УДК 517.9:519.6

А.В. ГЛАДКИЙ, В.В. СКОПЕЦКИЙ, Д.А. ХАРРИСОН

АНАЛИЗ И ФОРМИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Ключевые слова: *акустическое поле, уравнение типа Шредингера, краевая задача, экстремальная задача, разностная схема, устойчивость.*

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование широкого класса задач распространения акустической энергии в двух- и трехмерных подводных неоднородных волноводах связано с разработкой математических моделей волновых процессов и численно-аналитических методов решения краевых задач для уравнения Гельмгольца [1–5]. При исследовании таких задач возникают значительные математические трудности, обусловленные комплекснозначностью решения, несамосопряженностью и знаконеопределенностью дифференциального оператора по пространственным переменным, зависимостью скорости звука в волноводе от пространственных координат, наличием импедансных границ и др. В настоящее время интенсивно развиваются численные методы, использующие методику аппроксимации волнового уравнения Гельмгольца параболическими уравнениями типа Шредингера [3–8].

Интерес представляют также вопросы формирования акустических полей с заданными свойствами в неоднородных волноводах с учетом затухания в среде. Для решения класса экстремальных задач формирования акустических полей, описываемых уравнением Гельмгольца, могут использоваться численно-аналитические методы расчета прямых задач распространения звука [9–11]. В работах [5,12,13] исследованы разностные схемы для решения задач формирования звуковых полей на основе волновых параболических уравнений типа Шредингера.

В данной работе рассматривается численное решение прямой и экстремальной задач формирования звукового поля в осесимметрическом неоднородном волноводе с импедансной границей. Предполагается, что распространение акустической энергии описывается параболическим волновым уравнением, учитывающим широкий диапазон изменения скорости звука по дальности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках параболического приближения звуковое поле в осесимметрическом волноводе $G=\{r_0<r<R,\ 0<z<H,\ r_0>0\}$ (с мягкой верхней и импедансной нижней границами), где (r,z) — цилиндрические координаты и ось z направлена вертикально вниз, опишем следующей начально-краевой задачей:

$$2ik_0\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{n(r,z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)+2k_0^2\,(n(r,z)-1+i\nu\,(r,z)+\mu(r,z))p=0,\ \ (r,z)\in G, \qquad (1)$$

$$p\big|_{z=0}=0,\ \ \left.\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\alpha p\right)\right|_{z=H}=0, \qquad (2)$$

$$p\big|_{r=r_0}=u(z). \qquad (3)$$

Здесь $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица; $n(r,z)=c_0\,/\,c(r,z)$ — коэффициент преломления; $c(r,z)$ — скорость звука (c_0 — ее некоторое значение); $k_0=\omega\,/\,c_0$ — волновое число; ω — частота; $\nu(r,z)\geq 0$ — коэффициент затухания; $\alpha=\alpha(r)$ — комплексный коэффициент, причем $\mathrm{Re}\,\alpha\geq 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha\leq 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha+|\mathrm{Im}\,\alpha|\neq 0$,

$$\mu(r,z)=\frac{1}{4k_0^2}(n_z^2/n^3-n_{zz}/n^2),\ n_z=\partial n/\partial z,\ n_{zz}=\partial^2 n/\partial z^2.$$

Входные данные задачи (1)–(3) будем предполагать непрерывными достаточно гладкими функциями координат.

Дифференциальная задача (1)–(3) является базовой для определения дальнего комплекснозначного акустического давления $P(r,z)$, создаваемого гармоническим источником. Это давление удовлетворяет уравнению Гельмгольца [1, 3]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}(r\frac{\partial P}{\partial r})+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+k_0^2(n^2(r,z)+i\nu(r,z))P=0$$

и при $k_0 r>>1$ представляется в виде $P(r,z)=H_0^{(1)}(k_0 r)p(r,z)$, где $H_0^{(1)}(\cdot)$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Для волн, распространяющихся в направлениях, близких к горизонтальному, плавная амплитуда $p(r,z)$ удовлетворяет псевдодифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial r}+ik_0(E-(E+Q)^{1/2})p=0, \tag{4}$$

где E — единичный оператор, а оператор Q определяется выражением

$$Qp=\left((n^2(r,z)-1)E+\frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)p.$$

Подставляя в уравнение (4) приближенное выражение оператора корня квадратного в виде [6]

$$(E+Q)^{1/2}\cong n(r,z)+\frac{1}{2k_0^2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n_z^2}{n^3}-\frac{n_{zz}}{n^2}\right)\right),$$

получаем параболическое волновое уравнение (1). Заметим также, что наличие в уравнении (1) мнимого коэффициента $\nu(r,z)$ позволяет проводить моделирование акустических полей с учетом поглощения.

Математическую постановку задачи формирования звуковых полей в неоднородном волноводе сформулируем как решение задачи минимизации некоторого функционала для обеспечения заданных характеристик акустического поля. При этом в качестве управления принимается начальное распределение звукового поля.

Одна из экстремальных задач состоит в нахождении $u(z)$ для обеспечения заданного распределения звукового поля в некоторой части волновода и сводится к минимизации функционала

$$J(u)=\int_\Omega \rho(z)|p(R,z)-p_0(z)|^2 dz+\int_\Omega \gamma(z)|u(z)|^2 dz,\ \ \Omega=(0,H). \tag{5}$$

Здесь $p(R,z)=p(R,z,u)$ — решение задачи (1)–(3), соответствующее управлению $u(z)$; $p_0(z)$ — заданное давление; $\rho(z)>0$, $\gamma(z)\geq 0$ — заданные непрерывные вещественные весовые функции; $u(z)$ — комплекснозначное управление из некоторого выпуклого замкнутого множества $U=\{u(z)\in L_2(\Omega)\}$, где $L_2(\Omega)$ — пространство комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом в области $\Omega=(0,H)$. Скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$ определяются по формулам

$$(u, v) = \left(\int_{\Omega} u \bar{v} dz \right)^{1/2}, \quad ||u(z)||_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(z)|^2 \, dz \right)^{1/2},$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Таким образом, оптимизационная задача состоит в определении комплексно-значного управления $u \in U$, при котором функционал (5) достигает своей нижней грани

$$J(w) = \inf_{u \in L_2(\Omega)} J(u), \tag{6}$$

а $p(r, z) = p(r, z, u)$ является решением начально-краевой задачи (1)–(3).

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Для численного решения краевой задачи (1)–(3) с комплекснозначным несамосопряженным оператором наиболее удобен метод сеток. Известно [14, 15], что использование этого метода требует исследования устойчивости по начальным данным, по правой части, а также сходимости и оценки скорости сходимости решения разностной схемы. Следует отметить, что при исследовании разностных схем наиболее важным является вопрос устойчивости по начальным данным, что гарантирует отсутствие накопления ошибок, допущенных на некотором шаге вычислений.

Рассмотрим более подробно некоторые из этих вопросов.

В области G введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}_{\tau h} = \overline{\omega}_{\tau} \times \overline{\omega}_h = \{(r, z), r \in \overline{\omega}_{\tau}, z \in \overline{\omega}_h\},$$

где

$$\overline{\omega}_h = \{z = z_k = kh, k = \overline{0, N},\ h = H / N\} = \omega_h \cup \{0\} \cup \{H\} = \omega_h^+ \cup \{0\},$$

$$\overline{\omega}_{\tau} = \{r = r_m = r_0 + m\tau,\ m = 0, 1, 2, \ldots, \},$$

$$\omega_h = \{z = z_k = kh,\ k = \overline{1, N-1},\ h = H / N\},$$

$$\omega_h^+ = \{z = z_k = kh,\ k = \overline{1, N},\ h = H / N\}.$$

Уравнению (1) поставим в соответствие разностное уравнение

$$2ik_0 y_r + \Lambda(r)(\sigma \hat{y} + (1-\sigma) y) + \varphi(r, z)(\sigma \hat{y} + (1-\sigma) y) = 0,\ (r,\ z) \in \overline{\omega}_{\tau} \times \omega_h, \tag{7}$$

где $0 \le \sigma \le 1$ — числовой параметр, сеточные функции $a(r, z)$, $\varphi(r, z)$ определяются из условия аппроксимации и введены следующие обозначения [14]:

$$y = y(r_m, z_k) = y_k^m = y^m = y_k,\ \ \hat{y} = y_k^{m+1},\ \ y_r = (\hat{y} - y) / h,$$

$$y_z = (y_{k+1} - y_k) / h, y_{\bar{z}} = (y_k - y_{k-1}) / h,$$

$$\Lambda(r) y = (a(r, z) y_{\bar{z}})_z = \frac{1}{h}(a(r_m,\ z_{k+1}) y_{\bar{z},k} - a(r_m, z_k) y_{\bar{z},k}) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(a_{k+1}^m y_{k+1}^m - (a_{k+1}^m + a_k^m) y_k^m + a_k^m y_{k-1}^m \right).$$

Пользуясь разложением решения в ряд Тейлора, легко показать, что при

$$\sigma = 1/2;\ r = \widetilde{r}_m = r_m + 0{,}5\tau,\ \ a_k^m = 1/ n(\widetilde{r}_m,\ z_{k-0,5}),\ \ \varphi = \widetilde{b}(r, z),$$

$$b(r, z) = 2k_0^2 \left(n(r, z) - 1 + i\nu(r, z) + \frac{1}{4k_0^2}\left(\frac{n_z^2}{n^3} - \frac{n_{zz}}{n^2} \right) \right)$$

уравнение (7) имеет второй порядок аппроксимации. Здесь для произвольной сеточной функции $f(r,z)$ обозначено $\widetilde{f}(r,z)=f(r+\tau/2,z)$.

Импедансное граничное условие (3) в узлах $(r,z)=(r,\ z_N)$, $r\in\overline{\omega}_\tau$, аппроксимируем разностным уравнением второго порядка точности

$$2ik_0hy_r-a(r,z)(\hat{y}_{\bar z}+y_{\bar z})-(\widetilde{\alpha}(r)/\widetilde{n}(r,z)-0{,}5h\widetilde{b}(r,z))(\hat{y}+y)=0.$$

Таким образом, разностная схема

$$2ik_0y_r+0{,}5\Lambda(r)w+0{,}5\widetilde{\varphi}(r,z)w=0,\ w=\hat{y}+y,\quad (r,z)\in\overline{\omega}_\tau\times\omega_h, \tag{8}$$

$$2ik_0hy_r-a(r,z)w_{\bar z}-(\widetilde{\alpha}(r)/\widetilde{n}(r,z)-0{,}5h\widetilde{b}(r,z))w=0,\ (r,z)=(r,z_N),\ r\in\overline{\omega}_\tau, \tag{9}$$

$$y\big|_{z=0}=0,\ r\in\overline{\omega}_\tau, \tag{10}$$

аппроксимирует дифференциальную задачу (1)–(3) со вторым порядком.

Для исследования устойчивости разностной схемы (8)–(10) введем гильбертово пространство $\mathcal{H}$ комплекснозначных функций, заданных на сетке ω_h^+ со скалярным произведением и нормой

$$[y,v]=(y,v)+0{,}5hy_N\bar{v}_N,\ \ |[y]|=[y,y]^{1/2},\quad (y,v)=\sum_{z\in\omega_h}hy\bar{v},\quad ||y||=(y,y)^{1/2},$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие операторную разностную схему

$$4ik_0y_r+A(\hat{y}+y)=0,\ r\in\overline{\omega}_\tau, \tag{11}$$

$$y(r_0)=y^0, \tag{12}$$

где y^0, $y\in\mathcal{H}$, $y^0=\{u(z),z\in\omega_h^+\}$, $y=y(r)=\{y(r,z),\ z\in\omega_h^+\}$, а линейный оператор $A=A(r)$ действует в пространстве $\mathcal{H}$ и определяется соотношениями

$$Av=\begin{cases}\dfrac{1}{h}\left(a(r,z+h)v_{z,1}-\dfrac{1}{h}a(r,z)v_1\right)+\widetilde{b}(r,z)v,\ z=z_1=h,\\ (a(r,z)y_{\bar z})_z+\widetilde{b}(r,z)v,\ z=z_k,\ k=\overline{2,N-1},\\ -\dfrac{2}{h}a(r,z)v_{\bar z}-\dfrac{2}{h}\dfrac{\widetilde{\alpha}(r)}{\widetilde{n}(r,z)}v+\widetilde{b}(r,z)v,\ z=z_N=H.\end{cases}$$

Следуя [14], будем считать, что двухслойная разностная схема равномерно устойчива по начальным данным в $\mathcal{H}_D$, если выполняется энергетическое неравенство

$$[Dy^{m+1},y^{m+1}]\le[Dy^m,y^m],\ m=0,1,\ldots,$$

где D — некоторый (возможно, зависящий от r) самосопряженный положительно-определенный оператор.

Введем в рассмотрение вспомогательный оператор B, совпадающий с оператором второй разностной производной $\Lambda(r)v=(a(r,z)v_{\bar z})_z$, действующим в пространстве сеточных функций, заданных на $\overline{\omega}_h$ и равных нулю при $z=0$. Легко видеть, что $(Av,v)=(Bv,v)+(\widetilde{b}(r,z)v,v)$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $y \in \mathcal{H}$. Тогда справедливы соотношения

$$\operatorname{Im}(4ik_0\, y_r\,,(\hat{y}+y)) = 4k_0 \operatorname{Im}\left\{\sum_{k=1}^{N-1} ih y_{r,\,k}\ \overline{(y_k^{m+1}+y_k^m)}\right\} = \frac{4k_0}{\tau}(\|\hat{y}\|^2 - \|y\|^2), \tag{13}$$

$$\operatorname{Im}(B(\hat{y}+y),\hat{y}+y) = \frac{2hk_0}{\tau}(|\hat{y}_N|^2 - |y_N|^2) + \\ + \left(\frac{h}{2}\operatorname{Im}\widetilde{b}_N - \operatorname{Im}(a_N\widetilde{\alpha}(r))\right)|\hat{y}_N + y_N|^2. \tag{14}$$

Доказательство. Для доказательства (13) учтем, что по определению мнимой части

$$\operatorname{Im}(iy_r\ \overline{(\hat{y}+y)}) = \frac{1}{2i}(iy_r\ \overline{(\hat{y}+y)} + i\,\overline{y_r}\,(\hat{y}+y)\,.$$

Учитывая далее выражение для оператора разностной производной, после несложных преобразований находим

$$\operatorname{Im}(iy_r\ \overline{(\hat{y}+y)}) = \frac{1}{\tau}(|\hat{y}|^2 - |y|^2)\,.$$

Следовательно, для мнимой части скалярного произведения $(iy_r\,,\hat{y}+y)$ получаем

$$\operatorname{Im}(iy_r\,,\hat{y}+y) = \frac{1}{\tau}(\|\hat{y}\|^2 - \|y\|^2)\,.$$

Для доказательства тождества (14) заметим, что

$$\operatorname{Im}(B(\hat{y}+y),\hat{y}+y) = \frac{1}{2i}\{(B(\hat{y}+y),\hat{y}+y) - (\hat{y}+y, B(\hat{y}+y)\}.$$

Отсюда, воспользовавшись разностной формулой Грина [14]

$$(y,(av_{\bar{z}})_z) - ((ay_{\bar{z}})_z, v) = \\ = -((\bar{a}-a)y_{\bar{z}}, v_{\bar{z}}] + (y\bar{a}\bar{v}_{\bar{z}} - \bar{v}ay_{\bar{z}})_N - (y_0\bar{a}_1\bar{v}_{\bar{z},0} - \bar{v}_0 a_1 y_{\bar{z},0})$$

и учитывая, что $\bar{a}-a=0, v_0 = y_0 = 0$, получаем

$$\operatorname{Im}(B(\hat{y}+y),\hat{y}+y) = \frac{i}{2}(w\bar{a}\bar{w}_{\bar{z}} - \bar{w}aw_{\bar{z}})_N\,,\ \ w = \hat{y}+y. \tag{15}$$

Подставляя в (15) выражение для разностной производной $w_{\bar{z}}$ из краевого условия (9), имеем

$$\operatorname{Im}(B(\hat{y}+y),\hat{y}+y) = \frac{i}{2}\left[(\hat{y}+y)\left(-2ik_0 h\bar{y}_r - \overline{(\hat{y}+y)(a\widetilde{\alpha} - 0{,}5h\widetilde{b})}\right) - \right.$$

$$\left. - \overline{(\hat{y}+y)}(2ik_0 h\, y_r - (\hat{y}+y)(a\widetilde{\alpha} - 0{,}5h\widetilde{b}))\right]_N =$$

$$= k_0 h(w\bar{y}_r + \bar{w}y_r)|_N - |w_N|^2 \operatorname{Im}(a_N\widetilde{\alpha}(r) - 0{,}5h\widetilde{b}_N).$$

Поскольку

$$(w\bar{y}_r + \bar{w}y_r)|_N = \frac{2}{\tau}(|\hat{y}_N|^2 - |y_N|^2),$$

из предыдущего тождества окончательно следует

$$\operatorname{Im}(Bw,w) = \frac{2hk_0}{\tau}(|\hat{y}_N|^2 - |y_N|^2) + |w_N|^2\left[\frac{h}{2}\operatorname{Im}(\widetilde{b}_N) - \operatorname{Im}(a_N\widetilde{\alpha}(r))\right],\ \ w = \hat{y}+y.$$

Анализ устойчивости разностной схемы (11), (12) может быть проведен на основе следующей теоремы.

Теорема 1. Для решения разностной задачи (11), (12) имеет место энергетическое тождество

$$|[\hat{y}]|^2+\frac{\tau}{4k_0}|[(\mathrm{Im}(\widetilde{b}))^{1/2}(\hat{y}+y)]|^2-\frac{\tau}{4k_0}\mathrm{Im}(a_N\widetilde{\alpha})|\hat{y}_N+y_N|^2=|[\hat{y}]|^2. \quad (16)$$

Для доказательства умножим в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ разностное уравнение (11) на величину $w=(\hat{y}+y)$. Тогда, отделяя мнимую часть полученного тождества, имеем

$$\mathrm{Im}\{(4ik_0 y_r, w)+(Aw, w)\}=0. \quad (17)$$

Учитывая далее в (17) соотношения (13), (14), а также

$$\mathrm{Im}(\widetilde{b}(r,z)w,w)=\mathrm{Im}\left\{\sum_{k=1}^{N-1}h\widetilde{b}_k^n w_k^n \overline{w_k^n}\right\}=||(\mathrm{Im}(\widetilde{b}))^{1/2}(\hat{y}+y)||^2,$$

$$(Aw,w)=(Bw,w)+((\widetilde{b}(r,z)w,w),$$

получаем тождество

$$||\hat{y}||^2+\frac{h}{2}|\hat{y}_N|^2+\frac{\tau}{4k_0}||(\mathrm{Im}(\widetilde{b}))^{1/2}(\hat{y}+y)||^2+\frac{\tau h}{8k_0}\mathrm{Im}(\widetilde{b}_N)|\hat{y}_N+y_N|^2-$$

$$-\frac{\tau}{4k_0}\mathrm{Im}(a_N\widetilde{\alpha})|\hat{y}_N+y_N|^2=||y||^2+\frac{h}{2}|y_N|^2. \quad (18)$$

Отсюда следует справедливость теоремы.

На основании (16) может быть установлена единственность и равномерная устойчивость разностной схемы (11), (12) по начальным данным.

Теорема 2. Разностная схема (11), (12) имеет единственное решение.

Теорема 3. Разностная схема (11), (12) равномерно устойчива по начальным данным в норме $|[\cdot]|$, и для ее решения имеет место оценка

$$|[y^{m+1}]|\le|[y^m]|,\ m=0,1,2,\dots,\ y^0\in\mathcal{H}. \quad (19)$$

Для доказательства равномерной устойчивости (19) в тождестве (16) следует учесть, что $\mathrm{Im}\,\widetilde{b}\ge 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha\le 0$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальные свойства экстремальной задачи (1)–(3), (5), (6).

Покажем, что функционал (5) дифференцируем в произвольной точке $u(z)\in U$ в комплексном пространстве со скалярным произведением

$$<u,\ v>=\mathrm{Re}\,(u,v)_{L_2(\Omega)}.$$

Для этого достаточно оценить главную линейную часть приращения функционала $\Delta J(u)=J(u+\delta u)-J(u)$ в зависимости от приращения управления δu.

Пусть $u(z)$ — некоторое фиксированное управление, δu — приращение управления. Тогда приращение решения $\delta p(r,z)=p(r,z,u+\delta u)-p(r,z,u)$ удовлетворяет краевой задаче

$$2ik_0\frac{\partial\delta p}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{n(r,z)}\frac{\partial\delta p}{\partial z}\right)+2k_0^2(n(r,z)-1+i\nu(r,z)+\mu(r,z))\delta p=0, \quad (20)$$

$$\delta p\big|_{z=0}=0,\quad \left.\left(\frac{\partial\delta p}{\partial z}+\alpha\delta p\right)\right|_{z=H}=0 \quad (21)$$

с начальным условием

$$\delta p_{|r=r_0}=\delta u(z). \quad (22)$$

Рассматривая выражение для приращения функционала (5), находим

$$\Delta J(u) = \int_{\Omega} \rho(z)(|p(u+\delta u) - p_0|^2 - |p(u) - p_0|^2)\,dz +$$

$$+\int_{\Omega} \gamma(z)(|u+\delta u|^2 - |u|^2)\,dz,$$

где $p(u+\delta u) = p(R, z, u+\delta u)$, $p(u) = p(R, z, u)$.

После несложных преобразований приращение функционала можно записать в виде

$$\Delta J(u) = 2\mathrm{Re}\int_{\Omega} \rho(z)\delta p(\overline{p(u) - p_0})\,dz + 2\mathrm{Re}\int_{\Omega} \gamma(z)\delta u\overline{u}\,dz +$$

$$+\int_{\Omega} (\rho(z)|\delta p|^2 + \gamma(z)|\delta u|^2)dz. \tag{23}$$

Для дальнейших преобразований приращения функционала (23) потребуется оценка

$$\int_{\Omega} \rho(z)|\delta p|^2 \Big|_{r=R}\, dz \le M\int_{\Omega} |\delta u|^2\,dz, \tag{24}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$.

Сначала покажем, что при каждом фиксированном элементе $u \in U$ соответствующее решение $p(r, z) = p(r, z, u)$ краевой задачи (1)–(3) определяется однозначно.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Для комплекснозначного решения краевой задачи (1)–(3) справедлива оценка

$$\|p(R, z)\|_{L_2(\Omega)} \le \|u(z)\|_{L_2(\Omega)}, \quad r_0 < R < \infty. \tag{25}$$

Для доказательства неравенства (25) умножим скалярно уравнение (1) на комплексно-сопряженную функцию $\overline{p}(r, z, u)$ и проинтегрируем на отрезке $\Omega = (0, H)$:

$$2ik_0\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial r}\overline{p}dz + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{n(r, z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\overline{p}dz + \int_{\Omega} b(r, z)|p|^2\,dz = 0. \tag{26}$$

Отделяя в тождестве (26) мнимую часть, получаем

$$k_0\int_{\Omega}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\overline{p} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial r}p\right)dz + \frac{1}{2i}\left(\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{n(r, z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\overline{p}\,dz - \int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{n(r, z)}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}\right)p dz\right) +$$

$$+2k_0^2\int_{\Omega} \nu(r, z))|p|^2\,dz = 0. \tag{27}$$

Принимая во внимание граничные условия (2), находим

$$\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{n(r, z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\overline{p}dz - \int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{n(r, z)}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}\right)pdz =$$

$$= \frac{(\overline{\alpha} - \alpha)}{n(r, z)}|p|^2\Big|_{z=H} = -\frac{2i\,\mathrm{Im}\alpha}{n(r, z)}|p|^2\Big|_{z=H}.$$

В результате тождество (27) имеет вид

$$k_0\int_{\Omega}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\overline{p} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial r}p\right)dz - \frac{\mathrm{Im}\alpha}{n(r, z)}|p|^2\Big|_{z=H} + 2k_0^2\int_{\Omega}\nu(r, z))|p|^2\,dz = 0. \tag{28}$$

Проинтегрируем (28) по $r \in (r_0, R)$, тогда после преобразованй и с учетом условия (3) получаем

$$k_0 \int_\Omega |p|^2 \Big|_{r=R} dz - \int_{r_0}^{R} \frac{\mathrm{Im}\,\alpha}{n(r,z)} |p|^2 \Big|_{z=H} dr + 2k_0^2 \int_{r_0}^{R} dr \int_\Omega \nu(r,z))|p|^2 dz = k_0 \int_\Omega |u|^2 dz. \qquad (29)$$

Поскольку $\nu(r,z) \ge 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha \le 0$, из (29) окончательно следует неравенство (25). Оценка (25) означает единственность решения задачи (1)–(3) и его непрерывную зависимость от начальных данных.

Аналогичная оценка имеет место и для приращения решения $\delta p(r,z) = p(r,z,u+\delta u) - p(r,z,u)$, которое удовлетворяет начально-краевой задаче (20)–(22). Поэтому справедливо неравенство

$$\int_\Omega |\delta p|^2 \Big|_{r=R} dz \le \int_\Omega |\delta u|^2 dz,$$

из которого следует оценка (24).

С учетом неравенства (24) выражение для приращения функционала (23) можно переписать в виде

$$\Delta J(u) = 2\mathrm{Re} \int_\Omega \rho(z) \delta p (\overline{p(u) - p_0}) dz + 2\mathrm{Re} \int_\Omega \gamma(z) \delta u \overline{u} dz + o(||\delta u||_{L_2(\Omega)}). \qquad (30)$$

С целью дальнейших преобразований выражения (30) рассмотрим в области $G_R = \{r_0 < r < R,\ 0 < z < H\}$ сопряженную задачу

$$L\overline{\psi} = 0, \qquad (31)$$

$$\overline{\psi} \Big|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial z} + \alpha \overline{\psi} \right) \Bigg|_{z=H} = 0, \qquad (32)$$

$$\overline{\psi} \Big|_{r=R} = 2\rho(z) (\overline{p(u) - p_0}), \qquad (33)$$

где оператор L определяется равенством

$$Lv = -2ik_0 \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{n(r,z)} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2k_0^2 (n(r,z) - 1 + i\nu(r,z) + \mu(r,z))v.$$

Легко показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $\overline{\psi}$, δp — решения сопряженной задачи (31)–(33) и задачи (20)–(22) соответственно. Тогда имеет место соотношение

$$\int_\Omega \overline{\psi} \delta p \Big|_{r=r_0} dz = \int_\Omega \overline{\psi} \delta p \Big|_{r=R} dz. \qquad (34)$$

Принимая во внимание в (30) оценку (34) и начальное условие (22), можно окончательно представить выражение для приращения функционала в виде

$$\Delta J(u) = \mathrm{Re} \int_\Omega (\delta u \overline{\psi}) \Big|_{r=r_0} dz + 2\mathrm{Re} \int_\Omega \gamma(z) \delta u \overline{u} dz + o(||\delta u||_{L_2(\Omega)}).$$

Отсюда следует дифференцируемость функционала $J(u)$ по $u(z)$ в пространстве $L_2^2(\Omega)$ действительных пар $(\mathrm{Re}\,u,\ \mathrm{Im}\,u)$. Легко также видеть, что функционал (5) выпуклый.

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 4. Функционал (5) является выпуклым на множестве U, дифференцируемым по Фреше в пространстве $L_2^2(\Omega)$ действительных пар $(\mathrm{Re}\, u,\ \mathrm{Im}\, u)$. Градиент функционала определяется формулой

$$J'(u) = \{\psi_1(r_0, z, u) + 2\gamma(z) u_1,\ \psi_2(r_0, z, u) + 2\gamma(z) u_2\}, \tag{35}$$

где $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ — комплекснозначное решение задачи (31)–(33), $u = u_1(z) + iu_2(z)$.

Из предыдущего следует, что для определения градиента (35) необходимо при фиксированном $u(z)$ найти решение двух краевых задач: сначала с помощью прямой задачи (1)–(3) определить $p(R, z, u)$, затем из (31)–(33) найти значение сопряженной функции.

Для численного решения экстремальной задачи можно воспользоваться градиентными методами [15,16].

В таких задачах прежде всего необходимо вычислить градиент минимизируемого функционала и сформулировать необходимые условия оптимальности. В случае экстремальных задач без ограничений условие оптимальности имеет вид

$$\mathrm{grad}\, J(w) = 0,\ J(w) = \inf_{u \in L_2(\Omega)} J(u). \tag{36}$$

Для приближенного решения задачи (36) можно применить итерационные методы, в частности

$$\frac{w_{k+1} - w_k}{\tau_{k+1}} + \mathrm{grad}\, J(w_k) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, \tag{37}$$

с использованием различных способов выбора итерационных параметров τ_k. На практике часто используется выбор итерационного праметра в (37) из условия монотонности $J(w_{k+1}) < J(w_k)$. Начиная с некоторого заданного значения итерационный параметр уменьшают до тех пор, пока не будет выполнено условие монотонности.

В случае задач оптимизации с ограничениями вместо (37) используется итерационный процесс

$$w_{k+1} = P_U(w_k - \tau_{k+1}\, \mathrm{grad}\, J(w_k)), \tag{38}$$

где P_U — оператор проектирования на множество U.

Алгоритм (38) можно реализовать следующим образом:

$$\frac{\widetilde{w}_{k+1} - w_k}{\tau_{k+1}} + \mathrm{grad}\, J(w_k) = 0, \tag{39}$$

$$w_{k+1} = P_U(\widetilde{w}_k), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{40}$$

На первом шаге (39) вычисление аналогично случаю задачи без ограничений, на втором шаге (40) реализуется ввод в подпространство ограничений U.

Приближенное вычисление градиента связано с численным решением прямой краевой задачи (1)–(3) и сопряженной задачи (31)–(33) с комплексными несамосопряженными операторами. Легко видеть, что для численного решения сопряженной краевой задачи может быть использована разностная схема, изложенная ранее для решения прямой задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе изложен подход к численному решению прямой и экстремальной задач волновой акустики в неограниченных неоднородных волноводах с импендансной границей на основе параболического уравнения типа Шредингера с комплексным несамосопряженным оператором. Исследованы свойства экстремальной задачи формирования звукового поля в осесимметрическом неоднородном волноводе на основе интегрального критерия, характеризующего среднеквадратическое отклонение от заданных акустических характеристик. Получено выражение для градиента функционала качества, предложена и исследована устойчивость разностной схемы для вычисления звукового поля и приближенного вычисления градиента в итерационных градиентных методах решения оптимизационной задачи.

Такой подход легко обобщается на случай других параболических аппроксимаций волнового уравнения Гельмгольца, а также многослойных сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982. — 264 с.
2. Распространение волн и подводная акустика / Под ред. Дж.Б. Келлера, Дж. Пападакиса. — М.: Мир, 1980. — 230 с.
3. Lee D., Mc Daniel S.T. Ocean acoustic propagation by finite difference method // Comput. Math. Appl. — 1987. — **14**. — P. 305–423.
4. Завадский В.Ю. Моделирование волновых процессов. — М.: Наука, 1991. — 368 с.
5. Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. — Киев: Наук. думка, 2001. — 452 с.
6. Tappert F.D., Lee D. A range refraction parabolic equation // J. Acoust. Soc. Amer. — 1984. — **76**. — P. 1797–1803.
7. Lee D., Pierse A.D., Shang E.C. Parabolic equation development in the twentieth century // J. Comput. Acoust. — 2000. — **1**, N 4. — P. 527–637.
8. Zhu J., Lu Y.Y. Validity of one-way models in the weak range dependence limit // Ibid. — 2004. — **12**, N 1. — P. 55–66.
9. Данилов В.Я., Кравцов Ю.А., Наконечный А.Г. Математические аспекты управления гидроакустическими полями // Формирование акустических полей в океанических волноводах. — Н. Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. — С. 32–55.
10. Алексеев Г.В., Комаров Е.Г. Численное исследование экстремальных задач теории излучения звука в плоском волноводе // Мат. моделирование. — 1991. — **3**, № 12. — С. 52–64.
11. Алексеев Г.В., Комашинская Т.С., Синько В.Г. Распределенные вычисления в задачах активной минимизации звука в двумерном многомодовом волноводе // Сиб. журн. индустр. математики. — 2004. — **7**, № 2. — С. 9–22.
12. Гладкий А.В., Скопецкий В.В., Харрисон Д.А. Численное моделирование задачи управления волновыми процессами в неоднородных средах // Системні дослід. та інформ. технології. — 2002. — № 1. — С. 131–140.
13. Гладкий А.В. Об оптимизации волновых процессов в неоднородных средах // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 3. — С. 122–131.
14. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973. — 416 с.
15. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
16. Васильев П.Ф. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

Поступила 06.11.2008