УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, Е.М. ЕМЕЦ

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА КОМБИНАТОРНОГО ОТСЕЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ НА ВЕРШИННО РАСПОЛОЖЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Ключевые слова: *комбинаторная оптимизация, метод отсечения, вершинно расположенные множества, перестановки, вырожденные решения задач линейного программирования.*

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и важность задач комбинаторной оптимизации в современной теории оптимизации не требует обоснования ввиду своей очевидности [1–10].

Интересным и важным является класс задач оптимизации линейной функции с дополнительными линейными ограничениями на вершинно расположенном комбинаторном множестве. Примерами таких вершинно расположенных множеств являются множества перестановок, полиперестановок, некоторые множества размещений и многие евклидовы комбинаторные множества. Для таких задач разработан метод комбинаторного отсечения [11–18]. Вместе с тем возникают некоторые сложности в его реализации, когда во вспомогательных задачах линейного программирования (ЗЛП) решения являются вырожденными.

В настоящей статье предлагается модификация метода комбинаторного отсечения для задач оптимизации на вершинно расположенных комбинаторных множествах, которая позволяет использовать вырожденные решения вспомогательных ЗЛП.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу максимизации линейной функции при дополнительных линейных ограничениях на вершинно расположенном множестве. Найти

$$C(y^*) = \max_{y \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j, \tag{1}$$

$$y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*) = \arg \max_{y \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \tag{2}$$

при дополнительных линейных условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i \quad \forall i \in J_r; \tag{3}$$

$$y_j \ge 0 \quad \forall j \in J_n \tag{4}$$

с учетом комбинаторного ограничения

$$x = (x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_k) \in E \subset R^k, \tag{5}$$

в котором комбинаторное множество E является вершинно расположенным, т.е. при образовании его выпуклой оболочки $\mathrm{conv}E$ совпадает с множеством ее вершин $\mathrm{vert}(\mathrm{conv}E)$:

$$E = \mathrm{vert}(\mathrm{conv}E). \tag{6}$$

В задаче (1)–(6) n, r, k — заданные натуральные константы ($k \le n$); R^n — n-мерное евклидово арифметическое пространство; J_r — множество первых r натуральных чисел ($J_r = \{1, 2, \ldots, r\}$); c_j, a_{ij}, b_i — заданные действительные числа $\forall i \in J_r$, $\forall j \in J_n$.

Отметим, что при $k < n$ задачу называют частично комбинаторной, а при $k = n$ — полностью комбинаторной.

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА КОМБИНАТОРНОГО ОТСЕЧЕНИЯ И ЕЕ ОБОСНОВАНИЕ

Метод отсечения для комбинаторной задачи состоит в следующем (схема метода отсечения изложена в [5]).

1. Решаем вспомогательную ЗЛП, которая получена из задачи (1)–(5) при условии (6) заменой (5) на принадлежность точки x выпуклой оболочке множества E:

$$x \in \mathrm{conv} E. \tag{7}$$

Заметим, что выпуклые оболочки многих вершинно расположенных множеств известны (например, [4, 19–26]). Будем считать, что система линейных ограничений, описывающая условие (7), представлена в виде равенств (как и при сведении ЗЛП к каноническому виду)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i \quad \forall i \in J_s \setminus J_r, \tag{8}$$

где s — натуральная константа, $s > r$; a_{ij}, b_i — определенные в (7) действительные числа $\forall i \in J_s \setminus J_r$, $\forall j \in J_n$.

Объединяя (3) и (8), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i \quad \forall i \in J_s. \tag{9}$$

Таким образом, вспомогательная ЗЛП (ВЗЛП) имеет вид: найти (1), (2) при ограничениях (4), (9). На этом этапе задача решается методом линейного программирования (симплекс-методом, методом искусственного базиса, двойственным симплекс-методом — в зависимости от вида ЗЛП), в результате получена вершина допустимой области.

2. Обозначим y^* решение ВЗЛП (1), (2), (4), (9). На основании y^* образуем $x^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*) = (y_1^*, \ldots, y_k^*)$, для которого проверяем условие (5):

$$x^* \in E. \tag{10}$$

Если (10) выполняется, то задача (1)–(5) решена. Иначе переходим к п. 3.

3. Находим смежные с точкой y^* вершины многогранника (9). Определяем полупространство, граница которого проходит через смежные с точкой y^* вершины многогранника (9), которому точка y^* не принадлежит:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{r+1,\, j} y_j \le b_{r+1}. \tag{11}$$

Это неравенство в виде равенства (добавив в его левую часть новую неотрицательную переменную) добавляем в систему (9) (соответственно увеличив значение s).

После этого переходим к п. 1.

Отличительным в предлагаемой модификации метода является способ построения неравенства (11). Как известно из [5, 11–18], отсечение (11) предлагается строить в виде неравенства

$$\sum_{j_i \in J} \frac{y_{j_i}}{\theta_{j_i}} \geq 1, \tag{12}$$

где J — множество небазисных переменных в точке y^* — решении ВЗЛП,

$$\theta_j = \min_{i: \alpha_{ij} > 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \frac{\beta_t}{\alpha_{tj}}. \tag{13}$$

Здесь α_{ij}; β_i — элементы последней симплекс-таблицы ВЗЛП (i — номер ее строки, j — номер столбца небазисной переменной), которая дает решение y^*.

Формулы (12), (13) приемлемы, когда $\theta_{j_i} > 0 \ \forall j_i \in J$. Иначе (при $\theta_j = 0$) предлагается [5, 11, 12, 15] использовать методы возмущения (Чарнса и другие).

В статье дана модификация метода комбинаторного отсечения, позволяющая учитывать ситуацию с вырожденным решением ВЗЛП. Изложим модифицированный метод комбинаторного отсечения для задачи оптимизации (1)–(5) на вершинно расположенном комбинаторном множестве.

Шаг 0. Задаем целочисленную переменную $q = 0$.

Шаг 1. Решаем ВЗЛП (1), (2), (4), (9) прямым либо двойственным симплекс-методом или методом искусственного базиса. Если эта задача не имеет решения, то и исходная задача (1)–(5) не имеет решения. На этом алгоритм оканчивает работу. Иначе — переход на шаг 2.

Шаг 2. Проверяем условие $x^* = (y_1^*, \ldots, y_k^*) \in E$ (т.е. выполнение условия (5)). Если (5) для x^* выполняется, то задача (1)–(5) решена. Алгоритм оканчивает работу. Иначе — переход на шаг 3.

Шаг 3. Увеличиваем значение q на единицу.

Шаг 4. Добавляем к системе (9) (увеличивая s на единицу) отсечение точки y^* в виде равенства

$$-\sum_{\substack{j_t \in J \\ \theta_{j_t} \neq 0}} \frac{y_{j_t}}{\theta_{j_t}} + y_{n+q} = -1, \tag{14}$$

введя дополнительную переменную $y_{n+q} \geq 0$. В формуле (14) $j_1, \ldots, j_\gamma$ — номера небазисных переменных в последней точке y^* (полученной как решение ВЗЛП на шаге 1), γ — их количество, $J = \{j_1, \ldots, j_\gamma\}$; $\theta_{j_t} \ \forall t \in J_\gamma$ находится по формуле (13), т.е.

$$\theta_j = \min_{\substack{1 \leq i \leq s \\ \alpha_{ij} > 0}} \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \frac{\beta_t}{\alpha_{tj}},$$

где α_{ij}, β_i — элементы последней симплекс-таблицы ВЗЛП, которая соответствует решению y^* этой вспомогательной задачи, i — номер строки таблицы, j — номер столбца небазисной переменной. Далее переходим на шаг 1 метода.

Замечание 1. Процесс построения отсечений и решение завершается либо получением точки, которая удовлетворяет условию (5), либо переходом на грань меньшей размерности многогранника допустимой области текущей ВЗЛП. Разрешить последнюю ситуацию позволяет следующее достаточно очевидное утверждение: если после отсечения с помощью равенства (14) или (что то же самое) с помощью неравенства

$$\sum_{\substack{j_t \in J \\ \theta_{j_t} \neq 0}} \frac{y_{j_t}}{\theta_{j_t}} \geq 1 \tag{15}$$

и дальнейшего нахождения точки y^* в найденных с ней смежных вершинах неравенство (15) выполняется как равенство, то решение в дальнейшем находится на грани области (т.е. неравенство (15) обращают в равенство), присоединяется к текущей системе ограничений и процесс решения продолжается. Таким образом, количество возможных соседних вершин уменьшается на единицу. В итоге может остаться одна вершина. Если для нее выполняется условие (5), то эта вершина дает решение задачи (1)–(5), в противном случае исходная задача (1)–(5) не имеет решения.

Обосновывает отсечение следующая теорема, аналогичная теореме 4.1 из [5] для неравенства (12).

Теорема 1. Пусть в неравенстве (15), где j_t ($j_t \in J$ $\forall t \in J_\gamma$, $\gamma = |J|$) — номера небазисных переменных в решении $y^* = (y_1^*, \ldots, y_{n+q}^*)$ ВЗЛП, величина θ_{j_t} вычисляется по формуле (13). Тогда неравенству (15) все смежные с y^* вершины допустимой области ВЗЛП удовлетворяют как равенству, а точка y^* неравенство (15) не удовлетворяет.

Доказательство. Поскольку $y_{j_1}, \ldots, y_{j_\gamma}$ — небазисные переменные в точке y^*, то в ней они равны нулю. Таким образом, очевидно, что точка y^* не удовлетворяет неравенство (15). По алгоритму построения смежной вершины допустимого многогранника в симплекс-методе (например, [27, 28]) у вершины $\widetilde{y}$, которая смежна с вершиной y^*, координата $y_{j_t} = \theta_{j_t}$ $\forall t \in J_\gamma$, а другие координаты из набора $(y_{j_1}, \ldots, y_{j_\gamma})$ равны нулю, т.е. в любой точке $\widetilde{y}$ неравенство (15) выполняется как равенство. Теорема доказана.

Конечность предлагаемого модифицированного метода комбинаторного отсечения основывается на следующем. Условие (5) означает ограниченность области допустимых решений задачи (1)–(5). Для доказательства конечности метода можно предположить, что каждый базис, рассматриваемый при решении ВЗЛП, является невырожденным. Иначе если в столбце свободных членов симплекс-таблицы в строке i появляется нуль, то уравнение

$$y_i + \sum_{j \in J} \alpha_{ij} y_j = 0,$$

соответствующее этой строке симплекс-таблицы, исключается из нее с подстановкой в целевую функцию

$$y_i = -\sum_{j \in J} \alpha_{ij} y_j.$$

На основании сделанных замечаний очевидна конечность метода. Действительно, переменная y_{n+q} (из (14)) после применения двойственного симплекс-метода выводится из базиса (становится равной нулю), т.е. гиперплоскость (14) в пересечении с ребрами допустимой области ВЗЛП новых вершин не образует. Поскольку при $y_{n+q} = 0$ гиперплоскость (14) проходит через смежные вершины к точке y^*, которая отсекается, а вершину y^* можно считать невырожденной, то построенная гиперплоскость пересекается с ребрами допустимой области только по вершинам области, т.е. новых вершин не образуется.

При решении одной ВЗЛП отсекается (по смежным вершинам) одна вершина или происходит переход в пространство на единицу меньшей размерности (см. замечание 1). Конечность допустимой области задачи (1)–(5) и конечность размерности обеспечивают конечность метода.

Замечание 2. Отметим, что в дополнительном исследовании эффективности модифицированного метода комбинаторного отсечения нет необходимости, поскольку он имеет общее свойство с хорошо известным симплекс-методом для ЗЛП — перебор смежных вершин (в симплекс-методе — после анализа вершины на оптимальность и неограниченность целевой функции для перехода к вершине с большим (в невырожденной задаче на максимум) значением целевой функции, а в модифицированном методе комбинаторного отсечения — после анализа вершины на удовлетворение условия (5) и ее отсечения для перехода к смежной вершине с меньшим значением целевой функции).

Эффективность модифицированного метода комбинаторного отсечения сравнима с эффективностью симплекс-метода, поскольку определяется в основном этим перебором вершин, т.е. аналогично симплекс-методу можно построить «патологические» примеры, в которых перебираются все вершины допустимой области. Исходя из этого можно сделать вывод, что при практическом применении метод отсечения будет таким же эффективным, как и симплекс-метод.

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим пример применения модифицированного метода комбинаторного отсечения, который в [15] решен с использованием метода возмущения Чарнса.

Найти

$$-x_4 \to \max \tag{16}$$

при дополнительных ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 \le 0; \\ x_3 - x_4 \le 0; \\ x_1 - x_2 \le 0; \end{cases} \tag{17}$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1, 2, 3, 4, \tag{18}$$

и при комбинаторном ограничении

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in E(G), \tag{19}$$

где $E(G)$ — множество перестановок с повторениями из мультимножества $G = \{1, 1, 3\}$.

Как известно [4, 20, 23–25], множества перестановок с повторениями являются вершинно расположенными. Для формирования первой ВЗЛП условие (19) ($x \in E$) заменим условием $x \in \mathrm{conv}E$, т.е. запишем систему, которая дает выпуклую оболочку заданного в (19) множества перестановок $E(G)$ (например, [4, 20, 23–25]), при этом сведем систему к форме, необходимой для канонического вида ЗЛП:

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 3; \\ x_2 + x_6 = 3; \\ x_3 + x_7 = 3; \\ x_1 + x_2 + x_8 = 4; \\ x_1 + x_3 + x_9 = 4; \\ x_2 + x_3 + x_{10} = 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5, \end{cases} \tag{20}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \dots, 10.$$

В связи с этим систему (17) запишем в виде

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + x_{11} = 0; \\ x_3 - x_4 + x_{12} = 0; \\ x_1 - x_2 + x_{13} = 0, \end{cases} \tag{21}$$

$$x_j \ge 0 \ \forall j.$$

Отметим, что для ЗЛП используется терминология, обозначения и формы симплекс-таблиц из [27], причем базисные столбцы и нули, как правило, опускаются и в таблице не пишутся (соответствующие клеточки остаются незаполненными).

Таким образом, первая ВЗЛП имеет вид (16), (20), (21) при всех неотрицательных переменных. В силу отсутствия базиса введем искусственную неотрицательную переменную x_{14} в седьмое уравнение системы (20) и применим M-метод [27, 28]. Целевая функция расширенной ЗЛП для первой ВЗЛП будет иметь вид

$$-x_4 - Mx_{14} \to \max,$$

где $M > 0$ — достаточно большое число.

В табл. 1 приведены результирующая симплекс-таблица первой ВЗЛП и столбцы для построения отсечения. Здесь P — столбец названий базисных векторов, в 11-й строке — значение целевой функции; $C_б$ — коэффициенты целевой функции при базисных переменных; P_0 — столбец правых частей ограничений; P_{10}, P_{11}, P_{12} — небазисные столбцы; θ_{10}, θ_{11}, θ_{12} — определяющие как минимум элементов этих столбцов.

Таблица 1

Номер строки, i	Базисный столбец, P	$C_б$	P_0	P_{10}	P_{11}	P_{12}	β_i / α_{ij}		
							$j = 10$	$j = 11$	$j = 12$
1	P_5	0	2	1			2	–	–
2	P_6	0	3/2	–1	–1/2	1/2	–	–	3
3	P_7	0	1/2		1/2	–1/2	–	1	–
4	P_8	0	3/2		–1/2	1/2	–	–	3
5	P_9	0	1/2	1	1/2	–1/2	1/2	1	–
6	P_4	–1	5/2		–1/2	–1/2	–	–	–
7	P_1	0	1	–1			–	–	–
8	P_2	0	3/2	1	1/2	–1/2	3/2	3	–
9	P_3	0	5/2		–1/2	1/2	–	–	5
10	P_{13}	0	1/2	2	1/2	–1/2	1/4	1	–
11			–5/2		1/2	1/2	$\theta_{10} = 1/4$	$\theta_{11} = 1$	$\theta_{12} = 3$

Из табл. 1 видно, что $x_1 = 1$ (строка 7); $x_2 = 3/2$ (строка 8), $x_3 = 5/2$ (строка 9), т.е. (1, 3/2, 5/2) не является перестановкой чисел (1, 1, 3); таким образом, комбинаторное условие (19) не выполнилось. Строим отсечение полученной точки. В табл. 1 (в трех последних столбцах) по формуле (13) найдены θ_j для небазисных переменных $j = 10, 11, 12$.

Записываем отсечение (15), которое в этом случае (отсутствуют нулевые θ_j) совпадает с (12):

$$\frac{x_{10}}{0{,}25} + \frac{x_{11}}{1} + \frac{x_{12}}{3} \geq 1.$$

Последнее неравенство записываем в виде (14)

$$-4x_{10} - x_{11} - \frac{1}{3}x_{12} + x_{15} = -1, \tag{23}$$

удобном при использовании двойственного симплекс-метода.

Добавив (23) к ограничениям первой ВЗЛП, получим вторую ВЗЛП. Практически это означает введение в симплекс-таблицу (табл. 1) строки, соответствующей (23), и столбца P_{15}. Получаем первую симплекс-таблицу второй ВЗЛП, при пересчете которой по правилам двойственного симплекс-метода получаем решение второй ВЗЛП (табл. 2).

Оптимальная точка второй ВЗЛП из табл. 2 определяет $x_1 = 5/4$; $x_2 = 5/4$, $x_3 = 5/2$. Это не соответствует перестановке чисел 1, 1, 3, т.е. условие (19) не выполняется, строим отсечение. Поскольку $\theta_{15} = 0$, то в соответствии с (14) получим

$$-\frac{x_{11}}{1} - \frac{x_{12}}{3} + x_{16} = -1.$$

Таблица 2

Номер строки, i	Базисный столбец, P	$C_б$	P_0	P_{11}	P_{12}	P_{15}	β_i / α_{ij}		
							$j=11$	$j=12$	$j=15$
1	P_5	0	7/4	–1/4	–1/12	1/4	–	–	7
2	P_6	0	7/4	–1/4	7/12	–1/4	–	3	–
3	P_7	0	1/2	1/2	–1/2		1	–	–
4	P_8	0	3/2	–1/2	1/2		–	3	–
5	P_9	0	1/4	1/4	–7/12	1/4	1	–	1
6	P_4	–1	5/2	–1/2	–1/2		–	–	–
7	P_1	0	5/4	1/4	1/12	–1/4	5	15	–
8	P_2	0	5/4	1/4	–7/12	1/4	5	–	5
9	P_3	0	5/2	–1/2	1/2		–	5	–
10	P_{13}	0	0	0	–3/2	1/2	–	–	0
11	P_{10}	0	1/4	1/4	1/12	–1/4	1	3	–
12			–5/2	1/2	1/2		$\theta_{11}=1$	$\theta_{12}=3$	$\theta_{15}=0$

Присоединение этого условия к симплекс-таблице из табл. 2 дает первую симплекс-таблицу третьей ВЗЛП. Пересчет последней двойственным симплекс-методом дает точку $x=(x_1, x_2, x_3)$ с координатами $x_1=1$; $x_2=1$, $x_3=3$. Значение целевой функции x_4 равно –3. Таким образом, условие (19) вида $(1,1,3)\in E(G)$ выполнено. Исходная задача комбинаторной оптимизации на вершинно расположенном множестве перестановок с повторениями решена.

В табл. 2. приведены результирующая симплекс-таблица второй ВЗЛП и столбцы для построения отсечения.

Таким образом, предложена и обоснована модификация метода отсечения в условных линейных задачах оптимизации на вершинно расположенных комбинаторных множествах при наличии вырожденных базисов во вспомогательных ЗЛП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1988. — 472 с.
2. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1981.— 288 с.
3. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: Проблемы, методы решения, исследования. — К.: Наук. думка, 2003. — 265 с.
4. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — Київ: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. — 188 с.
5. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.
6. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізація з дробово-лінійними функціями. — К.: Наук. думка, 2005. — 117 с.
7. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. — 129 с.
8. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с.
9. Гуляницький Л.Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02 / НАН України. Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова. — К., 2005. — 32 с.

10. Гребеннік І.В. Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні. Автореф. дис. ... д-р. техн. наук: 01.05.02 / Ін-т пробл. машинобудування ім. А.М. Підгорного. — Харків, 2006. — 34 с.
11. Емец О.А. Метод отсечения при решении одного класса линейных евклидовых комбинаторных задач оптимизации / Полт. техн. ун-т. — Полтава, 1995. — 20 с. — Деп. в ГНТБ Украины 02.06.95, № 1408-Ук95.
12. Емец О.А. Об одном методе отсечения для задач комбинаторной оптимизации // Экономика и мат. методы. — 1997. — **33**, вып. 4. — С. 120–129.
13. Емец О.А., Емец Е.М. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах евклидовой комбинаторной оптимизации / Полт. техн. ун-т. — Полтава, 1995. — 21 с. — Деп. в ГНТБ Украины 01.12.95, №2562-Ук95.
14. Ємець О.О., Ємець Є.М. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації // Доп. НАНУ. — 2000. — № 9. — С. 105–109.
15. Ємець О.О., Ємець Є.М. Метод відсікання в евклідовій комбінаторній оптимізації.: Навч. посібник. — Полтава, 1997. — 30 с.
16. Емец О.А., Емец Е.М. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах оптимизации на перестановках // Экономика и мат. методы. — 2001. — **37**, № 1. — С. 118–121.
17. Ємець О.О., Чілікіна Т.В. Нелінійні задачі комбінаторної оптимізації на вершинно розташованих множинах та їх розв'язування // Динамические системы (Межвед. науч. сб.). — 2004. Вып. 17. — Симферополь: Таврич. нац. ун-т. — С. 160–165.
18. Емец О.А., Колечкина Л.Н. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными линейными ограничениями на перестановках // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 3. — С. 30–43.
19. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 344 с.
20. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании.: Учебное пособие. — К.: УМК ВО, 1992. — 92 с.
21. Емец О.А. Задачи оптимизации на евклидовом полиперестановочном множестве с повторениями: свойства допустимого множества // В кн.: Методы и программные средства оптимизации, моделирования и создания вычислительных систем: Сб. науч. тр. /АН УССР. Ин-т кибернетики АН УССР. — Киев, 1990. — С. 22–24.
22. Емец О.А. Комбинаторная модель и приближенный метод с априорной оценкой решения оптимизационной задачи размещения разноцветных прямоугольников // Экономика и мат. методы. — 1993. — **29**, вып. 2. — С. 294–304.
23. Емец О.А. Об общем полиперестановочном многограннике и некоторых его свойствах / Полт. инж.-строит. ин-т. — Полтава, 1989. — 11 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 31.10.89, № 2362Ук-89.
24. Емец О.А. Общий перестановочный многогранник и некоторые его свойства / Полт. инж.-строит. ин-т. — Полтава, 1983. — 20 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 28.06.83, № 616 — УкД83.
25. Стоян Ю.Г., Емец О.А. О комбинаторных задачах размещения прямоугольников // Экономика и мат. методы. — 1985. — **21**, вып. 5. — С. 868–881.
26. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — К.: Наук. думка, 1986. — 268 с.
27. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1986. — 319 с.
28. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций. — Киев: Вища шк., 1979. — 312 с.

Поступила 28.10.2008