УДК 519.6

Н.В. МАЙКО, В.Л. РЯБИЧЕВ

ТЕОРЕМЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ ЭКСПОНЕНТЫ И КОСИНУСА

Ключевые слова: *абстрактная задача Коши, метод преобразования Кэли, скорость сходимости, неулучшаемая оценка, обратная теорема приближения*.

Известно, что многие начально-краевые задачи для уравнений математической физики допускают абстрактные операторно-дифференциальные постановки, например, в форме задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядков в банаховом пространстве с неограниченным операторным коэффициентом. Для их приближенного решения в [1–4] предложен и разработан эффективный алгоритм без насыщения точности (метод преобразования Кэли), доказаны прямые теоремы о скорости его сходимости в различных нормах и исследован вопрос о неулучшаемости полученных оценок приближения.

В [5] найдена неулучшаемая постоянная в интегральном неравенстве для погрешности приближения операторной экспоненты и доказана обратная теорема приближения, характеризующая начальный вектор в терминах скорости сходимости метода.

В данной работе получена новая оценка для интегральной погрешности и доказана ее неулучшаемость по порядку, а также установлена гладкость начального вектора в терминах порядка точности метода преобразования Кэли для приближения операторных экспоненты и косинуса.

1. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + Ax(t) = 0, \ t \in (0, T], \qquad x(0) = x_0, \ x'(0) = 0, \tag{1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H оператором $A = A^* \ge \lambda_0 I$, $\lambda_0 > 0$, который имеет область определения $D(A)$. Известно [1], что при $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 5/4$, решение $x(t) = \cos(\sqrt{A}t)x_0$ задачи (1) представляется рядом

$$x(t) = e^{-\delta t} \sum_{n=0}^{\infty} (L_n^{(0)}(t) - L_{n-1}^{(0)}(t))\, u_n, \tag{2}$$

где $1/2 > \delta$ — произвольная постоянная, $L_n^{(0)}(t)$ — полиномы Лагерра, а члены последовательности $\{u_n, n = 0, 1, \dots\}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{gathered}(A + (\delta - 1)^2 I) u_{n+1} = 2(A + \delta(\delta - 1)I) u_n - (A + \delta^2 I) u_{n-1},\ n = 1, 2, \dots, \\ u_0 = x_0,\ u_1 = (A + \delta(\delta - 1)I)(A + (\delta - 1)^2 I)^{-1} x_0,\end{gathered} \tag{3}$$

причем $u_n = \mathcal{A}^n T_n(\mathcal{B}) x_0$, где

$$\mathcal{A} = (A + \delta^2 I)^{1/2} (A + (\delta - 1)^2 I)^{-1/2},$$

$$\mathcal{B} = (A + \delta(\delta - 1)I)(A + \delta^2 I)^{-1/2} (A + (\delta - 1)^2 I)^{-1/2},$$

I — тождественный оператор, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n = 0, 1, \dots$, — полиномы Чебышова первого рода. Точность приближения решения $x(t)$ задачи (1) частичной суммой ряда (2)

$$x_N(t) = e^{-\delta t} \sum_{n=0}^{N} (L_n^{(0)}(t) - L_{n-1}^{(0)}(t)) u_n \tag{4}$$

характеризуется оценкой [1]

$$\sup_{t \in [0, T]} \| x_N(t) - x(t) \| \le c N^{-(\sigma - 1/4)} \| A^\sigma x_0 \|,$$

где постоянная c не зависит от N и x_0.

В [2] для скорости сходимости метода преобразования Кэли (3), (4) при $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 0$, $0 \le \delta < 1/2$ и всех натуральных $N \ge N'(\lambda_0, \delta, \sigma)$ получена интегральная оценка

$$z_N^2 \equiv \int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-(1-2\delta)t} \| x(t) - x_N(t) \|^2\, dt \le \frac{2^{4\sigma - 1} \sigma^{2\sigma - 1}}{(1 - 2\delta)^{2\sigma}} \| A^\sigma x_0 \|^2 N^{-2\sigma},$$

а также рассмотрен пример оператора A и вектора $x_0 \in D(A^{\sigma/2})$, для которых

$$z_N^2 \ge \frac{9 e^{\frac{2\delta - 1}{2(1 + \delta^2)^{1/2}}}}{5^{2(1+\sigma)} \cdot 2^{4+\varepsilon}} \frac{1}{N^{2\sigma}} \frac{1}{\ln^{1+\varepsilon}(5N)} \quad (\varepsilon > 0).$$

Дополним эти результаты обратным утверждением.

Теорема 1. Пусть для некоторого действующего в H самосопряженного положительно-определенного оператора $A = A^* \ge \lambda_0 I$, постоянной $\sigma > 0$, $x_0 \in H$ и неубывающей последовательности положительных чисел $\{c_N, N \in \mathbb{N}\}$ со сходящимся рядом $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_{2^k}}$ выполняется неравенство

$$z_N^2 \le \frac{1}{N^{2\sigma} c_N}. \tag{5}$$

Тогда $x_0 \in D(A^{\sigma/2})$.

Доказательство. Используя обозначения из [2] и условие (5), имеем

$$z_N^2 \cdot N^{2\sigma} = \sum_{j=N+1}^{+\infty} \frac{1}{j} \int_{\lambda_0}^{+\infty} N^{2\sigma} \chi_1^j(\lambda) T_j^2(\chi_2(\lambda)) d(E_\lambda x_0, x_0) \le \frac{1}{c_N}, \qquad (6)$$

где E_λ — спектральное разложение единицы оператора A,

$$\chi_1(\lambda) = \frac{\lambda + \delta^2}{\lambda + (\delta - 1)^2}, \ \chi_2(\lambda) = \frac{\lambda + \delta(\delta - 1)}{\sqrt{(\lambda + \delta^2)(\lambda + (\delta - 1)^2)}}.$$

Обозначим $\psi_N(\lambda) = N^{2\sigma} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_1^j(\lambda) T_j^2(\chi_2(\lambda))$ и рассмотрим неубывающую последовательность $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ функций

$$\varphi_n(\lambda) = \max\{\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \dots, \psi_n(\lambda)\}, \ \lambda \in [\lambda_0, +\infty).$$

Для каждого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ найдем $r \in \mathbb{N}_0$ такое, что $2^r \le k < 2^{r+1}$. Тогда

$$\frac{\psi_k(\lambda)}{\psi_{2^r}(\lambda)} = \frac{k^{2\sigma} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_1^j(\lambda) T_j^2(\chi_2(\lambda))}{(2^r)^{2\sigma} \sum_{j=2^r+1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_1^j(\lambda) T_j^2(\chi_2(\lambda))} < \left(\frac{k}{2^r}\right)^{2\sigma} < 2^{2\sigma},$$

а значит, $\varphi_n(\lambda) < 2^{2\sigma} \sum_{r=0}^{[\log_2 n]} \psi_{2^r}(\lambda)$. Учитывая неравенство (6), получаем

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \varphi_n(\lambda) d(E_\lambda x_0, x_0) < 2^{2\sigma} \sum_{r=0}^{[\log_2 n]} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \psi_{2^r}(\lambda) d(E_\lambda x_0, x_0) <$$

$$< 2^{2\sigma} \sum_{r=0}^{[\log_2 n]} \frac{1}{c_{2^r}} < M, \ M = \text{const},$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда по лемме Беппо Леви [6] и для функции $\varphi(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(\lambda)$ выполняется $\int_{\lambda_0}^{+\infty} \varphi(\lambda) d(E_\lambda x_0, x_0) \le M$.

Покажем теперь, что $\varphi(\lambda) \ge C\lambda^\sigma$ при $\lambda \ge \lambda'$, $\lambda' \ge \lambda_0$, где λ' — некоторое число, C — некоторая положительная постоянная. Поскольку из этого неравенства следует сходимость интеграла $\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^\sigma d(E_\lambda x_0, x_0) < \infty$, то это и будет означать, что $x_0 \in D(A^{\sigma/2})$. Прежде всего для каждого фиксированного $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ найдем N из условия

$$\cos\frac{\pi}{6N} \le \frac{\lambda + \delta(\delta - 1)}{\sqrt{(\lambda + \delta(\delta - 1))^2 + \lambda}}.$$

Воспользовавшись неравенствами

$$\cos\frac{\pi}{6N} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12N} < 1 - 2\left(\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{12N}\right)^2,$$

$$\frac{\lambda + \delta(\delta - 1)}{\sqrt{(\lambda + \delta(\delta - 1))^2 + \lambda}} = \left(1 + \frac{\lambda}{(\lambda + \delta(\delta - 1))^2}\right)^{-1/2} > 1 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \delta(\delta - 1))^2},$$

получим $N^2 < \dfrac{(\lambda + \delta(\delta - 1))^2}{9\lambda}$. Для таких N справедливо

$$T_j\left(\frac{\lambda+\delta(\delta-1)}{\sqrt{(\lambda+\delta(\delta-1))^2+\lambda}}\right) \ge T_j\left(\cos\frac{\pi}{6N}\right) \ge T_{2N}\left(\cos\frac{\pi}{6N}\right) = \frac{1}{2},\ j = 0, 1, \ldots, 2N.$$

Пусть $n_0 = \left[\dfrac{\lambda + \delta(\delta - 1)}{3\sqrt{\lambda}}\right]$, тогда

$$\psi_{n_0}(\lambda) \ge n_0^{2\sigma} \sum_{j=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{j}\left(\frac{\lambda+\delta^2}{\lambda+(\delta-1)^2}\right)^j T_j^2\left(\frac{\lambda+\delta(\delta-1)}{\sqrt{(\lambda+\delta^2)(\lambda+(\delta-1)^2)}}\right) \ge$$

$$\ge n_0^{2\sigma} n_0 \frac{1}{2n_0}\left(\frac{\lambda+\delta^2}{\lambda+(\delta-1)^2}\right)^{2n_0} \frac{1}{4} \ge$$

$$\ge \left(\frac{\lambda+\delta(\delta-1)}{3\sqrt{\lambda}} - 1\right)^{2\sigma} \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda+\delta^2}{\lambda+(\delta-1)^2}\right)^{2\frac{\lambda+\delta(\delta-1)}{3\sqrt{\lambda}}} \ge C\lambda^\sigma,$$

а значит, $\varphi(\lambda) \ge \varphi_{n_0}(\lambda) \ge \psi_{n_0}(\lambda) \ge C\lambda^\sigma$. ■

Заметим, что условию теоремы удовлетворяет, например, последовательность $c_N = \ln^{1+\varepsilon} N,\ \varepsilon > 0$.

2. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = 0,\ t > 0, \quad x(0) = x_0, \tag{7}$$

где A — самосопряженный положительно-определенный оператор, который действует в гильбертовом пространстве H и имеет область определения $D(A)$. Известно [1], что при $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 1$, решение $x(t) = e^{-tA} x_0$ задачи (7) можно представить в виде ряда

$$x(t) = e^{-\gamma t} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j L_p^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^j (I + T_\gamma) x_0, \tag{8}$$

где γ — произвольная положительная постоянная, $T_\gamma = (\gamma I + A)^{-1}(\gamma I - A)$ — преобразование Кэли оператора A. Если в качестве приближения для $x(t)$ взят отрезок ряда (8)

$$x_N(t) = e^{-\gamma t} \sum_{j=0}^{N} (-1)^j L_j^{(0)}(2\gamma t)(y_{\gamma,j} + y_{\gamma,j+1}), \tag{9}$$

где элементы $y_{\gamma,j} = T_\gamma^j y_{\gamma,0} \equiv T_\gamma^j x_0$, $j = 0, 1, \ldots$, являются решениями рекуррентной последовательности «эллиптических» задач

$$\begin{gathered}(\gamma I + A) y_{\gamma,j+1} = (\gamma I - A) y_{\gamma,j},\ j = 0, 1, \ldots,\\ y_{\gamma,0} = x_0,\end{gathered} \tag{10}$$

то для точности такого приближения имеет место неравенство

$$\| x_N(t) - x(t) \| \le cN^{-\sigma} \| A^\sigma x_0 \|,\ t \ge 0,$$

с постоянной c, не зависящей от N и x_0.

В [3] для интегральной погрешности $z_N^2 = \int\limits_0^{+\infty} \|x(t)-x_N(t)\|^2\, dt$ метода преобразования Кэли (9), (10) получена оценка $z_N \le c\|A^\sigma x_0\| N^{-\sigma-1/2}$, где $c=(1+\sigma)^{2(1+\sigma)}(2\sigma+1)^{-1}(2\gamma)^{-2\sigma-11}$, и доказана ее почти (с точностью до логарифма) неулучшаемость по порядку N.

Интегральная невязка $z_N^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\|x(t)-x_N(t)\|^2\, dt$ приближения $x_N(t) = \sum\limits_{j=0}^{N} A^j (A+I)^{-(j+1)} L_j^{(0)}(t)x_0$ для точного решения $x(t)=\sum\limits_{j=0}^{\infty} A^j (A+I)^{-(j+1)} \times L_j^{(0)}(t)x_0$ задачи Коши (7) изучена в работе [5]. Так, при $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma \ge 0$, установлено неравенство $z_N^2 \le c\|A^\sigma x_0\|^2 N^{-2\sigma-1}$ с неулучшаемой на $D(A^\sigma)$ постоянной $c=(2\sigma+1)^{2\sigma+1}2^{-2\sigma-2}e^{-2\sigma-1}$, исследована неулучшаемость по N этой оценки, а также доказана обратная теорема приближения.

В [4] в качестве приближенного решения

$$x_N(t)=e^{-\gamma t}\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\left(L_j^{(0)}(2\gamma t)-L_{j-1}^{(0)}(2\gamma t)\right)y_{\gamma,j},\ L_{-1}^{(0)}\equiv 0, \tag{11}$$

задачи Коши (7) взят отрезок ряда

$$x(t)=e^{-\gamma t}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(L_j^{(0)}(2\gamma t)-L_{j-1}^{(0)}(2\gamma t)\right)y_{\gamma,j},\ L_{-1}^{(0)}\equiv 0,$$

и для интегральной погрешности $z_{t,N}^2 \equiv \int\limits_0^{+\infty} t^{-1}\|x(t)-x_N(t)\|^2\, dt$ доказана почти (с точностью до логарифма) неулучшаемая оценка

$$z_{t,N}^2 \le cN^{-2\sigma}\|A^\sigma x_0\|^2, \tag{12}$$

где постоянная c не зависит от N и x_0.

Цель данной работы — уточнение постоянной c в этом неравенстве, установление неулучшаемости по N оценки типа (12) и доказательство обратной теоремы приближения.

Теорема 2. Пусть $A=A^* \ge \lambda_0 I$ — действующий в гильбертовом пространстве H самосопряженный положительно-определенный оператор с областью определения $D(A)$. Если $0<\gamma\le\lambda_0$ и $x_0\in D(A^\sigma)$, $\sigma>0$, то при всех натуральных $N \ge \max\left\{\frac{\lambda_0\sigma}{2\gamma},\sigma\right\}-1$ для точности метода преобразования Кэли (10), (11) выполняется неравенство

$$z_{t,N}^2 \le c\|A^\sigma x_0\|^2 N^{-2\sigma} \tag{13}$$

с постоянной $c=\dfrac{\sigma^{2\sigma-1}}{e^\sigma 2^{2\sigma+1}\gamma^{2\sigma}}$, не зависящей от N и x_0.

Доказательство. Рассуждая, как и в [4], имеем

$$z_{t,N}^2 = \int_0^{+\infty} t^{-1}\|x(t)-x_N(t)\|^2\, dt = \sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{j}\|y_{\gamma,j}\|^2 =$$

$$= \sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{j}\int_{\lambda_0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda-\gamma}{\lambda+\gamma}\right)^{2j}\frac{1}{\lambda^{2\sigma}}\, d(E_\lambda x_0^\sigma, x_0^\sigma), \tag{14}$$

где $x_0^\sigma \equiv A^\sigma x_0$, E_λ — спектральное разложение единицы оператора A. Для функции

$$\varphi(\lambda)=\left(\frac{\lambda-\gamma}{\lambda+\gamma}\right)^{2j}\frac{1}{\lambda^{2\sigma}}$$

найдем производную

$$\varphi'(\lambda)=\frac{-2\sigma}{\lambda^{2\sigma+1}}\frac{(\lambda-\gamma)^{2j-1}}{(\lambda+\gamma)^{2j+1}}\left(\lambda^2-\frac{2j\gamma}{\sigma}\lambda-\gamma^2\right),$$

нули $\lambda_1=\gamma$ и $\lambda_2=\dfrac{\gamma(j+\sqrt{j^2+\sigma^2})}{\sigma}$ которой при всех $j\in\mathbb{N}$ удовлетворяют неравенству $\lambda_1<\lambda_2$. Выберем положительный параметр γ из условия $\gamma\le\lambda_0$. Применив неравенство $(1-1/x)^x<e^{-1}$, $x\ge 1$, получим для всех натуральных $j\ge\max\left\{\dfrac{\lambda_0\sigma}{2\gamma},\sigma\right\}$ оценку

$$\max_{\lambda\ge\lambda_0}\varphi(\lambda)=\varphi(\lambda_2)=\left(\frac{j+\sqrt{j^2+\sigma^2}-\sigma}{j+\sqrt{j^2+\sigma^2}+\sigma}\right)^{2j}\frac{\sigma^{2\sigma}}{\gamma^{2\sigma}(j+\sqrt{j^2+\sigma^2})^{2\sigma}}=$$

$$=\left(\left(1-\frac{2\sigma}{j+\sqrt{j^2+\sigma^2}+\sigma}\right)^{\frac{j+\sqrt{j^2+\sigma^2}+\sigma}{2\sigma}}\right)^{\frac{4\sigma j}{j+\sqrt{j^2+\sigma^2}+\sigma}}\times$$

$$\times\frac{\sigma^{2\sigma}}{\gamma^{2\sigma}(j+\sqrt{j^2+\sigma^2})^{2\sigma}}\le\frac{\sigma^{2\sigma}}{e^\sigma\gamma^{2\sigma}(2j)^{2\sigma}}.$$

Оценивая так φ в (14), получаем

$$z_{t,N}^2\le\frac{\sigma^{2\sigma}}{e^\sigma\gamma^{2\sigma}2^{2\sigma}}\|A^\sigma x_0\|^2\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{j^{2\sigma+1}}\le$$

$$\le\frac{\sigma^{2\sigma}}{e^\sigma\gamma^{2\sigma}2^{2\sigma}}\|A^\sigma x_0\|^2\int_N^{+\infty}\frac{ds}{s^{2\sigma+1}}=\frac{\sigma^{2\sigma-1}}{e^\sigma\gamma^{2\sigma}2^{2\sigma+1}N^{2\sigma}}\|A^\sigma x_0\|^2$$

для всех натуральных $N\ge\max\left\{\dfrac{\lambda_0\sigma}{2\gamma},\sigma\right\}-1$. ■

Естественно, возникает вопрос о неулучшаемости по порядку N оценки (13). Положительный ответ содержится в следующем утверждении.

Теорема 3. Пусть $\{c_N, N\in\mathbb{N}\}$ — неограниченная последовательность положительных чисел. Тогда для некоторого самосопряженного оператора A и вектора $x_0\in D(A^\sigma)$, $\sigma>0$, не существует постоянной $c>0$ такой, что $z_{t,N}^2\le\dfrac{c}{N^{2\sigma}c_N}$.

Доказательство. Пусть $\{e_n, n\in\mathbb{N}\}$ — ортонормированный базис в H. Рассмотрим действующий в H оператор A с областью определения

$$D(A)=\left\{x=\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n\in H:\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2n^2<\infty\right\}$$

и положим $Ax=\sum_{n=1}^{\infty} x_n n e_n$ для $x\in D(A)$. Очевидно, $\overline{D(A)}=H$, а A — неограниченный на $D(A)$ линейный оператор. Кроме того, A — симметричный оператор с областью значений $R(A)=H$. Из этого следует, что A самосопряжен. Пусть подпоследовательность $\{c_{n_k}, N\in\mathbb{N}\}$ последовательности $\{c_N, N\in\mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию

$$c_{n_k}\ge k^3,\ \ n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots . \tag{15}$$

Возьмем $x_0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kn_k^{\sigma}}e_{n_k}\in D(A^{\sigma})=\left\{x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n e_n\in H:\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 n^{2\sigma}<\infty\right\}$. Очевидно, $A^{\sigma}x_0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e_{n_k}$. Тогда

$$z_{t,n_k}^2=\int_0^{+\infty}t^{-1}\|x(t)-x_{n_k}(t)\|^2\,dt=\sum_{j=n_k+1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{n_p-\gamma}{n_p+\gamma}\right)^{2j}\frac{1}{n_p^{2\sigma}}|(A^{\sigma}x_0,e_{n_p})|^2\ge$$

$$\ge\sum_{j=n_k+1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{n_k-\gamma}{n_k+\gamma}\right)^{2j}\frac{1}{n_k^{2\sigma}}\frac{1}{k^2}\ge\sum_{j=n_k+1}^{2n_k}\frac{1}{j}\left(\frac{n_k-\gamma}{n_k+\gamma}\right)^{2j}\frac{1}{n_k^{2\sigma}}\frac{1}{k^2}\ge$$

$$\ge n_k\frac{1}{2n_k}\left(\frac{n_k-\gamma}{n_k+\gamma}\right)^{4n_k}\frac{1}{n_k^{2\sigma}}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\gamma-\gamma}{2\gamma+\gamma}\right)^{8\gamma}\frac{1}{n_k^{2\sigma}}\frac{1}{k^2}\ge\frac{1}{2}3^{-8\gamma}\frac{1}{n_k^{2\sigma}k^2} \tag{16}$$

для всех $n_k\ge 2\gamma$. Предположим теперь, что, наоборот, найдутся положительная постоянная c и номер $N'\in\mathbb{N}$ такие, что при $n_k\ge N'$ выполняется

$$z_{t,n_k}^2\le\frac{c}{n_k^{2\sigma}c_{n_k}}. \tag{17}$$

Из оценок (16) и (17) следует неравенство $\frac{c_{n_k}}{k^2}\le 3^{8\gamma}2c$ для всех $n_k\ge N'$, что противоречит условию (15). ■

Следующее утверждение является обратной теоремой приближения.

Теорема 4. Пусть для некоторого действующего в H самосопряженного положительно-определенного оператора $A=A^*\ge\lambda_0 I$, постоянной $\sigma>0$ и неубывающей последовательности положительных чисел $\{c_N, N\in\mathbb{N}\}$ со сходящимся рядом $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{c_{2^k}}$ выполняется неравенство

$$z_{t,N}^2\le\frac{1}{N^{2\sigma}c_N}. \tag{18}$$

Тогда $x_0\in D(A^{\sigma})$.

Доказательство. Используя представление (14) и оценку (18), имеем

$$z_{t,N}^2\cdot N^{2\sigma}=\int_{\lambda_0}^{+\infty}N^{2\sigma}\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{\lambda-\gamma}{\lambda+\gamma}\right)^{2j}d(E_\lambda x_0,x_0)\le\frac{1}{c_N}. \tag{19}$$

Обозначим $\psi_N(\lambda)=N^{2\sigma}\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{\lambda-\gamma}{\lambda+\gamma}\right)^{2j}$ и рассмотрим неубывающую последовательность $\{\varphi_n, n\in\mathbb{N}\}$ функций

$$\varphi_n(\lambda)=\max\{\psi_1(\lambda),\psi_2(\lambda),\ldots,\psi_n(\lambda)\},\ \ \lambda\in[\lambda_0,+\infty).$$

Для каждого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ найдем $r \in \mathbb{N}_0$ такое, что $2^r \le k < 2^{r+1}$. Тогда

$$\frac{\psi_k(\lambda)}{\psi_{2^r}(\lambda)} = \frac{k^{2\sigma} \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2j}}{(2^r)^{2\sigma} \sum\limits_{j=2^r+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2j}} < \left(\frac{k}{2^r} \right)^{2\sigma} < 2^{2\sigma}$$

и, следовательно, $\varphi_n(\lambda) < 2^{2\sigma} \sum\limits_{r=0}^{[\log_2 n]} \psi_{2^r}(\lambda)$. Отсюда с учетом (19) получаем

$$\int\limits_{\lambda_0}^{+\infty} \varphi_n(\lambda) d(E_\lambda x_0, x_0) < 2^{2\sigma} \sum_{r=0}^{[\log_2 n]} \int\limits_{\lambda_0}^{+\infty} \psi_{2^r}(\lambda) d(E_\lambda x_0, x_0) <$$

$$< 2^{2\sigma} \sum_{\mathrm{r}=0}^{[\log_2 \mathrm{n}]} \frac{1}{\mathrm{c}_{2^\mathrm{r}}} < \mathrm{M}, \ \mathrm{M} = \mathrm{const},$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда по лемме Беппо Леви и для функции $\varphi(\lambda) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(\lambda)$ имеем

$$\int\limits_{\lambda_0}^{+\infty} \varphi(\lambda) d(E_\lambda x_0, x_0) \le M.$$

Покажем теперь, что $\varphi(\lambda) \ge C\lambda^{2\sigma}$ при $\lambda \ge \lambda' = \max\{\lambda_0, 2, \gamma\}$, где C — некоторая положительная постоянная. Этим будет установлена сходимость интеграла $\int\limits_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\sigma} d(E_\lambda x_0, x_0) < \infty$, а значит, и то, что $x_0 \in D(A^\sigma)$. С этой целью для каждого $\lambda \ge \lambda' = \max\{\lambda_0, 2, \gamma\}$ находим

$$\psi_{[\lambda]}(\lambda) = [\lambda]^{2\sigma} \sum_{j=[\lambda]+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2j} > [\lambda]^{2\sigma} \sum_{j=[\lambda]+1}^{2[\lambda]} \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{2j} >$$

$$> [\lambda]^{2\sigma} [\lambda] \frac{1}{2[\lambda]} \left(\frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{4[\lambda]} \ge (\lambda - 1)^{2\sigma} \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{4\lambda} =$$

$$= (\lambda - 1)^{2\sigma} \frac{1}{2} \left(\frac{2\gamma - \gamma}{2\gamma + \gamma} \right)^{8\gamma} \ge \frac{\lambda^{2\sigma}}{2^{2\sigma+1}} 3^{-8\gamma},$$

откуда $\varphi(\lambda) \ge \varphi_{[\lambda]}(\lambda) \ge \psi_{[\lambda]}(\lambda) \ge \frac{1}{2^{2\sigma+1} 3^{8\gamma}} \lambda^{2\sigma}$. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2004. — 499 с.
2. Макаров В.Л., Рябічев В.Л. Непокращувані оцінки точності методу перетворення Келі для знаходження операторного косинуса // Доп. НАН України. — 2002. — № 12. — С. 21–25.
3. Макаров В.Л., Василик В.Б., Рябичев В.Л. Неулучшаемые по порядку оценки скорости сходимости метода преобразования Кэли для приближения операторной экспоненты // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 4. — С. 180–185.
4. Макаров В.Л., Майко Н.В., Рябічев В.Л. Точність наближення операторної експоненти // Вісник Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. — 2002. — Вип. 4. — С. 192–197.
5. Торба С.М. Прямі та обернені теореми наближених методів розв'язування абстрактної задачі Коші // Укр. мат. журн. — 2007. — **59,** № 6. — С. 838–852.
6. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 587 с.

Поступила 25.08.2008