УДК 514.01

Ю.Г. ГРИГОРЬЯН

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА ДИСКРЕТНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

Ключевые слова: *неклассическое пространство, дискретная геометрия, модель, асимметрия, симметрия*.

В работах [1–4] построено дискретное метрическое пространство $\mathfrak{R}(D)$, в котором на основе единой системы преобразований были сформулированы три геометрии, являющиеся соответственно дискретными аналогами евклидовой, неевклидовой и проективной геометрий. Минимальная аксиоматическая база, системная связанность и единственность этих геометрий свидетельствуют о совершенности, универсальности и фундаментальности пространства $\mathfrak{R}(D)$.

Настоящая статья является продолжением работ [1–5], связанных с изучением новых, неклассических свойств пространства, основанных на ранее построенной специальной тригонометрии [4]. Это позволяет определить коэффициент асимметрии треугольника и каждого подпространства (слоя) пространства $\mathfrak{R}(D)$. Показано, что в пространстве $\mathfrak{R}(D)$ отрицаются две классические аксиомы порядка, параллельности и приводится сравнительный анализ свойств построенных геометрий с гипотезами Римана [6].

Для удобства чтения приведем некоторые определения и теоремы из [4] в более простом виде.

Определение 1. Множество действительных чисел $\mathfrak{R}$ $(|\mathfrak{R}|\geq 3)$ без нуля называется скалярным множеством, если оно удовлетворяет двум условиям:

а) для любой пары различных $A,B\in\mathfrak{R}$ $A+B>0$;

б) для любой тройки различных $A,B,C\in\mathfrak{R}$ $AB+AC+BC\geq 0$.

Например, тройка $(-2,3,6)\in\mathfrak{R}$, а тройка $(-2,3,4)\notin\mathfrak{R}$.

Заметим, что в работах [1–4] множество $\mathfrak{R}$ называется арифметическим множеством. В настоящей статье оно названо скалярным, что более соответствует его содержанию.

Теорема 1. Каждой тройке действительных чисел $A,B,C\in\mathfrak{R}$ можно поставить в соответствие некоторый $\Delta A_1B_1C_1$ с длинами сторон

$$a=|B_1C_1|,\ b=|A_1C_1|,\ c=|A_1B_1|, \tag{1}$$

где

$$A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\ B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2},\ C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}. \tag{2}$$

Доказательство. Решим систему (2) относительно *a*, *b*, *c*. Она имеет единственное решение:

$$a=\sqrt{B+C},\ b=\sqrt{A+C},\ c=\sqrt{A+B}. \tag{3}$$

Поскольку $A,B,C\in\mathfrak{R}$, то все выражения под радикалами в (3) положительны, как и числа a,b,c. Покажем, что эти числа удовлетворяют аксиоме треугольника. Возьмем произвольные два числа, например a и b, и докажем, что $a+b\geq c$. Действительно, согласно определению 1б имеем

$$AB+AC+BC+C^2\geq C^2,\qquad 2\sqrt{(A+C)(B+C)}\geq -2C,$$

$$2\sqrt{(A+C)(B+C)}+A+C+B+C\geq A+B,\ (\sqrt{(A+C)}+\sqrt{(B+C)})^2\geq(\sqrt{A+B})^2,$$

$$\sqrt{A+C}+\sqrt{B+C}\geq\sqrt{A+B},\quad b+a\geq c. \tag{4}$$

Следствие 1. Каждому евклидову $\Delta A_1 B_1 C_1$ можно поставить в соответствие равный ему евклидов треугольник с числовыми обозначениями ΔABC, где

$$a = |B_1 C_1| = |BC| = \sqrt{B+C}, \; b = |A_1 C_1| = |AC| = \sqrt{A+C}, \; c = |A_1 B_1| = |AB| = \sqrt{A+B}. \quad (5)$$

Найдем площадь ΔABC по формуле Герона, подставляя (5),

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{AB + AC + BC)} \ge 0. \quad (6)$$

Исходя из (5) и (6), основные тригонометрические функции представляются в виде

$$\cos \angle BAC = \frac{A}{\sqrt{A^2 + 4S^2}}, \; \sin \angle BAC = \frac{2S}{\sqrt{A^2 + 4S^2}}, \quad (7)$$

$$\cos \angle ABC = \frac{B}{\sqrt{B^2 + 4S^2}}, \; \sin \angle ABC = \frac{2S}{\sqrt{B^2 + 4S^2}}, \quad (8)$$

$$\cos \angle ACB = \frac{C}{\sqrt{C^2 + 4S^2}}, \; \sin \angle ACB = \frac{2S}{\sqrt{C^2 + 4S^2}}, \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{2S}{A}, \; A = 2S \cdot \operatorname{ctg} \angle BAC, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{2S}{B}, \; B = 2S \cdot \operatorname{ctg} \angle ABC, \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} \angle ACB = \frac{2S}{C}, \; C = 2S \cdot \operatorname{ctg} \angle ACB. \quad (12)$$

Представление тригонометрических функций в виде (7)–(12), зависящих от площади треугольника S и его скалярных параметров, положены в основу специальной тригонометрии, удобной для исследования свойств различных геометрий. Например, на основании известного тождества из евклидовой геометрии

$$\operatorname{ctg} \angle A \cdot \operatorname{ctg} \angle B + \operatorname{ctg} \angle A \cdot \operatorname{ctg} \angle C + \operatorname{ctg} \angle B \cdot \operatorname{ctg} \angle C = 1, \quad (13)$$
$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi$$

легко получить площадь S ΔABC. Для этого умножим обе части (13) на $4S^2$ и перепишем полученный результат в виде

$$(2S \operatorname{ctg} \angle A)(2S \operatorname{ctg} \angle B) + (2S \operatorname{ctg} \angle A)(2S \operatorname{ctg} \angle C) + (2S \operatorname{ctg} \angle B)(2S \operatorname{ctg} \angle C) = 4S^2. \quad (14)$$

Перейдем к вопросам асимметрии пространства $\mathfrak{R}(D)$.

Определение 2. Множество действительных чисел $\mathfrak{R}$ без нуля называется асимметрическим множеством, если существует хотя бы один элемент $A \in \mathfrak{R}$ такой, что $-A \notin \mathfrak{R}$.

Определение 3. Параметрическое множество действительных чисел

$$\mathfrak{R}(D) = \{D\} \cup (|D|, \infty) \quad (15)$$

с фиксированным $D < 0$ называется D-асимметрическим множеством.

Заметим, что $\mathfrak{R}(D)$ асимметрично относительно любого своего элемента и для любой пары (A, B), $A, B \in \mathfrak{R}(D)$

$$A + B > 0. \quad (16)$$

Поскольку данная последующая аксиоматика строится на базе целых чисел, в дальнейшем будем рассматривать только целочисленные множества.

Зафиксируем целое число $D \le -2$ и рассмотрим бесконечное параметрическое множество целых чисел

$$\mathfrak{R}(D) = \{D, -D+1\} \cup \{D^2 - D + i\}, \; i = 0, 1, 2\ldots \quad (17)$$

Заметим, что множество $\mathfrak{R}(D)$ является дискретным примером D-асимметрического множества $\mathfrak{R}(D)$ из (15) и оно асимметрично относительно любого своего элемента. Имеет место теорема.

Теорема 2. Параметрическое множество целых чисел $\mathfrak{R}(D)$ из (17) при любом $D \le -2$ является скалярным множеством.

Доказательство теоремы приведено в [2, 4]. Следует отметить, что множество $\mathfrak{R}(D)$ из (17) охватывает все множество целых чисел $(-\infty, +\infty)$, кроме четверки $\{-1, 0, 1, 2\}$.

Теорема 3. Параметрическое множество целых чисел $\mathfrak{R}(D)$ из (17) при любом фиксированном $D \le -2$ является D-асимметрическим множеством.

Доказательство очевидно.

Теорема 4. Параметрическое множество целых чисел $\mathfrak{R}(D)$ из (17) для каждого фиксированного $D \le -2$ образует метрическое пространство с метрикой

$$r(A, B) = \begin{cases} \sqrt{A+B}, & A \ne B, \\ 0, & A = B. \end{cases} \tag{18}$$

(Метрика (18) была впервые введена автором в 1982 г. [5].)

Доказательство. Теорема 4 справедлива, так как для метрики (18) выполняются аксиомы метрического пространства: тождества, симметрии и треугольника (4).

В дальнейшем построенное метрическое пространство будем обозначать той же буквой, что и исходное множество $\mathfrak{R}(D)$ из (17) и называть пространством дискретных геометрий (ПДГ). В пространстве $\mathfrak{R}(D)$ прямоугольные треугольники не существуют, так как $0 \notin \mathfrak{R}(D)$.

При последующем изложении помеченным графом будем считать граф, вершины которого отличаются одна от другой какими-либо пометками.

Согласно следствию 1 каждому помеченному буквами A_1, B_1, C_1 евклидовому $\Delta A_1 B_1 C_1$ можно поставить в соответствие помеченный ΔABC, равный исходному, в котором метками вершин служат скалярные величины A, B, C, определяемые по формулам (2). С другой стороны, пространству $\mathfrak{R}(D)$ принадлежит множество всевозможных, помеченных целыми числами евклидовых ΔABC, $A, B, C \in \mathfrak{R}(D)$, длины сторон которых совпадают с метрикой пространств $\mathfrak{R}(D)$, т.е.

$$|AB| = r(A, B) = \sqrt{A+B}, \quad |AC| = r(A, C) = \sqrt{A+C}, \quad |BC| = r(B, C) = \sqrt{B+C}.$$

Другими словами, при таком отображении помеченный ΔABC в ПДГ $\mathfrak{R}(D)$ является образом бесконечного множества равных треугольников евклидова пространства с заданными длинами сторон $|A_1 B_1| = c$, $|A_1 C_1| = b$, $|B_1 C_1| = a$.

В дальнейшем при целочисленном кодировании вершин геометрических фигур (графов) коды вершин будут представляться целыми числами из $\mathfrak{R}(D)$, которые не равны между собой.

Определение 4. Точкой пространства дискретных геометрий $\mathfrak{R}(D_0)$ из (17) при фиксированном $D_0 \le -2$ называется любое целое число $X \in \mathfrak{R}(D_0)$.

Определение 5. При фиксированном $D_0 \le -2$ пара целых чисел (X, Y), $X, Y \in \mathfrak{R}(D_0)$, называется дискретной прямой, если:

1) $\sqrt{X+Y}$ — целое число; (19)

2) существует целое число $Z \in \mathfrak{R}(D_0)$, при котором

$$XZ + YZ + XY = 0.$$

Например, $Z = 5$ при $D_0 = -4$, $(X, Y) = (20, -4)$.

Определение 6. При фиксированном $D_0 \le -2$ пара целых положительных чисел (U,V), $U, V \in \mathfrak{R}(D_0)$, называется дискретной псевдопрямой, если:

1) $\sqrt{U+V}$ — целое число; (20)

2) существует целое положительное число $T \in \mathfrak{R}(D_0)$, при котором

$$UT + VT - UV = 0.$$

Например, при $D_0 = -3$ существуют три дискретные псевдопрямые $(U,V) = (28,21)$, $(U,V) = (48,16)$, $(U, V) = (156,13)$, $T = 12$.

Определение 7. При фиксированном $D_0 \le -2$ дискретная прямая (K, D_0), $K, D_0 \in \mathfrak{R}(D_0)$, называется базисной дискретной прямой, если:

1) $K + D_0 = 1$;

2) существует целое положительное число $C \in \mathfrak{R}(D_0)$, при котором

$$KD_0 + CD_0 + CK = 0.$$

Например, при $D_0 = -4$ имеем $(K, D_0) = (5,-4)$, $C = 20 \in \mathfrak{R}(D_0)$.

Определение 8. При фиксированном $D_0 \le -2$ дискретная псевдопрямая (A, B) называется базисной дискретной псевдопрямой, если выполняются условия:

1) $A + B = (1-2D_0)^2$;

2) существует положительное число $C \in \mathfrak{R}(D_0)$, при котором

$$AC + BC - AB = 0.$$

Например, при $D_0 = -5$ имеем $(A, B) = (66, 55)$, $C = 30 \in \mathfrak{R}(-5)$.

В [4] при любом фиксированном $D_0 \in \mathfrak{R}(D)$ $(D_0 \le -2)$ вводятся понятия трех различных дискретных плоскостей $\mathcal{E}, \overline{\mathcal{E}}, \mathcal{P}$ со своими определяющими точками:

$$\mathcal{E}\{A,\ B,\ K, \mathrm{D}_0\},\ \overline{\mathcal{E}}\{A,\ B,\ K, D_0, C\},\ \mathcal{P}\{A,\ B,\ K, D_0, C, E, F\},$$

которые соответственно называются дискретной плоскостью, дискретной расширенной плоскостью, предельной дискретной плоскостью; схематически их можно представить в виде системы из шести уравнений с семью неизвестными:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} A + D_0 = B + K \\ AD_0 + BK = 0 \\ K + D_0 = 1 \end{array}\right] \mathcal{E} \\ KC + D_0C + KD_0 = 0 \end{array}\right] \overline{\mathcal{E}} \\ K^2 + D_0^2 + C^2 = E^2 \\ A^2 + B^2 + C^2 = F^2 \end{array}\right] \mathcal{P}. \tag{21}$$

При фиксированном $D_0 \le -2$ каждая из подсистем $\mathcal{E}, \overline{\mathcal{E}}, \mathcal{P}$ системы (21) имеет единственное целочисленное решение (22), выраженное через нечетный параметр $n = 1 - 2D_0$ $(n \ge 5)$:

$$D_0 = -\frac{n-1}{2},\ K = \frac{n+1}{2},\ C = \frac{n^2-1}{4},$$
$$E = \frac{n^2+3}{4},\ B = \frac{n(n-1)}{2},\ A = \frac{n(n+1)}{2},\ F = \frac{3n^2+1}{4}, \tag{22}$$

которое удовлетворяет условию

$$\mathcal{E} \supset \overline{\mathcal{E}} \supset \mathcal{P}. \tag{23}$$

Следует заметить, что нечетный параметр $n = 1 - 2D_0 \ge 5$, принимающий значения $5, 7, 9, 11, \ldots$, по существу разделяет (квантует) все пространство $\mathfrak{R}(D)$ (17) на бесконечное множество подпространств $\mathfrak{R}(D_0)$, удовлетворяющих системе (21). Решение трех систем уравнений из (21) обеспечивает соответственно существование трех различных геометрий: $\mathcal{E}, \overline{\mathcal{E}}, \mathcal{P}$, которые в дальнейшем будем называть соответственно дискретной евклидовой геометрией (ДЕГ), дискретной неевклидовой геометрией (ДНГ), дискретной проективной геометрией (ДПГ).

Схематическое строение ДЕГ $\mathcal{E}\{A, B, K, D_0\}$ представлено на рис. 1.

На основании (22) и метрики (18) найдем выражения шести сторон

$$|KD_0| = 1,\ |AK| = \sqrt{2}\,\frac{n+1}{2},\ |BD_0| = \sqrt{2}\,\frac{n-1}{2},$$

$$|BK| = |AD_0| = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{n^2+1}}{2},\ |AB| = n$$

и двенадцати углов

$$\angle ABD_0 = \angle BAK = \angle AKD_0 = \frac{\pi}{4},$$

$$\angle BD_0K = \frac{3\pi}{4},$$

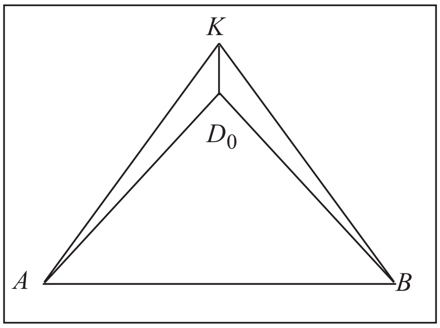

Рис. 1

$$\angle BKD_0 = \angle BAD_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{n-1}{n+1},\ \angle D_0AK = \angle D_0BK = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n},$$

$$\angle AKB = \operatorname{arc\,tg} n,\ \angle ABK = \operatorname{arc\,tg}\frac{n+1}{n-1},\ \angle AD_0B = \operatorname{arc\,tg}(-n),$$

$$\angle AD_0K = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{n+1}{n-1}\right).$$

Построим арифметическую модель ДЕГ $\mathcal{E}\{A, B, K, D_0\}$ в декартовой системе координат. Для этого на евклидовой плоскости (рис. 2) возьмем четыре точки :

$$(0,0),\ (1,0),\ \left(-\frac{n_0-1}{2},\ \frac{n_0+1}{2}\right),\ \left(-\frac{n_0-1}{2},\ -\frac{n_0-1}{2}\right).$$

Здесь $n_0 \geq 5$ — фиксированое нечетное целое число.

Взятые точки закодируем следующим образом:

$$D_0(0,0),\ K(1,0),\ A\left(-\frac{n_0-1}{2},\ \frac{n_0+1}{2}\right),\ B\left(-\frac{n_0-1}{2}, -\frac{n_0-1}{2}\right). \tag{24}$$

С помощью евклидовой метрики $d(x, y) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ и метрики (18) вычислим длины всевозможных шести отрезков $|D_0K|$, $|D_0A|$, $|D_0B|$, $|AK|$, $|BK|$, $|AB|$ (рис. 2):

$$d(D_0, K) = r(D_0, K) = 1,\ d(D_0, A) = r(D_0, A) = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{n_0^2+1}}{2},$$

$$d(D_0, B) = r(D_0, B) = \sqrt{2}\,\frac{n_0-1}{2},\ d(A, K) = r(A, K) = \sqrt{2}\,\frac{n_0+1}{2}, \tag{25}$$

$$d(B, K) = r(B, K) = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{n^2+1}}{2},\ d(A, B) = r(A, B) = n_0.$$

Система равенств (25) показывает, что четверка точек (24) со структурой на рис. 2 является арифметической моделью дискретной евклидовой геометрии $\mathcal{E}\{A, B, K, D_0\}$, что и требовалось показать.

Отметим, что построенные дискретные геометрии $\mathcal{E}, \overline{\mathcal{E}}, \mathcal{P}$ основаны на семи определяющих точках $\{A, B, C, K, D_0, E, F\} \subset \mathfrak{R}(D_0)$, образующих при фиксированном D_0 35 треугольников (C_7^3) и 35 тетраэдрических структур (C_7^4).

Далее покажем, что ДЕГ отрицает евклидову аксиому порядка.

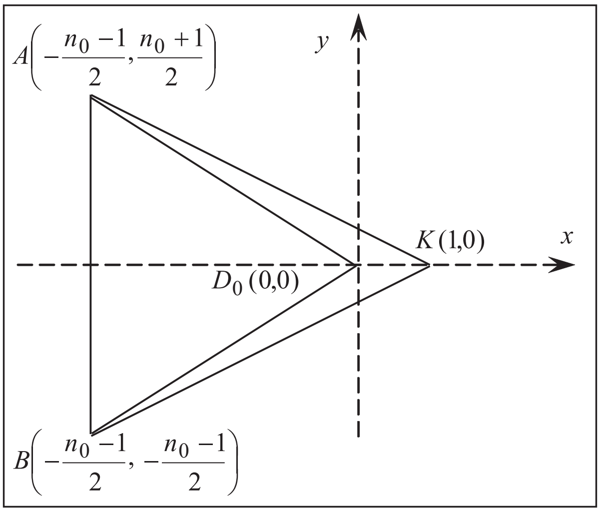

Рис. 2

Теорема 5. Условия существования ДЕГ $\mathcal{E}\{A, B, K, D_0\}$

$$\left.\begin{array}{c} A + D_0 = B + K \\ AD_0 + BK = 0 \\ K + D_0 = 1 \end{array}\right],$$

приведенные в (21), отрицают классическую евклидову аксиому порядка.

Доказательство. Допустим, что ДЕГ $\mathcal{E}$ не отрицает аксиому порядка. Тогда на основании построенной арифметической модели на рис. 2 в силу существования на плоскости ДЕГ точек (24) должна существовать на оси абсцисс точка $L\left(-\frac{n_0-1}{2}, 0\right)$ (рис. 3), для которой справедливо

$$|LD_0| = \frac{n_0-1}{2},\ |D_0K| = 1,\ |LK| = \frac{n_0+1}{2}. \quad (26)$$

По формулам (1) и на основании рис. 3 отобразим точки $\{K, D_0, L\}$ в пространство $\mathfrak{R}(D_0)$. Получим

$$D_0 = \frac{|LD_0|^2 + |D_0K|^2 - |LK|^2}{2} = -\frac{n_0-1}{2} = D_0, \quad (27)$$

$$K = \frac{|D_0K|^2 + |LK|^2 - |LD_0|^2}{2} = \frac{n_0+1}{2} = K, \quad (28)$$

$$L = \frac{|LD_0|^2 + |LK|^2 - |KD_0|^2}{2} = \frac{n_0^2-1}{4} = C. \quad (29)$$

Из (27) и (28) следует, что точки D_0, K отображаются на себя (остаются на месте), а точка L согласно (22) и (29) имеет вид

$$L = C. \quad (30)$$

Аналогично (26) для отрезка $|AB|$ имеем

$$|AB| = n,\ |AL| = \frac{n+1}{2},\ |BL| = \frac{n_0-1}{2}. \quad (31)$$

По формулам (1) и на основании рис. 3 отобразим точки $\{A, B, L\}$ в пространство $\mathfrak{R}(D_0)$. Получим

$$A = \frac{|AB|^2 + |AL|^2 - |LB|^2}{2} = \frac{n_0(n_0+1)}{2} = A, \quad (32)$$

$$B = \frac{|AB|^2 + |BL|^2 - |AL|^2}{2} = \frac{n_0(n_0-1)}{2} = B, \quad (33)$$

$$L = \frac{|AL|^2 + |BL|^2 - |AB|^2}{2} = -\frac{(n_0^2-1)}{4} = -C. \quad (34)$$

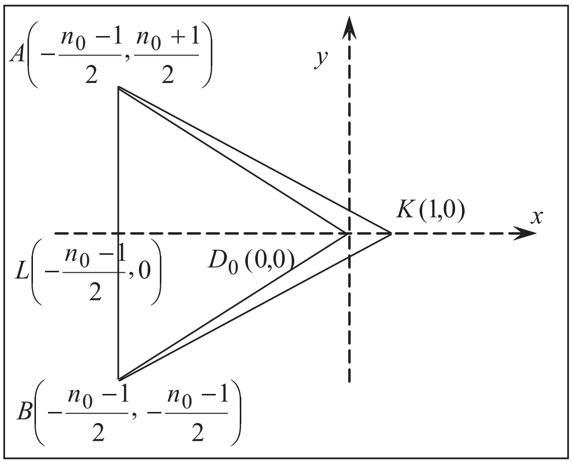

Рис. 3

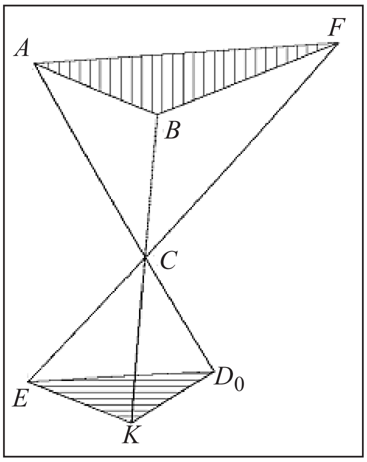

Рис. 4

Из (32) и (33) следует, что точки A и B отображаются на себя (остаются на месте), а точка L согласно (22) и (35) имеет вид

$$L = -C. \tag{35}$$

Сравнивая (30) и (35), получаем

$$C = -C \Rightarrow C = 0,$$

что невозможно, так как $0 \notin \mathfrak{R}(D_0)$. Поскольку данное допущение неверно, то теорема доказана.

Заметим, что предложенная теория ПДГ $\mathfrak{R}(D_0)$ отрицает также классическую аксиому параллельности. Действительно, вследствие формул площади треугольника (6), тангенсов (10)–(12) и условия $KC + D_0C + KD_0 = 0$ в системе (21) получаем, что $S_{\Delta KD_0C} = 0$, $\angle K = \angle D_0 = \angle C = 0$, и поэтому ΔKD_0C является треугольником Лобачевского с суммой углов, равной нулю. Отсюда следует отрицание указанной аксиомы в $\mathfrak{R}(D_0)$.

Полученные результаты одновременного отрицания в $\mathfrak{R}(D)$ двух классических аксиом порядка и параллельности создают новое мировоззрение относительно пространства и его свойств.

Для рассмотрения вопросов асимметрии ПДГ $\mathfrak{R}(D)$ важное значение имеет ДПГ $\mathcal{P}$, которая описывается системой (21), где особое место занимают определяющие точки E, F, системно связанные с двумя уравнениями

$$K^2 + D_0^2 + C^2 = E^2,$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = F^2. \tag{36}$$

Структура уравнений системы (36) разделяет семь точек $\{A, B, C, K, D_0, E, F\}$ на две четверки точек

$$\{D_0, K, E, C\}, \ \{A, B, F, C\},$$

образующие две тетраэдрические структуры с общей точкой C (рис. 4) и определяющими точками E, F, которые принадлежат ДПГ $\mathcal{P}$.

Поскольку простейшими элементами пространства $\mathfrak{R}(D)$ являются треугольники, то вопросы асимметрии $\mathfrak{R}(D)$ прежде всего следует связать именно с ними. Пусть тройка $(U, V, W) \in \mathfrak{R}(D)$ является некоторым треугольником с площадью S. Тогда согласно формулам (10)–(12) имеем

$$\operatorname{tg} \angle U = \frac{2S}{U}, \ \operatorname{tg} \angle V = \frac{2S}{V}, \ \operatorname{tg} \angle W = \frac{2S}{W}. \tag{37}$$

На основании известного тригонометрического тождества ввиду (37) имеем

$$\operatorname{tg} \angle U + \operatorname{tg} \angle V + \operatorname{tg} \angle W = \operatorname{tg} \angle U \cdot \operatorname{tg} \angle V \cdot \operatorname{tg} \angle W = \frac{8S^3}{UVW},$$

$$\angle U + \angle V + \angle W = \pi.$$

Величину $8S^3 / UVW$ назовем коэффициентом асимметрии ΔUVW и обозначим

$$\aleph = \frac{8S^3}{UVW}. \tag{38}$$

На рис. 4 заштрихованные треугольники EKD_0 и FAB принадлежат ДПГ $\mathcal{P}$ и обладают экстремальными свойствами, а именно $S_{\Delta EKD_0} = S_{\min}$, $S_{\Delta FAB} = S_{\max}$.

При любом фиксированном параметре n_0 $(n_0 = 1 - 2D_0)$ имеем

$$EK + ED_0 + KD_0 = 1, \tag{39}$$

$$FA + FB + AB = n_0^4. \tag{40}$$

Для справедливости этих равенств достаточно подставить значения D_0, K, E, F, A, B из (22) в уравнения (39), (40) и произвести необходимые преобразования.

Экстремальность указанных треугольников легко установить из соотношения $D_0 < K < C < E < B < A < F$.

На основании (38) коэффициенты асимметрии экстремальных треугольников EKD_0 и FAB выразятся формулами

$$\aleph_{\min} = \frac{8S_{\min}^3}{EKD_0}, \tag{41}$$

$$\aleph_{\max} = \frac{8S_{\max}^3}{FAB}. \tag{42}$$

В силу (6)

$$S_{\min} = \frac{1}{2}, \quad S_{\max} = \frac{n_0^2}{2}, \quad S_{\max} = n_0^2 S_{\min}, \quad n_0 = 1 - 2D_0. \tag{43}$$

Поскольку ΔEKD_0 — тупоугольный $(D_0 < 0)$, а ΔFAB — остроугольный, то

$$\aleph_{\min} < 0, \quad \aleph_{\max} > 0.$$

Исходя из вышеизложенного, в качестве коэффициента асимметрии пространства $\mathfrak{R}(D_0)$ при фиксированном $D_0 \le -2$ имеем разность

$$\theta = \aleph_{\max} - \aleph_{\min}. \tag{44}$$

На основании (22) нетрудно убедиться, что имеют место равенства

$$4C + 1 = n^2, \quad AB = (4C+1)C, \quad KD_0 = -C, \quad F = 3C + 1, \quad E = C + 1, \quad n = 1 - 2D_0. \tag{45}$$

Поэтому согласно (43) и (45) формулы (41), (42) и (44) примут вид

$$\aleph_{\min}(C) = -\frac{1}{C(C+1)}, \tag{46}$$

$$\aleph_{\max}(C) = \frac{(4C+1)^2}{C(3C+1)}, \tag{47}$$

$$\theta(C) = \frac{(4C+1)^2}{C(3C+1)} + \frac{1}{C(C+1)}. \tag{48}$$

Выполнив соответствующие преобразования в (48), получим окончательный вид формулы для величины асимметрии пространства $\mathfrak{R}(D_0)$ для любого $C = D_0^2 - D_0 \geq 6$

$$\theta(C) = \frac{16C^3 + 24C^2 + 12C + 2}{3C^3 + 4C^2 + C}.$$

Функция $\theta(C)$ дискретно определена на полуинтервале $[6, \infty)$ и реализует отображение

$$[6, \infty) \xrightarrow{\theta(C)} \left[\frac{2197}{399}, \frac{16}{3}\right). \qquad (49)$$

Так как на полуинтервале $[6, \infty)$ имеем $\theta'(C) < 0$, то согласно (49) коэффициент асимметрии $\theta(C)$ является монотонно убывающей функцией и при $n \to \infty$ $(C \to \infty)$ $\theta = \frac{16}{3} = 5,(3)$. Согласно (46) и (47) при $n \to \infty$ $(C \to \infty)$ $\aleph_{\min} \to 0$, $\aleph_{\max} \to 5,(3)$ и, следовательно, асимметрия для тупоугольного ΔEKD возрастает, а для остроугольного ΔFAB — убывает. Вычислив при $n \to \infty$ $(C \to \infty)$ предельные углы этих треугольников по формулам (10)–(12), получим, что $\angle E = \angle K = \angle D = 0$ (сумма углов равна нулю) в ΔEKD и $\angle F = \operatorname{arc\,tg} 4/3$, $\angle A = \angle F = \operatorname{arc\,tg} 2$ (сумма углов равна π) в ΔFAB.

В итоге приходим к выводу, что предельный ΔEKD является треугольником Лобачевского с взаимно параллельными сторонами, а предельный ΔFAB является евклидовым равнобедренным треугольником.

Другими словами, при $n \to \infty$ $(C \to \infty)$ ПДГ $\mathfrak{R}(D)$ приобретает симметрические свойства, в то время как при n-конечном (C-конечном) оно является асимметрическим. Детальное исследование этих вопросов является отдельной актуальной задачей.

В заключении статьи отметим другую важную особенность ПДГ $\mathfrak{R}(D)$, связанную с гипотезами В. Римана, изложенными в работе «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» [6], в которой он предположил, что возможны пространства, хотя и неограниченные, но конечные, и что прямая может иметь конечную длину. Истинность этой гипотезы нетрудно проверить на примере ПДГ $\mathfrak{R}(D)$ с помощью соотношений (17), (19), (20) и метрики (18). Таким образом, ПДГ $\mathfrak{R}(D)$ является примером пространства, удовлетворяющего гипотезам Римана.

Полученные результаты раскрывают новые неклассические возможности предложенного направления, связанные с проблемами пространства, геометрии и другими разделами математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grigoryan Yu.G. Axioms of inhomogeneous geometry, Proc. Conf. Comput. Sci. and Inform. Tech. — Yerevan, Armenia, 2003. — P. 130–134.
2. Grigoryan Yu.G. Principles of inhomogeneous geometry // J. Algebra, Geometry and their Appl., Seminar Proc. — 2004. — **3**, **4**. — С. 40–53.
3. Grigoryan Yu.G. Discrete geometries space, Proc. Conf. Comput. Sci. and Inform. Tech. — Yerevan, Armenia, 2005. — P. 132.
4. Григорьян Ю.Г. Пространство дискретных геометрий // Кибернетика и системный анализ, 2006. — № 5. — С. 22–32.
5. Григорьян Ю.Г. Геометрия арифметических графов // Кибернетика. — 1982. — № 5. — С. 1–4.
6. Риман В. О гипотезах, лежащих в основании геометрии, Сочинения / Пер. с нем. — М.-Л., 1948.

Поступила 06.02.2009