УДК 517.9

Э.Р. СМОЛЬЯКОВ

ПОДХОД К РАЗРЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ1

Ключевые слова: *конфликтные равновесия, игры и проблема единственности решения.*

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе для любых конфликтных задач (в частности, для любых игровых задач — антагонистических, некооперативных, кооперативных, статических и динамических) предлагается новое понятие равновесия, существенно расширяющее возможности нахождения единственного наисильнейшего равновесия (решения). Определено место этого равновесия в иерархическом ряду известных равновесий и на модельных статических и динамических задачах продемонстрирована его высокая эффективность с точки зрения разрешения проблемы единственности решения.

В теории конфликтных равновесий [1], располагающей обширной базовой системой понятий равновесия (в отличие от классической теории игр, не решавшей проблемы ни существования, ни единственности решения никаких игровых задач вследствие ограниченности возможностей классических понятий равновесия и недостаточности их числа [2–4]), доказано, что любые конфликтные задачи всегда имеют решение, причем в большинстве случаев (за исключением случаев какой-либо симметрии в задачах) оно должно быть единственным. Данная теория предоставила механизм нахождения решения в любых задачах. Однако проблема единственности (в отсутствие какой-либо симметрии в задаче) все же остается до конца не решенной, вероятно, потому, что до сих пор не найдена полная система базовых равновесий. Предлагаемое в работе новое понятие равновесия, дополняющее уже известные, что демонстрируется на примерах, оказывается весьма полезным при поиске единственного решения. Однако его нахождение в задачах более трудоемко, чем определение любых из известных равновесий. В связи с этим применять это равновесие на практике рекомендуется тогда, когда все известные типы равновесий найдены и с их помощью не удалось найти единственное наисильнейшее равновесие.

Демонстрация возможностей нахождения единственного наисильнейшего равновесия проводится как в отношении статических игровых задач, так и динамических (дифференциальных игр).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И БАЗОВАЯ СИСТЕМА РАВНОВЕСИЙ

Сформулируем в общем виде некоторые равновесия из базовой системы [1], без которых невозможно понять смысл и роль предлагаемого нового понятия $\underline{D}'$-равновесия, ограничившись, без потери общности, следующим допущением.

Допущение 1. Пусть Q_i, $i=\overline{1,N}$, — метрические пространства, G — компактное множество в их произведении $Q_1 \times \ldots \times Q_N$ и на множестве G определены непрерывные функции (функционалы) $J_i(q)$, $i=\overline{1,N}$, $q=q_1 \ldots q_N \in G$.

В каком бы виде ни ставилась конфликтная задача (например, как антагонистическая, некооперативная или кооперативная игра в статической или динамичес-

1 Работа выполнена по программе «Фундаментальные основы информационных технологий и систем» РАН, проект № 1-3.

кой постановке), предполагается, что любая коалиция P_k, составленная из произвольного числа k участников, выбирая стратегию (состояние) q_{P_k} из проекции $\Pr_{Q_{P_k}} G$ множества G на пространство Q_{P_k} или из доступного этой коалиции сечения $G(q_{P_{N-k}})$, где $q_{P_{N-k}}$ — произвольная стратегия остальных $(N-k)$ участников, всегда заинтересована в достижении максимума своей платежной функции $J_{P_k}(q) = \sum_{i \in P_k} J_i$.

Определение 1. Ситуацию $q^* = (q^*_{P_k}, q^*_{P_{N-k}}) \in G$ назовем коалиционно A_{P_k}-экстремальной для коалиции P_k, состоящей из k участников, если $G(q^*_{P_{N-k}}) = q^*_{P_k}$ или каждому состоянию $q_{P_k} \in G(q^*_{P_{N-k}}) \setminus q^*_{P_k}$ коалиции P_k можно поставить в соответствие по крайней мере одно состояние $\hat{q}_{P_{N-k}} \in G(q_{P_k})$ остальных $N-k$ участников, так, чтобы

$$J_{P_k}(q_{P_k}, \hat{q}_{P_{N-k}} < q_{P_k} >) \le J_{P_k}(q^*). \tag{1}$$

Ситуацию $q^* \in G$ назовем абсолютным (или полным [1]) A'-равновесием, если она коалиционно экстремальна для любой коалиции P_k, $1 \le k < N$. Множество всех коалиционно экстремальных для коалиции P_k ситуаций q^* обозначим A_{P_k}, причем множество всех абсолютных равновесий A' можно представить в виде $A' = \bigcap_{P_k} A_{P_k}$, $1 \le k \le N-1$.

Множество равновесий A' в задачах с тремя и более участниками часто оказывается пустым, поэтому на его основе невозможно создать какой-либо базовой системы конфликтных равновесий, обеспечивающей существование равновесия в любой задаче. Однако, как показано в [1], подобной основой может служить понятие A-равновесия [1], существующего (по крайней мере в любой ε-аппроксимации) в любых конфликтных задачах, независимо от класса используемых в них платежных функций и множеств, которое можно получить как частный случай определения 1.

Определение 1а. Точку (ситуацию) $q^* \in G$ назовем A_i-экстремальной, если любой стратегии $q_i \in G(q^{i*}) \setminus q_i^*$ i-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}^i \overset{\Delta}{=} \hat{q}^i(q_i) \in G(q_i)$ остальных игроков, так, чтобы имело место отношение

$$J_i(\hat{q}^i < q_i >, q_i) \le J_i(q^*), \tag{1a}$$

а ситуацию $q^* \in \bigcap_{i=1}^N = A$ назовем A-равновесием [1].

Определение 2. Ситуацию $q^* \in A_{P_k}$, где под индексом P_k подразумевается любая конкретная коалиция из k участников, назовем B_{P_k}-экстремальной, если для этой конкретной коалиции выполняется равенство

$$\max_{q_{P_{N-k}} \in A_{P_k}(q^*_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q^*_{P_k}, q_{P_{N-k}}) = J_{P_{N-k}}(q^*); \tag{2}$$

назовем эту ситуацию B_{P_k}-равновесием, если она удовлетворяет всем возможным c_N^k равенствам (2), отвечающим числу всех возможных коалиций, которые можно составить из k участников. Следовательно, множество всех B_{P_k}-равновесий представляет собой пересечение всех множеств ситуаций, удовлетворяющих c_N^k равенствам (2), которые в совокупности можно рассматривать как некоторое «векторное» равенство.

Определение 3. Ситуацию $q^* \in B_{P_k}$ назовем $\overline{D}_{P_k}$-экстремальной, где под индексом P_k подразумевается любая конкретная коалиция из k участников, если для этой конкретной коалиции выполняется равенство

$$\max_{q\in B_{P_k}} J_{P_k}(q) = J_{P_k}(q^*) \tag{3}$$

или, что то же самое (с учетом (2)), равенство

$$\overline{D}_{P_k} = \mathrm{Arg}\max_{q_{P_k}\in \mathrm{Pr}_{Q_{P_k}} A_{P_k}} J_{P_k}(\mathrm{Arg}\max_{q_{P_{N-k}}\in A_{P_k}(q_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q)), \tag{3а}$$

и назовем эту ситуацию $\overline{D}_{P_k}$-равновесием, если она удовлетворяет всем возможным c_N^k равенствам (3) или (3а), которые можно рассматривать как векторные равенства.

Определение 4. Ситуацию $q^* \in A_{P_k}$ назовем C_{P_k}-равновесием, если «векторное» равенство

$$\max_{q_{P_{N-k}}\in G(q^*_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q^*_{P_k}, q_{P_{N-k}}) = J_{P_{N-k}}(q^*) \tag{4}$$

выполняется для каждой конкретной коалиции P_k, представляя собой систему из c_N^k равенств. Следовательно, множество C_{P_k}-равновесных ситуаций задается пересечением всех тех множеств ситуаций, которые удовлетворяют указанным c_N^k равенствам (при выполнении требования $(q^* \in A_{P_k})$, векторно задаваемым равенством (4).

Определение 5. Ситуацию $q^* \in C_{P_k}$ назовем D_{P_k}-равновесием, если она удовлетворяет «векторному» равенству

$$\max_{q\in C_{P_k}} J_{P_k}(q) = J_{P_k}(q^*), \tag{5}$$

представляющему собой c_N^k равенств, одновременное удовлетворение которых означает, что множество ситуаций D_{P_k} может быть найдено как результат пересечения всех множеств ситуаций, удовлетворяющих этим c_N^k равенствам.

Определение 6. Ситуацию $q^* \in A$ назовем B'_{P_k}-равновесием, если она удовлетворяет «векторному» равенству

$$\max_{q_{P_{N-k}}\in A'_{P_k}(q^*_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q^*_{P_k}, q_{P_{N-k}}) = J_{P_{N-k}}(q^*), \tag{6}$$

где под A'_{P_k} подразумевается пересечение всех c_N^k множеств вида A_{P_k}, отвечающих каждой конкретной коалиции из k участников.

Определение 7. Ситуацию $q^* \in B'_{P_k}$ назовем D'_{P_k}-равновесием, если она удовлетворяет «векторному» равенству

$$\max_{q\in B'_{P_k}} J_{P_k}(q) = J_{P_k}(q^*). \tag{7}$$

Определение 8. Ситуацию $q^* \in A$ назовем $\overline{C}^{\,0}$-равновесием, если

$$J_k(q^*) = \max_{q_k\in A(q^{k*})} J_i(q^{k*}, q_k), \; k = \overline{1, N}, \tag{8}$$

гäå $q^k = (q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_N)$.

Заметим, что ситуация $q^* \in G$ называется равновесной по Нэшу [2] (или, короче, $\overline{C}$-равновесием), если в определении 8 множество A заменить множеством G.

Определение 9. Ситуацию $q^* \in A_{P_k}$ назовем $\overline{D}'_{P_k}$-равновесием, если она удовлетворяет векторному равенству

$$\overline{D}'_{P_k} = \operatorname{Arg} \max_{q_{P_k} \in A_{P_k}(q^*_{P_{N-k}})} J_{P_k} (\operatorname{Arg} \max_{q_{P_{N-k}} \in A_{P_k}(q_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q)), \tag{9}$$

представляющему собой c_N^k одновременно удовлетворяющихся равенств.

Определение 9а. Ситуацию $q^* \in A_k$ назовем $\overline{D}'_k$-экстремальной, если

$$\overline{D}'_k = \operatorname{Arg} \max_{q_k \in A_k(q^{k*})} J_k (\operatorname{Arg} \max_{q^k \in A_k(q_k)} J^k(q)), \; k = 1, 2, \ldots, N. \tag{9a}$$

Назовем ситуацию q^* базовым $\overline{D}'$-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{k=1}^{N} \overline{D}'_k$.

Заметим также, что базовая система A-, B'-, B-, C-, D'-, $\overline{D}$-, D-равновесий из [1] получается в качестве частного случая из определений 1–7, если в них рассматривать только коалиции P_1, состоящие из одного участника. Следовательно, базовые равновесия строятся на основе определений (1)–(7) точно так же, как определение 1а образовано из определения 1. Отметим, что дальнейшее расширение базовой системы равновесий [1] получено в работах [5–8].

СТАТИЧЕСКИЕ ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ

Поскольку в самом определении $\overline{D}'$-равновесие (9) содержит элементы определения $\overline{D}$-равновесия, выясним отношения между этими равновесиями. Чтобы не усложнять доказательство следующей теоремы несущественными обстоятельствами, связь между этими равновесиями устанавливается только для случая базовых $\overline{D}$- и $\overline{D}'$-равновесий.

Теорема 1. Базовое $\overline{D}'$-равновесие содержит в себе базовое $\overline{D}$-равновесие.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из самих определений $\overline{D}$- и $\overline{D}'$-равновесий следует, что они, когда существуют, содержатся во множестве A, поскольку $\overline{D}$- и $\overline{D}'$-равновесные ситуации определяются в конечном итоге на пересечении множеств A_i, т.е. на A.

Покажем, что $\overline{D}' \supset \overline{D}$. В случае рассмотрения только базовых равновесий аргумент функционала J_k в (3а) и (9а) одинаков. Однако в случае базового $\overline{D}$-равновесия множество $\operatorname{Pr}_{Q_k} A_k$ значений аргумента функционала J_k в (3а) включает в себя множество $A_k(q^{k*})$ значений аргумента J_k в (9а). Отсюда следует $\overline{D}' \supset \overline{D}$. В самом деле, пусть q^* — $\overline{D}$-равновесная ситуация. Это означает, что в точке q_k^* функционал J_k, согласно (3а), достигает максимума на множестве $\operatorname{Pr}_{Q_k} A_k$. Если учесть, что сечение $A_k(q^{k*})$ множества A_k в точке $q^* = (q_k^*, q^{k*})$ представляет собой подмножество множества $\operatorname{Pr}_{Q_k} A_k$; $\max J_k$ на этом последнем множестве достигается, согласно (3а), в точке q_k^*, и если рассматривать точку (q_k^*, q^{k*}) не на множестве $\operatorname{Pr}_{Q_k} A_k$, а на его подмножестве $A_k(q^{k*})$, то на этом подмножестве она также обеспечивает максимум функционалу J_k. Это означает, согласно (9а), что ситуация (q_k^*, q^{k*}) является также и $\overline{D}'$-равновесием. □

Учитывая, что A-равновесие (по крайней мере, в ε-аппроксимации) существует в любой задаче [1] и любая ситуация из множества $G \setminus A$ всегда может быть улучшена для себя хотя бы одним участником, вполне естественно пренебречь этим несущественным множеством и заново исследовать игру, определяя в ней равновесия типа (1)–(8) и любые другие, принимая за исходное игровое множество уже не множество G, а множество A, и называя найденные на нем равновесия равновесиями 1-й итерации. Затем на множестве A^1, как на исходном игровом множестве, можно поставить вторую вспомогательную задачу, и т.д. Вследствие того что любое множество A^k никогда не бывает пустым (в ε-аппроксимации), эта итерационная схема позволяет в любой конфликтной задаче найти наисильнейшее равновесие, которое благодаря новому понятию $\overline{D}'$-равновесия почти всегда оказывается единственным. Смысл подобного итерационного подхода к решению задачи в том, что на каждой следующей итерации те равновесия, которые были пустыми на предыдущей итерации, могут оказаться не пустыми и тем самым позволят выявить наисильнейшее равновесие. Это связано с тем, что, например, в задачах с двумя участниками на каждой следующей $(k+1)$-й итерации все типы равновесий, усиливающие A^k-равновесие, становятся более слабыми (т.е. более многочисленными), в то время как A^{k+1}-равновесия усиливаются (множество A^{k+1} не может быть больше множества A^k). В задачах с числом участников больше двух эти связи между равновесиями на разных итерациях могут нарушаться для сильных равновесий некоторых типов (см. теорему 2), что, однако, случается весьма редко.

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы 3.1.4 из [1] в рамках предпринятого в данной работе расширения множества понятий конфликтного равновесия.

Теорема 2. В любой конфликтной задаче на основе базовой системы конфликтных равновесий имеется возможность итерационно строить новые равновесия. После того как найдены все базовые равновесия (решение «нулевой итерации»), задача решается заново, но не на множестве G, а на множестве A, что позволяет найти еще одну систему равновесий («первой итерации»), и т.д. В результате находятся последовательности из равновесий $A^k, \overline{C}^k, B'^k, B^k, D^k, D'^k, \overline{D}^k$, $k=0,1,2,\ldots$, причем итерации A^k и $\overline{C}^k$ из базовых равновесий A и $\overline{C}^0$ образуют замкнутые кольца из попарно вложенных одно в другое равновесий; и всегда $A^{k-1} \supseteq A^k$, т.е. с увеличением индекса k множества A^k сужаются (усиливаются), а последовательные итерации равновесия по Нэшу на множествах A^k расширяются (ослабляются), т.е. $\overline{C}^{k-1} \subseteq \overline{C}^k$, $k=1,2,3,\ldots$. Итерации равновесий (3)–(8), как правило, ослабляются, хотя в отдельных случаях могут и усиливаться (только в задачах с двумя участниками всегда ослабляются все типы равновесий, усиливающие A-равновесия). В любых задачах выполняются следующие связи между равновесиями:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & G & \supseteq & \overline{C} \\
 & & & & \cup & & \cap \\
\left.\begin{array}{rcl} D \subseteq & C & \subseteq \\ & \overline{D} & \subseteq \\ \overline{D} \subseteq & \overline{D}' & \subseteq \end{array}\right| & \left.\begin{array}{l} \subseteq B \subseteq \\ ;\, D' \subseteq \end{array}\right| & \subseteq B' \subseteq & & A & \supseteq & \overline{C}^0 \\
 & & & & \cup & & \cap \\
\left.\begin{array}{rcl} D^1 \subseteq & C^1 & \subseteq \\ & \overline{D}^1 & \subseteq \\ \overline{D}^1 \subseteq & \overline{D}'^1 & \subseteq \end{array}\right| & \left.\begin{array}{l} \subseteq B^1 \subseteq \\ ;\, D'^1 \subseteq \end{array}\right| & \subseteq B'^1 \subseteq & & A^1 & \supseteq & \overline{C}^1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Замечание. В задачах с двумя участниками кольцевая структура равновесий оказывается существенно более богатой за счет того, что на каждой следующей итерации всегда расширяется не только $\overline{C}^0$-равновесие, совпадающее с B'-равновесием, но и другие типы равновесий. Вследствие этого все равновесия типов B^k, C^k, D^k, D'^k, $\overline{D}^k$, $k=1,2,\ldots$, содержатся во множестве A^∞. Поиск наисильнейшего равновесия можно начать с того, что сначала найти предельное множество A^k, а затем на нем искать наисильнейшее равновесие, что значительно проще, чем проводить поиск на исходном множестве A. В общем случае поиск наисильнейшего равновесия в задачах с любым числом участников существенно упрощается именно из-за того, что на каждой следующей итерации слабейшие из равновесий (типа A^k) усиливаются (множества A^k сужаются), а остальные, более сильные, типы равновесий почти всегда ослабляются (множества B', B, C, D, D', $\overline{D}$ почти всегда расширяются). Если какие-либо из типов равновесия были пустыми на предыдущей итерации, то на следующей они могут оказаться не пустыми.

В приведенных далее примерах все известные сильные равновесия оказываются пустыми, и только новое понятие $\overline{D}'$-равновесия позволяет найти единственное наисильнейшее равновесие.

Пример 1. Рассмотрим конфликтную (игровую) задачу с двумя участниками, в которой найти наисильнейшее равновесие помогает предлагаемое $\overline{D}'$-равновесие. Пусть каждый из игроков максимизирует свою (матричную) платежную функцию

$$J_1(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 8 & \cdot & 10 & 6 \\ 1 & 4 & 12 & \cdot \\ \cdot & 7 & 2 & 9 \\ 3 & 11 & \cdot & 5 \end{bmatrix}, \; J_2(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 5 & \cdot & 2 & 9 \\ 11 & 12 & 7 & \cdot \\ \cdot & 1 & 10 & 4 \\ 8 & 6 & \cdot & 3 \end{bmatrix}.$$

Оба игрока располагают четырьмя стратегиями: первый игрок выбирает одну из четырех строк, а второй — один из четырех столбцов. Игровое множество G в этой задаче состоит из тех 12 ситуаций a_{ij} в приведенных матрицах, в элементах которых вписаны значения платежных функций. Найдем наиболее сильное (из существующих в этой игровой задаче) равновесие, причем сначала найдем матрицы A_1, A_2, A:

$$A_1 = \begin{bmatrix} + & \cdot & + & + \\ \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ + & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & + \\ + & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Находим далее базовые равновесия:

$$B_1' = B_1 = (a_{14}, a_{22}, a_{34}, a_{42}), \; B_2' = B_2 = (a_{11}, a_{23}, a_{34}, a_{42}),$$

$$B' = B = (a_{34}, a_{42}),$$

$$C_1 = (a_{14}, a_{22}), \; C_2 = (a_{11}, a_{23}, a_{34}, a_{42}), \; C = \varnothing,$$

$$D_1' = \overline{D}_1 = a_{42}, \; D_2' = \overline{D}_2 = a_{23}, \; D' = \overline{D} = D = \varnothing, \; \overline{D}' = a_{42}.$$

Таким образом, предварительно в качестве наисильнейшего равновесия отметим ситуацию a_{42}, найти которую удалось только с помощью нового понятия $\overline{D}'$-равновесия. Для подтверждения полученного результата определим также все равновесия 1-й итерации, используя теорему 2, т.е. рассматривая вспомогательную игру на множестве A с платежными функциями

$$J_1^1(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 8 & \cdot & \cdot & 6 \\ \cdot & 4 & 12 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 9 \\ \cdot & 11 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \; J_2^1(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot & 9 \\ \cdot & 12 & 7 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 \\ \cdot & 6 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Наислабейшее A^1-равновесие во вспомогательной игре задается матрицами

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix},\ A_2^1 = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix},\ A^1 = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

а базовые равновесия 1-й итерации имеют вид

$$B_1'^1 = B_1^1 = B_2'^1 = B_2^1 = (a_{11}, a_{23}, a_{34}, a_{42}) = B'^1 = B^1,$$

$$C_1^1 = (a_{34}, a_{42}),\ C_2^1 = (a_{11}, a_{23}, a_{34}, a_{42}),\ C^1 = (a_{23}, a_{42}),$$

$$D_1'^1 = \overline{D}_1^1 = D_2'^1 = \overline{D}_2^1 = a_{23} = D'^1 = \overline{D},$$

$$D_1^1 = a_{42},\ D_2^1 = a_{23},\ D^1 = \varnothing,$$

$$\overline{D}'^1 = (a_{23}, a_{42}).$$

Итак, поскольку согласно теореме 2 и замечанию равновесие $\overline{D}' = a_{42}$ сильнее равновесия $\overline{D}'^1 = (a_{23}, a_{42})$, ситуация a_{42} является немного более сильным равновесием, чем ситуация a_{23}. Все остальные ситуации оказываются существенно более слабыми. И хотя ситуация a_{23}, в отличие от ситуации a_{42}, оказалась еще и D'^1-, и $\overline{D}^1$-равновесной, это не делает ее стратегически более сильным равновесием, чем ситуация a_{42}, поскольку на нулевой итерации ситуация a_{23} не являлась ни D'-, ни $\overline{D}$-, ни $\overline{D}'$-равновесной. Таким образом, со стратегической точки зрения (т.е. с позиций взаимных угроз) ситуация a_{42} немного сильнее ситуации a_{23}.

Заметим, что даже тот факт, что в ситуации a_{23} оба участника получают выигрыши бóльшие, чем в ситуации a_{42}, со стратегической точки зрения не дает этой ситуации преимуществ перед последней. Поскольку обе эти ситуации почти эквивалентны, считаться с ними необходимо почти как с равными. Это становится особенно важным при рассмотрении игры как кооперативной, в которой игроки, скооперировавшись, заинтересованы выбрать ситуацию a_{23}, в которой они получают максимальный кооперативный доход в размере 19. Однако тот факт, что кооперативный доход оказался в данном случае именно в ситуации a_{23}, не дает этой ситуации никакого преимущества перед ситуацией a_{42}. Справедливый дележ кооперативного дохода не зависит от того, в какой ситуации он реализуется, а рассчитывается только в зависимости от наисильнейших (наисильнейшей) равновесных ситуаций, каковыми в данном случае оказались почти одинаково равновесные ситуации a_{42} и a_{23}. Справедливый дележ кооперативного дохода в рассматриваемой игре задается (согласно теореме 2 из [8]) формулами: $x_1 = 19(11+12)/36 \approx 12{,}14$, $x_2 = 19(6+7)/36 \approx 6{,}86$.

Отметим также, что выполнение 2-й и последующих итераций в этой задаче не имеет смысла, так как каждый элемент матрицы A^1 является единственным элементом в соответствующих ему строке и столбце (это означает, что матрица A^1 играет роль предельной матрицы A^∞).

Рассмотрим еще одну игру с двумя участниками, в которой найти наисильнейшее равновесие (решение) помогает предложенное $\overline{D}'$-равновесие.

Пример 2. Пусть каждый из игроков максимизирует свою (матричную) платежную функцию

$$J_1(q_1,q_2)=\begin{bmatrix}10 & 8 & 2 & 4\\ 11 & \cdot & 3 & \cdot\\ 1 & \cdot & 7 & \cdot\\ 5 & 9 & 12 & 6\end{bmatrix},\ J_2(q_1,q_2)=\begin{bmatrix}12 & 8 & 5 & 9\\ 6 & \cdot & 11 & \cdot\\ 4 & \cdot & 2 & \cdot\\ 10 & 3 & 1 & 7\end{bmatrix}.$$

Найдем наиболее сильное (из существующих в этой конфликтной задаче) равновесие, причем сначала найдем матрицы A_1, A_2, A:

$$A_1=\begin{bmatrix}+ & + & \cdot & \cdot\\ + & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & + & \cdot\\ + & + & + & +\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}+ & + & \cdot & +\\ + & \cdot & \cdot & \cdot\\ + & \cdot & \cdot & +\\ + & \cdot & \cdot & +\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}+ & + & \cdot & \cdot\\ + & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ + & \cdot & \cdot & +\end{bmatrix}.$$

Находим далее базовые равновесия (2)–(9а):

$$B_1'=(a_{11},a_{21},a_{41}),\ B_2'=(a_{12},a_{21},a_{44}),\ B'=a_{21},$$

$$B_1=(a_{11},a_{21},a_{33},a_{41}),\ B_2=(a_{12},a_{21},a_{23},a_{44}),\ B=a_{21},$$

$$C_1=(a_{11},a_{41}),\ C_2=(a_{21},a_{44}),\ C=\varnothing,$$

$$D_1'=a_{21},\ D_2'=a_{12},\ D'=\varnothing,\ \overline{D}_1=a_{21},\ \overline{D}_2=a_{23},\ \overline{D}=\varnothing,$$

$$D_1=a_{11},\ D_2=a_{44},\ D=\varnothing,\ \overline{D}'=\varnothing.$$

Отсюда следует, что все сильные равновесия D, D', $\overline{D}$, и даже новое $\overline{D}'$, оказались пустыми, а непустой является только относительно слабая B-равновесная ситуация a_{21}. Дальнейший поиск наисильнейшего равновесия проведем с помощью итераций (используя теорему 2).

Найдем все равновесия 1-й итерации, рассматривая вспомогательную игру только на множестве A, т.е. как игру с платежными функциями

$$J_1^1(q_1,q_2)=\begin{bmatrix}10 & 8 & \cdot & \cdot\\ 11 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 5 & \cdot & \cdot & 6\end{bmatrix},\ J_2^1(q_1,q_2)=\begin{bmatrix}12 & 8 & \cdot & \cdot\\ 6 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 10 & \cdot & \cdot & 7\end{bmatrix}.$$

Наислабейшее A^1-равновесие в этой вспомогательной игре задается матрицами

$$A_1^1=\begin{bmatrix}\cdot & + & \cdot & \cdot\\ + & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & +\end{bmatrix},\ A_2^1=\begin{bmatrix}+ & + & \cdot & \cdot\\ + & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ + & \cdot & \cdot & +\end{bmatrix},\ A^1=\begin{bmatrix}\cdot & + & \cdot & \cdot\\ + & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & +\end{bmatrix},$$

а базовые равновесия (2)–(8) 1-й итерации имеют вид

$$B_1'^1=B_2'^1=B'^1=B_1^1=B_2^1=B^1=(a_{12},a_{21},a_{44}),$$

$$C_1^1=a_{21},\ C_2^1=(a_{12},a_{21},a_{44}),\ C^1=a_{21},$$

$$D_1'^1=\overline{D}_1^1=a_{21},\ D_2'^1=\overline{D}_2^1=a_{12},\ D'^1=\overline{D}^1=\varnothing,$$

$$D_1^1=a_{21},\ D_2^1=a_{12},\ D^1=\varnothing,\ \overline{D}'^1=(a_{21},a_{44}).$$

Из найденных во вспомогательной задаче (на 1-й итерации) двух $\overline{D}'^1$-равновесных ситуаций (a_{21}, a_{44}) выделяется одно наиболее сильное равновесие a_{21}, так как только оно является одновременно B- и C^1-равновесным.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Ļóńņü *i*-é čćšīź, $i = 1, 2$, āūįčšą˙ ńģåųąķķóž ńņšąņåćčž $q_i(u_i, t)$, ńņšåģčņń˙ ļīėó÷čņü ģąźńčģóģ ōóķźöčīķąėą

$$\mathrm{J_i(q) = \int_T dt \int\int_{W(t)} f_0^i(u, x, t) dq_1 dq_2, \ \ i = 1, 2,} \tag{10}$$

ļšč īćšąķč÷åķč˙õ:

$$\dot{x} = \int\int_{W(t)} f(u, x, t) dq_1 dq_2, \tag{11}$$

$$x_j(t_0) = x_j^0, \ \ j = \overline{1, n}, \ \ x_k(t_1) = x_k^1, \ \ k \in K \subset \overline{1, n}, \tag{12}$$

$$(u_1, u_2, t) \in W \subset E_1 \times E_2 \times T. \tag{13}$$

Примем следующие обозначения: $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$; E_i, $i = 1, 2$, — конечномерные пространства; W — компактное множество в $E_1 \times E_2 \times T$, $W(t)$ — сечение множества W в момент $t \in T = [t_0, t_1]$; K — подмножество множества индексов $\{\overline{1, n}\}$; $U_i \overset{\Delta}{=} \mathrm{Pr}_{E_i} W$ — проекция множества W на E_i; $E \overset{\Delta}{=} E_1 \times E_2$; Q_i — множество смешанных стратегий $q_i(u_i, t)$ i-го участника в задаче (10), (11) с начальным условием $x(t_0) = x^0$ и заменой множества W некоторым компактным множеством $U_1 \times U_2$ (множество Q_i согласно теоремам 4.2.1 и 4.2.6 из [9] — выпуклый компакт в $*$-слабой топологии пространства $L_1^*(T, C(U_i))$); $P_{q_i}(t)$ — носитель меры $q_i(\cdot, t)$ в момент $t \in T$, т.е. такое наименьшее замкнутое множество в U_i, дополнение которого имеет $q_i(\cdot, t)$-меру нуль.

Допущение 2. Пусть $T = [t_0, t_1]$ — ограниченный фиксированный отрезок вещественной оси E^1; множество W — компакт в $E_1 \times E_2 \times T$; отображение $\hat{f} = (f_0^1, f_0^2, f_1, \dots, f_n): U \times E^n \times T \to E^{n+2}$ таково, что функция $\hat{f}(u, x, \cdot)$ измерима (по Лебегу) при всех $u \in U$, $x \in E^n$, а функция $\hat{f}(\cdot, \cdot, t)$ при каждом $t \in T$ непрерывно дифференцируема; функция $|\hat{f}|$ мажорируется на T функцией $s(t)(|x| + 1)$, где $s(t)$ — некоторая интегрируемая функция; $x(t): T \to E^n$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (11); кроме того, функция $\hat{f}$ удовлетворяет с интегрируемой функцией $b(t)$ условию Липшица

$$|\hat{f}(u, \bar{x}, t) - \hat{f}(u, x, t)| \le b(t) |\bar{x} - x|$$

для всех $u \in U$, $\bar{x}, x \in E^n$, $t \in T$.

Пусть G — подмножество компактного множества $Q_1 \times Q_2$, образованное только такими стратегиями q_i, которые позволяют обеспечить удовлетворение ограничений (12), (13), причем ограничения (12) вводят в задачу (10)–(13) неявную зависимость между стратегиями, а ограничения (13) — явную, в связи с тем, что почти (в смысле меры Лебега) в каждый момент $t \in T$ меры $q_i(\cdot, t)$ могут быть выбраны лишь так, чтобы прямое произведение $P_{q_1 q_2}(t)$ их носителей $P_{q_1}(t)$ и $P_{q_2}(t)$ оказывалось во множестве $W(t)$. Только такие меры считаются допустимыми. Таким образом, множество G — множество только таких пар мер $q_1(\cdot, t)$ и

$q_2(\cdot, t)$, произведение носителей которых в каждый момент $t \in T$ лежит в $W(t)$, т.е. $P_{q_1}(t) \times P_{q_2}(t) \subset W(t)$; $\mathrm{Pr}_{Q_i} G$ — проекция множества G на пространство Q_i.

Заметим, что для динамических задач, в отличие от статических, более плодотворным, чем понятие *A*-равновесия, оказывается незначительное его сужение, порождаемое динамикой, которое названо A^c-равновесием [1, с. 202].

Определение 10. Ситуацию $q^* \in Q$ назовем A_i^c-экстремальной, если при заданной стратегии $q_k^*(t)$ допустимой оказывается только одна стратегия $q_i^*(t)$ или если каждой допустимой стратегии $q_i \in Q(q_k^*) \setminus q_i^*$ *i*-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}_k = \hat{q}_k < q_i >$ другого игрока, так, чтобы имело место отношение

$$J_i(\hat{q}_k, q_i) \le J_i(q^*)$$

при условии, что ненулевое (в смысле Лебега) множество в *T*, на котором $\hat{q}_k(t) \ne q_k^*$, является подмножеством множества из *T*, на котором $q_i(t) \ne q_i^*(t)$. Множество всех A_i^c-экстремальных ситуаций обозначим A_i^c, а ситуации $q^* \in$ $\in A_1 \bigcap A_2 \overset{\Delta}{=} A^c$ назовем A^c-равновесными.

Для дифференциальных игр понятие A^c-равновесия гораздо плодотворнее понятия *A*-равновесия, поскольку в отношении первого получены необходимые условия равновесности (теорема 5.3.1 из [1]), аналогичные необходимым условиям оптимальности для вариационных задач, что позволяет искать всевозможные равновесия в дифференциальных играх, опираясь на предварительно найденные равновесия во вспомогательных «локальных» задачах. Эти задачи являются уже не динамическими, а статическими, которые существенно проще исходной дифференциальной игры. «Локальные» задачи представляют собой игровые задачи с платежными функциями, роль которых исполняют гамильтонианы из необходимых условий оптимальности A^c-равновесия.

Рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру, в которой предлагаемое новое $\overline{D}'$-равновесие позволяет выделить наисильнейшие равновесия.

Пример 3. Пусть первый игрок, выбирая управляющую переменную $u_1(t)$, максимизирует, а второй, выбирая управляющую переменную $u_2(t)$, минимизирует функционал

$$J = \int_0^1 x\, dt \tag{14}$$

при ограничениях:

$$\dot{x} = \frac{u_2}{u_1}, \; x(0) = 0, \; t \in [0; 1], \tag{15}$$

$$W = \{(u_1, u_2): |u_1 + u_2| \le 1, \; |u_2 - u_1| \le 1, |u_1| \ge a, |u_2| \ge a, 0 < a < 1/2\}. \tag{16}$$

Используя необходимые условия существования слабых равновесий из теоремы 5.2.4 [1], гамильтониан задачи (14)–(16) в чистых стратегиях $(u_1(t), u_2(t))$ запишем в виде $H = x + p_1 u_2 / u_1$ и из уравнения (5.3.4) теоремы 5.3.1 [1] получим

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x}, \; p(1) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим множитель Лагранжа $p_1 : p_1(t) = 1 - t$. Поскольку $p_1(t) \ge 0$ при всех $t \in [0, 1] = T$, в качестве платежной функции в «локальной» игре в каждый момент *t* можно рассматривать одну и ту же функцию $f = u_2 / u_1$, определенную на множестве *W*.

Найдем базовую систему равновесий [1] в «локальной» задаче (рис. 1):

$$A_1 = EKME \bigcap GRTG \bigcup UW \bigcup NQ,$$

$$A_2 = HUWH \bigcap FNQF \bigcup GRSG \bigcup EKLE,$$

$$A = A_1 \bigcap A_2 = EKLE \bigcup GRSG \bigcup NQ \bigcup UW,$$

$$B_1 = NQ \bigcup UW,\ B_2 = GS \bigcup EL \bigcup [NP) \bigcup [UV),\ B = [NP) \bigcup [UV),$$

$$C_1 = NQ \bigcup UW,\ C_2 = E \bigcup G,\ C = \varnothing,$$

$$D_1 = Q \bigcup W,\ D_2 = E \bigcup G,\ D = \varnothing,$$

$$D_1' = \overline{D}_1 = Q \bigcup W,\ D_2' = \overline{D}_2 = N \bigcup U,\ D' = \overline{D} = \varnothing,$$

$$\overline{D}' = [NP) \bigcup [UV).$$

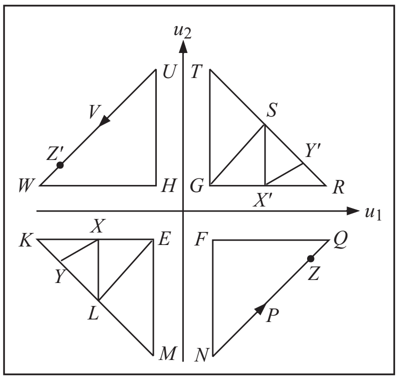

Рис. 1

Наиболее сильным из известных базовых равновесий оказалось равновесие $B = [NP) \bigcup [UV)$, представляющее собой довольно широкое множество, в каждой точке которого значения платежного функционала различны. Из более сильных равновесий непустым оказалось только предлагаемое новое $\overline{D}'$-равновесие, совпавшее в данной задаче с B-равновесием и показавшее, что множество $[NP) \bigcup [UV)$ является, по существу, не только слабым B-равновесием, но и весьма сильным $\overline{D}'$-равновесием. Однако $\overline{D}'$-равновесие все же недостаточно сильное, чтобы выделить из множества B-равновесий если не пару симметричных точек, то хотя бы некоторое подмножество. Это указывает на то, что даже с включением $\overline{D}'$-равновесия в уже известную базовую систему равновесий она все еще не вполне полная и необходим поиск новых понятий конфликтного равновесия. Подтвердить этот вывод позволяет рассмотрение следующих итераций с использованием теоремы 2.

Найдем равновесия на 1-й итерации исходной игры, приняв множество A за игровое множество во вспомогательной игре (т.е. исключив из рассмотрения не представляющее интереса для игроков множество $G \setminus A$). Получаем:

$$A_1^1 = A,\ A_2^1 = KLXK \bigcup RSX'R \bigcup NQ \bigcup UW,\ A^1 = A_2^1,$$

$$B_1^1 = NQ \bigcup UW,\ B_2^1 = LX \bigcup SX' \bigcup [NP) \bigcup [UV),$$

$$B^1 = [NP) \bigcup [UV),$$

$$C_1^1 = NQ \bigcup UW,\ C_2^1 = [NP) \bigcup [UV) \bigcup S \bigcup L,$$

$$C^1 = [NP) \bigcup [UV) = B,$$

$$D_1^1 = \overline{D}_1^1 = Q \bigcup W,\ D_2^1 = \overline{D}_2^1 = U \bigcup N,\ D^1 = \overline{D}^1 = \varnothing,$$

$$\overline{D}'^1 = [NP) \bigcup [UV).$$

Первое ослабление пустого множества C-равновесий, т.е. множество C^1, теперь не пустое (что предполагалось при использовании 1-й итерации). Однако множество C^1, совпавшее с множеством B, не позволило его сузить, а лишь указало на то, что множество ситуаций $[NP) \bigcup [UV)$ является не только B-равновесием, но и несколько более сильным C^1-равновесием. Более сильные равновесия $(D'^1, \overline{D}^1, D^1)$, несмотря на их ослабление на этой итерации по сравнению с «нулевой» итерацией, снова оказались пустыми, причем множество $\overline{D}'^1$ на 1-й итерации тоже не расширилось и совпало со множеством $\overline{D}'$.

Найдем равновесия 2-й итерации, принимая множество A^1 за исходное игровое:

$$A_1^2 = A^1,\ A_2^2 = XKYX \bigcup RY'X'R \bigcup UW \bigcup NQ,$$

$$A^2 = A_2^2,\ B_1^2 = NQ \bigcup UW,$$

$$\mathrm{B}_2^2 = \mathrm{XY} \bigcup \mathrm{X'Y'} \bigcup [\mathrm{NZ}) \bigcup [\mathrm{U'Z'}),\ \mathrm{B}^2 = [\mathrm{NZ}) \bigcup [\mathrm{UZ'}),$$

$$C_1^2 = NQ \bigcup UW,\ C_2^2 = XY \bigcup X'Y' \bigcup [NZ) \bigcup [UZ'),$$

$$C^2 = NZ \bigcup UZ',\ D^2 = \overline{D}^2 = \varnothing,\ \ldots$$

Легко видеть, что бесконечная последовательность итераций сходится к множеству $B^\infty = C^\infty = \overline{D}'^\infty = [NQ) \bigcup [UW)$, причем множество наисильнейших равновесных ситуаций $[NP) \bigcup [UV)$ задается наисильнейшим непустым равновесием на минимальной итерации (т.е. в данной задаче — $\overline{D}'$-равновесием). Тот факт, что сузить множество $[NP) \bigcup [UV)$ наисильнейших равновесий не удалось, говорит о том, что даже с учетом нового понятия равновесия базовая система равновесий остается неполной и необходим поиск новых понятий равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. — М.: Едиториал УРСС, 2005. — 304 с.
2. Nash J. Non-cooperative games // Ann. Math. — 1951. — 54, N 2. — P. 286–295.
3. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Наука, 1984. — 496 с.
4. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. — М.: Сов. радио, 1980. — 304 с.
5. Смольяков Э.Р. Понятия коалиционных конфликтных равновесий // Диф. уравнения. — 2006. — 42, № 11. — С. 1539–1548.
6. Смольяков Э.Р. Расширенная базовая система конфликтных равновесий // Докл. РАН. — 2006. — 409, № 2. — С. 163–166.
7. Смольяков Э.Р. Усиленные равновесия для конфликтных задач // Там же. — 2007. — 415, № 3. — С. 318–321.
8. Смольяков Э.Р. Понятие справедливого дележа в кооперативных играх и его поиск // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 6. — С. 131–141.
9. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.

Ļαịņόļčėą 03.04.2008