусть $x_{ij}, i \in [1:N], \ j \in [1:N]$, — управляемые переменные, которые задаются таким образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{i-й источник не назначается на j-е место}, \\ 1, & \text{i-й источник назначается на j-е место}. \end{cases} \tag{39}$$

Тогда (35) справедливо всегда, а (36) и (37) приобретают вид (40) и (41) соответственно:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \ j \in [1:N], \tag{40}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \ i \in [1:N]. \tag{41}$$

Построим функцию цели. Поскольку операторы L и B_j, $j \in [1:J]$ краевой задачи (32)–(34) линейные, то справедливо свойство аддитивности [8]. Использовав его, получим

$$u(y^k, Z) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij}, \tag{42}$$

где c_{ij}^k — вклад источника D_i в значение поля в точке y^k $(u(y^k, Z))$ при назначении его на j-е посадочное место, т.е. $c_{ij}^k = u_i(y^k, m^j)$, $i \in [1:N]$, $j \in [1:N]$, $k \in [1:K]$. Здесь $u_i(y, Z^i), i \in [1:N]$ — решение следующей краевой задачи:

$$Lu_i = \widetilde{f}_i(y, Z^i), \tag{43}$$

$$B_j u_i = \frac{\varphi_i}{N}, \; j \in [1:J], \tag{44}$$

$$\widetilde{f}_i(y, Z^i) = \begin{cases} A^i(y - Z^i), \text{ если } y \in D_i, \\ 0, \qquad\qquad \text{если } y \notin D_i. \end{cases} \tag{45}$$

Все вклады рассчитываются до решения оптимизационной задачи. Для этого решается N^2 краевых задач (43)–(45) и находятся величины $c_{ij}^k, i \in [1:N]$, $j \in [1:N]$, $k \in [1:K]$. Обозначим

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij}, \tag{46}$$

тогда (38) приобретет вид

$$f(x) = \max_{k \in [1:K]} f_k(x) \to \min. \tag{47}$$

Таким образом, решение минимаксной задачи размещения источников физического поля на заданные посадочные места сводится к решению задачи (39)–(41), (46)–(47), которая представляет собой задачу (1)–(5).

Пример работы алгоритма. Рассмотрим задачу оптимизации назначения источников физического поля на фиксированные места [5]. Имеется монтажная плата, на которой необходимо разместить десять элементов радиоэлектронной аппаратуры на заданные посадочные места так, чтобы минимизировать максимальную из температур в контрольных точках платы.

Каждый из размещаемых элементов является тепловым источником с заданными размерами и интенсивностью. Температурное поле в области размещения (на плате) описывается следующей краевой задачей:

$$\Delta u - 5u = -f;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Область является квадратом со стороной, равной единице, нижний левый угол которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны координатным осям.

Приведем координаты контрольных точек:

$$T^1(0{,}4; 0{,}4), \; T^2(0{,}6; 0{,}4), \; T^3(0{,}6; 0{,}6), \; T^4(0{,}4; 0{,}6).$$

Запишем размеры и интенсивности элементов радиоэлектронной аппаратуры:

$$D_1:\ 0{,}1\times 0{,}1,\ 1130;\qquad D_2:\ 0{,}05\times 0{,}1,\ 1460;$$

$$D_3:\ 0{,}1\times 0{,}05,\ 1730;\qquad D_4:\ 0{,}08\times 0{,}08,\ 1280;$$

$$D_5:\ 0{,}08\times 0{,}04,\ 1790;\qquad D_6:\ 0{,}04\times 0{,}08,\ 1970;$$

$$D_7:\ 0{,}1\times 0{,}15,\ 2115;\qquad D_8:\ 0{,}15\times 0{,}15,\ 1430;$$

$$D_9:\ 0{,}1\times 0{,}19,\ 1610;\qquad D_{10}:\ 0{,}19\times 0{,}1,\ 1940.$$

Приведем координаты посадочных мест:

$$m^1\ (0{,}2;\ 0{,}2),\ m^2(0{,}5;\ 0{,}2),\ m^3(0{,}8;\ 0{,}2),\ m^4(0{,}8;\ 0{,}4),\ m^5(0{,}8;\ 0{,}6),$$

$$m^6(0{,}8;\ 0{,}8),\ m^7(0{,}5;\ 0{,}8),\ m^8(0{,}2;\ 0{,}8),\ m^9(0{,}2;\ 0{,}6),\ m^{10}(0{,}2;\ 0{,}4).$$

Посадочные места расположены таким образом, что условия взаимного непересечения и невыхода за границы области выполняются при любом размещении источников.

В табл. 1 приведены вклады c^1_{ij} источников физического поля D_i, $i\in[1{:}10]$, в точках T^1 и вклады c^2_{ij} в точках T^2 при их размещении на посадочные места m^j, $j\in[1{:}10]$. Аналогично в табл. 2 изображены вклады источников в значения полей в точках T^3 и T^4.

Таблица 1

i	Значения $\frac{c^1_{ij}}{c^2_{ij}}$									
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$
1	2,86 / 1,98	2,96 / 2,96	1,98 / 2,86	1,98 / 3,19	1,79 / 2,42	1,56 / 1,98	1,9 / 1,9	1,98 / 1,56	2,57 / 1,79	3,19 / 1,98
2	2,22 / 1,53	2,3 / 2,3	1,01 / 1,47	1,53 / 2,47	1,38 / 1,99	1,21 / 1,53	1,48 / 1,48	1,02 / 0,81	1,34 / 0,93	1,67 / 1,03
3	1,77 / 1,21	2,71 / 2,71	1,82 / 2,63	1,21 / 1,95	1,64 / 2,36	0,95 / 1,2	1,75 / 1,75	1,2 / 0,95	2,36 / 1,64	1,96 / 1,21
4	2,11 / 1,45	2,15 / 2,15	1,42 / 2,08	1,41 / 2,27	1,27 / 1,82	1,11 / 1,42	1,37 / 1,37	1,42 / 1,13	1,85 / 1,3	2,37 / 1,46
5	1,48 / 1,01	1,5 / 1,5	1 / 1,45	0,99 / 1,59	0,89 / 1,27	0,78 / 0,99	0,95 / 0,95	0,99 / 0,79	1,29 / 0,9	1,65 / 1,01
6	2,01 / 1,39	1,66 / 1,7	0,55 / 0,8	0,69 / 1,1	0,62 / 0,9	0,54 / 0,69	0,66 / 0,66	0,69 / 0,54	0,9 / 0,62	1,1 / 0,69
7	7,52 / 5,19	7,79 / 7,79	5,19 / 7,51	5,18 / 8,33	4,69 / 6,75	4,09 / 5,2	5,01 / 5,01	5,2 / 4,09	6,75 / 4,69	8,33 / 5,18
8	7,12 / 4,92	7,36 / 7,36	4,92 / 7,12	4,92 / 7,94	4,44 / 6,5	3,88 / 4,92	4,73 / 4,73	4,92 / 3,88	6,4 / 4,44	7,94 / 4,92
9	7,5 / 5,17	7,8 / 7,8	5,17 / 7,5	5,16 / 8,25	4,67 / 6,73	4,09 / 5,2	5,01 / 5,01	5,2 / 4,09	6,73 / 4,67	8,25 / 5,16
10	8,88 / 6,15	9,1 / 9,1	6,15 / 8,88	6,17 / 10,03	5,55 / 8	4,83 / 6,12	5,87 / 5,87	6,12 / 4,83	7,97 / 5,55	10,03 / 6,17

Таблица 2

i	Значения $\frac{c_{ij}^3}{c_{ij}^4}$									
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$
1	$\frac{1{,}56}{1{,}98}$	$\frac{1{,}90}{1{,}91}$	$\frac{1{,}98}{1{,}56}$	$\frac{2{,}57}{1{,}79}$	$\frac{3{,}19}{1{,}98}$	$\frac{2{,}87}{1{,}98}$	$\frac{2{,}96}{2{,}96}$	$\frac{1{,}98}{2{,}86}$	$\frac{1{,}98}{3{,}19}$	$\frac{1{,}79}{2{,}57}$
2	$\frac{1{,}21}{1{,}53}$	$\frac{1{,}48}{1{,}48}$	$\frac{1{,}02}{0{,}8}$	$\frac{1{,}99}{1{,}38}$	$\frac{2{,}47}{1{,}53}$	$\frac{2{,}21}{1{,}53}$	$\frac{2{,}3}{2{,}3}$	$\frac{1{,}03}{1{,}49}$	$\frac{1{,}03}{1{,}67}$	$\frac{0{,}93}{1{,}34}$
3	$\frac{0{,}96}{1{,}22}$	$\frac{1{,}75}{1{,}75}$	$\frac{1{,}82}{1{,}43}$	$\frac{1{,}6}{1{,}1}$	$\frac{2{,}94}{1{,}82}$	$\frac{1{,}74}{1{,}21}$	$\frac{2{,}71}{2{,}71}$	$\frac{1{,}21}{1{,}74}$	$\frac{1{,}82}{2{,}94}$	$\frac{1{,}1}{1{,}6}$
4	$\frac{1{,}14}{1{,}45}$	$\frac{1{,}4}{1{,}4}$	$\frac{1{,}45}{1{,}13}$	$\frac{1{,}87}{1{,}29}$	$\frac{2{,}27}{1{,}42}$	$\frac{2{,}04}{1{,}42}$	$\frac{2{,}09}{2{,}09}$	$\frac{1{,}45}{2{,}08}$	$\frac{1{,}46}{2{,}37}$	$\frac{1{,}3}{1{,}85}$
5	$\frac{0{,}8}{1{,}01}$	$\frac{0{,}98}{0{,}98}$	$\frac{1{,}01}{0{,}8}$	$\frac{1{,}31}{0{,}9}$	$\frac{1{,}59}{0{,}99}$	$\frac{1{,}43}{1{,}19}$	$\frac{1{,}49}{1{,}49}$	$\frac{1{,}01}{1{,}45}$	$\frac{1{,}02}{1{,}49}$	$\frac{0{,}92}{1{,}33}$
6	$\frac{1{,}09}{1{,}38}$	$\frac{1{,}08}{1{,}07}$	$\frac{0{,}56}{0{,}44}$	$\frac{0{,}9}{0{,}62}$	$\frac{1{,}1}{0{,}69}$	$\frac{1}{0{,}69}$	$\frac{1{,}03}{1{,}03}$	$\frac{0{,}69}{1}$	$\frac{0{,}69}{1{,}1}$	$\frac{0{,}62}{0{,}9}$
7	$\frac{4{,}09}{5{,}2}$	$\frac{5{,}01}{5{,}01}$	$\frac{5{,}2}{4{,}09}$	$\frac{6{,}75}{4{,}69}$	$\frac{8{,}33}{5{,}18}$	$\frac{7{,}52}{5{,}19}$	$\frac{7{,}79}{7{,}79}$	$\frac{5{,}19}{7{,}52}$	$\frac{5{,}18}{8{,}33}$	$\frac{4{,}69}{6{,}75}$
8	$\frac{3{,}88}{4{,}92}$	$\frac{4{,}73}{4{,}73}$	$\frac{4{,}92}{3{,}88}$	$\frac{6{,}4}{4{,}44}$	$\frac{7{,}94}{4{,}92}$	$\frac{7{,}12}{4{,}92}$	$\frac{7{,}36}{7{,}36}$	$\frac{4{,}92}{7{,}12}$	$\frac{4{,}92}{7{,}94}$	$\frac{4{,}44}{6{,}4}$
9	$\frac{4{,}09}{5{,}2}$	$\frac{5{,}01}{5{,}01}$	$\frac{5{,}2}{4{,}09}$	$\frac{6{,}73}{4{,}67}$	$\frac{8{,}25}{5{,}16}$	$\frac{7{,}5}{5{,}17}$	$\frac{7{,}8}{7{,}8}$	$\frac{5{,}17}{7{,}5}$	$\frac{5{,}16}{8{,}25}$	$\frac{4{,}67}{6{,}73}$
10	$\frac{4{,}83}{6{,}12}$	$\frac{5{,}87}{5{,}87}$	$\frac{6{,}12}{4{,}83}$	$\frac{8}{5{,}55}$	$\frac{10{,}03}{6{,}17}$	$\frac{8{,}88}{6{,}15}$	$\frac{9{,}1}{9{,}1}$	$\frac{6{,}15}{8{,}88}$	$\frac{6{,}17}{10{,}03}$	$\frac{5{,}55}{8}$

Пусть на нулевом шаге имеем опорный план x^0, приведенный в табл. 3.

Значение источников физического поля в точках T^k, $k \in [1:4]$: $f_1(x^0) = 36{,}51$; $f_2(x^0) = 30{,}86$; $f_3(x^0) = 32{,}74$; $f_4(x^0) = 39{,}02$. Множество $K_{\max} = \{4\}$, поскольку $f(x^0) = f_4(x^0)$. После расчетов потенциалов (11) и оценок (12) находим такую ячейку, которая удовлетворяет условиям (26) и (27), — это ячейка $(4{,}7)$. Вводим ее в базис. После построения цикла и проведения необходимых преобразований получим опорный план x^1, приведенный в табл. 4.

Значение функций $f_k(x^1)$, $k \in [1:4]$: $f_1(x^1) = 35{,}73$; $f_2(x^1) = 30{,}69$; $f_3(x^1) = 32{,}51$; $f_4(x^1) = 37{,}13$. Так как $f(x^1) = f_4(x^1)$, то множество $K_{\max} = \{4\}$.

Повторяя предыдущие действия, на шаге 18 получим опорный план x^{18} (табл. 5). Значение функций: $f_k(x^{18})$, $k \in [1:4]$: $f_1(x^1) = 32{,}36$; $f_2(x^1) = 35{,}53$; $f_3(x^1) = 33{,}07$; $f_4(x^1) = 29{,}97$. Так как $f(x^{18}) = f_3(x^{18})$, то множество $K_{\max} = \{3\}$.

Еще через два шага получим опорный план x^{20} (табл. 6). Значение функций $f_k(x^{20})$, $k \in [1:4]$: $f_1(x^{20}) = 32{,}07$; $f_2(x^{20}) = 32{,}24$; $f_3(x^{20}) = 31{,}96$; $f_4(x^{20}) = 32{,}31$; множество $K_{\max} = \{4\}$. После расчета потенциалов и оценок видим, что нет ни одной оценки, удовлетворяющей условиям (26) и (27), следовательно, соответствующий опорный план является решением задачи.

Таблица 3

i	Значения x_{ij}^0, j = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	0	1								
3		0	1							
4			0	1						
5				0	1					
6					0	1				
7						0	1			
8							0	1		
9								0	1	
10									0	1

Таблица 4

i	Значения x_{ij}^1, j = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	0	1								
3		0	1							
4			0	1						
5				0	1					
6					0	1				
7						0	1			
8							0	1		
9								0	1	
10									0	1

Таблица 5

i	Значения x_{ij}^{18}, j = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1		0						
2			0						1	
3	1									
4							1			
5		0			1					
6					0		0	1		
7						1				
8								0		1
9				1		0			0	
10			1							

Таблица 6

i	Значения x_{ij}^{20}, j = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0		1						
2			0						1	
3	1									
4							1			
5		1			0					
6					1		0			
7						0		0		1
8								1		
9				0		1			0	
10	0		1							

В результате данного исследования разработан приближенный алгоритм решения дискретной минимаксной задачи размещения источников физического поля на фиксированные места. Найдены оценки эффективности его работы. Построена математическая модель рассматриваемой задачи в виде, удобном для применения разработанного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ларин Р.М., Пяткин А В. Двухуровневая задача о назначениях // Дискретный анализ и исследование операций. — 2001. — Сер. 2. — **8**, № 2. — С. 42–51.
2. Глебов Н.И. Об одном обобщении минимаксной задачи о назначениях // Там же. — 2004. — Сер. 1. — **11**, № 4. — С. 36–43.
3. Шарифов Ф.А. Задача нахождения непересекающихся и несовпадающих циклов на сети // Теорія оптимальних рішень. — 2003. — № 2. — С. 155–161.
4. Шарифов Ф.А. Об эффективности алгоритмов решения сетевых задач на древовидных структурах // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 3. — С. 179–184.
5. Стоян Ю.Г., Путятин В.П. Оптимизация технических систем с источниками физических полей. — Киев: Наук. думка, 1988. — 192 с.
6. Таха Х. Введение в исследование операций. Т. 1. — М.: Мир, 1985. — 479 с.
7. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. — Киев: Наук. думка, 1978. — 248 с.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.

Поступила 21.10.2008