УДК 519.1

Г.А. ДОНЕЦ, Л.Н. КОЛЕЧКИНА

МЕТОД УПОРЯДОЧЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК

Ключевые слова: *комбинаторные множества, множество перестановок, перестановочный многогранник, графы, гиперграни, гамильтонов путь.*

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи исследования операций, такие как планирование работы предприятия, распределение ресурсов, управление, сетевое планирование, описываются моделями дискретной оптимизации. Из задач дискретного моделирования выделяются задачи комбинаторной оптимизации, которые возникают в разнообразных отраслях деятельности человека [1–6].

Задачи на комбинаторных множествах интересны тем, что область допустимых решений представляет собой некоторый комбинаторный многогранник, свойства которого изучены и исследованы. Знание специфических свойств комбинаторного многогранника дает возможность использовать их для построения новых и совершенствования существующих методов решения комбинаторных оптимизационных задач.

Следует отметить, что методы решения комбинаторных задач развиваются очень интенсивно. Среди точных методов широкое развития приобрели разные методы отсечения [2, 6], идея которых была впервые предложена Данцигом, а затем развита во многих других работах, в частности Гомори. Для группы методов отсекающих плоскостей используется идея регуляризации задачи. Она заключается в погружении исходной дискретной области допустимых решений в соответствующую непрерывную выпуклую область, т.е. заключается во временном отбрасывании условий дискретности. Далее к полученной регулярной задаче применяются стандартные методы оптимизации. Следует отметить, что эффективность метода отсечения находится в прямой зависимости от эффективности способа построения отсечений, а это вызывает определенные сложности. Разные подходы к построению отсечений и различные модификации метода отсечений для задач комбинаторной оптимизации рассмотрены в работах [2, 6].

Очевидно, что наиболее быстро распространяются методы, которые лучше и проще учитывают свойства и специфику классов комбинаторных задач. Поэтому является актуальным разработка новых методов на основе специфических свойств комбинаторных множеств.

Настоящая статья посвящена новому методу, который дает возможность найти решение комбинаторной задачи, учитывая свойства и структуру множества перестановок, на котором рассматривается задача. В частности, в работе описывается построение последовательности значений линейной целевой функции по разложениям точек множества перестановок на гиперплоскостях.

1. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ НА КОМБИНАТОРНОМ МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК

Рассмотрим перестановку как упорядоченную выборку элементов

$$a=(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n}),\tag{1}$$

где $a_{i_j}\in A$ $\forall i_j\in N_n$, $\forall j\in N_n$, $i_s\neq i_t$, если $s\neq t$ $\forall s\in N_n$, $\forall t\in N_n$ из некоторого мультимножества $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_q\}$, которое характеризуется основанием $S(A)=\{e_1,e_2,\ldots,e_k\}$, где $e_j\in R^l$ $\forall j\in N_k$, и кратностью элементов $k(e_j)=r_j$, $j\in N_k$, $r_1+r_2+\ldots+r_k=q$ согласно [4, 5].

Как известно, множество $E(A)$, элементами которого являются n-выборки вида (1) из мультимножества A, называется евклидовым комбинаторным множеством, если для произвольных его элементов $a' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$, $a'' = (a''_1, a''_2, \dots, a''_n)$ выполняются условия $(a' \neq a'') \Leftrightarrow (\exists j \in N_n : a'_j \neq a''_j)$. Иными словами, два элемента множества $E(A)$, отличные один от другого, различаются также порядком размещения символов, которые их образовывают.

Множество перестановок с повторениями из n действительных чисел, среди которых k различных, называется общим множеством $P_{nk}(A)$, которое представляет множество упорядоченных n-выборок вида (1) из мультимножества A при условии $n = q > k$.

При $n = k = q$ имеем множество перестановок без повторений. Обозначим его $P_n(A)$. Очевидно, что $P_n(A) = P_{nn}(A)$. В случае, когда не указывается вид множества перестановок, запишем их как $P(A)$. Будем рассматривать элементы множества перестановок как точки арифметического евклидового пространства R^n. Тогда если задать отображение $\varphi : E(A) \to E_\varphi(A) \subset R^n$, то для $a = (a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \in E(A)$, $x = \varphi(a)$, $x = (x_1 \dots, x_n) \in E_\varphi(A)$ имеем $x_j = a_{i_j}$ $\forall j \in N_n$.

В [4–6] показано, что выпуклой оболочкой множества перестановок является перестановочный многогранник $\Pi(A) = \operatorname{conv} P(A)$, множество вершин которого равно множеству $P(A)$ перестановок: $\operatorname{vert} \Pi(A) = P(A)$.

Не теряя общности, упорядочим элементы мультимножества A по неубыванию:

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n, \tag{2}$$

а элементы его основания — по возрастанию: $e_1 < e_2 < \ldots < e_k$. Тогда выпуклой оболочкой общего множества $P(A)$ перестановок является общий перестановочный многогранник $\Pi(A) = \operatorname{conv} P(A)$, который описывается следующей системой линейных неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_j, & (3) \\ \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{i} a_j, & (4) \end{cases}$$

$\alpha_j \in N_n$, $\alpha_j \neq \alpha_t$ $\forall j \neq t$, $\forall j, t \in N_i$, $\forall i \in N_n$, а $P(A) = \operatorname{vert} \Pi(A)$.

Рассмотрим задачу евклидовой комбинаторной оптимизации вида

$$Z(\Phi, P(A)) \colon \max \{\Phi(a) \mid a \in P(A)\},$$

которая состоит в максимизации функции $\Phi(a)$ на множестве перестановок $P(A)$, где $\Phi(a) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

При отображении множества $P(A)$ в евклидово пространство R^n можно сформулировать задачу линейного программирования $Z(F, X)$ максимизации критерия $F(x)$ на множестве X, причем каждой точке $a \in P_{nk}(A)$ будет соответствовать точка $x \in X$ такая, что $F(x) = \Phi(a)$:

$$Z(F, X) \colon \max \{F(x) \mid x \in X\}, \tag{5}$$

здесь $F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, X – непустое множество в R^n, которое определяется как $X = \operatorname{vert} \Pi(A)$, $\Pi = \operatorname{conv} P(A)$.

Следует отметить, что иногда целесообразно решить задачу вида

$$x^* = \arg \max_{x \in \Pi(A)} F(x) \tag{6}$$

для значения функции $y^* = F(x^*)$. Также имеет смысл рассматривать задачу, где значение целевой функции находится в интервале $F(\bar{x}) \le F(x) \le F(\bar{\bar{x}})$. Тогда задача (6) примет вид: определить

$$\bar{x} = \arg\max_{x \in \Pi(A)} F(x) \text{ при } \bar{y} = F(\bar{x}),$$

$$\bar{\bar{x}} = \arg\max_{x \in \Pi(A)} F(x) \text{ при } \bar{\bar{y}} = F(\bar{\bar{x}})$$

при условии $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \to \min$.

Продолжая исследования и развивая результаты работ [4–6], в настоящей статье предложим подход к решению таких задач (задача (6)), основанный на упорядочении значений целевой линейной функции $F(x)$ и построении гамильтонова пути для точек, в которых эти значения находятся. Для построения метода необходимо определить начальную точку. Рассмотрим однокритериальную задачу без дополнительных ограничений.

Утверждение 1 [3]. Если для элементов мультимножества A и коэффициентов целевой функции задачи

$$\operatorname{extr}\left\{ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,|\, x \in \operatorname{vert} \Pi(A) \right\}$$

выполняются соответственно условия (2) и условие

$$c_{i_1} \le c_{i_2} \le .. \le c_{i_n},\ i_n \in N_n, \tag{7}$$

то максимум функции $f(x)$ на допустимом множестве достигается в точке $x^* = (x^*_{i_1}, \ldots, x^*_{i_n}) \in \operatorname{vert} \Pi(A)$, которая задается как

$$x^*_{i_j} = a_j \ \ \forall j \in N_n,$$

а минимум достигается соответственно в точке $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где

$$y_{i_{j+1}} = a_{n-j} \ \ \forall j \in N_{n-1} \cup \{0\}.$$

Следует отметить, что общее число линейных неравенств, входящих в систему (3), (4), описывающую перестановочный многогранник $\Pi(A)$, велико, ввиду чего задача является очень сложной при решении ее традиционными методами линейного программирования. Поэтому есть необходимость в разработке новых методов, которые базируются на свойствах множества допустимых решений и целевых функций.

Для рассматриваемой задачи (6) область допустимых решений включает перестановочный многогранник, вершины которого являются точками общего множества перестановок. Сформулируем некоторые полезные свойства многогранника.

Теорема 1 [4]. Множество $P(A)$ лежит на семействе n-плоскостей вида

$$\frac{s}{n-s} x_1 + \frac{s}{n-s} x_2 + \ldots + \frac{s}{n-s} x_{n-s} - x_{n-s+1} - \ldots - x_n + a_t^s = 0,$$

$$t = 1, 2, \ldots,\ \gamma_s \le \frac{n}{s!(n-s)!},$$

при этом s может принимать значения $1, 2, \ldots, n-1$.

Теорема 2 [4, 5]. Точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда является вершиной перестановочного многогранника $\Pi(A)$, если выполняются следующие условия:

$$\{\alpha_1^1\} \subset \{\alpha_1^2, \alpha_2^2\} \subset \ldots \subset \{\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-1}^{n-1}\} \subset \{\alpha_1^n, \ldots, \alpha_n^n\} = N_n, \quad \sum_{t=1}^{i} x_{\alpha_t^i} = \sum_{t=1}^{i} a_t \quad \forall i \in N_n.$$

Сформулированные выше теоремы дают возможность при реализации метода для решения задачи $Z(F, X)$ минимизировать затраты времени на проверку принадлежности найденной точки комбинаторным ограничениям многогранника и уменьшить количество ограничений в исходной системе.

Теорема 3 [4]. Вершины многогранника $\Pi(A)$, смежные с вершиной $\alpha = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, имеют вид $\beta = (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n})$, где каждая последовательность $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ получена из индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ в результате перестановки таких индексов i_r и i_t, что $|i_r - i_t| = 1$, $a_{i_r} \neq a_{i_t}$.

2. МЕТОД УПОРЯДОЧЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Как было определено выше, в рассматриваемой задаче необходимо определить точку экстремума — вершину перестановочного многогранника $\Pi(A)$ по известному значению целевой функции. Для этого вначале необходимо найти значения целевой функции в каждой точке, построить для этих значений цепочку (граф), которая отображает переходы от одной точки к другой, и выяснить зависимость между ними.

Воспользуемся теорией графов. Рассмотрим пример перестановки из множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Количество элементов множества перестановки $P_n(A)$ равно 4!, т.е. 24.

Для генерирования всех $n!$ перестановок n-элементного множества существует много методов [7], в наиболее распространенных из которых каждая последующая перестановка образуется из предыдущей:

1) путем выполнения одной транспозиции;

2) с помощью однократной транспозиции соседних элементов.

Последовательности перестановок, полученные с помощью определенных выше методов, можно интерпретировать как граф G_n, вершины которого соответствуют всем элементам множества перестановок $P(A)$.

В графе две вершины, соответствующие перестановкам f и g, соединены ребром тогда и только тогда, когда g образуется из f однократной транспозицией двух элементов (таким образом, каждая вершина соединена в точности с $n-1$ другими вершинами). Согласно теореме 3 эти вершины являются смежными.

В результате получаем полный граф, и любой гамильтонов путь соответствует некоторому варианту генерирования всех перестановок однократной транспозицией двух элементов на каждом шаге. Всякой вершине графа соответствует некоторое значение заданной функции $F(x)$. Представляет интерес нахождение такого гамильтонова пути, вдоль которого все значения функции строго упорядочены по убыванию. В этом случае для произвольной функции необходимо сделать $n!$ вычислений ее значений, затем с помощью $\log_2 n!$ операций их упорядочить. Однако для некоторых функций это можно сделать значительно проще.

Рассмотрим линейную функцию

$$F(x, c) = (c, x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i . \tag{8}$$

Здесь $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — множество произвольных чисел, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – перестановка чисел $(1, 2, \ldots, n)$. Рассмотрим u-перестановку из симметрической группы перестановок S_n. Пусть

$$F(x, c, u) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_{u(i)}. \tag{9}$$

Основная проблема комбинаторной оптимизации состоит в том, чтобы найти такую перестановку u_0, что $F(x, c, u_0) \leq F(x, c, u)$ для произвольного $u \in H$, где H – произвольное непустое подмножество симметрической группы S_n. Если $t \in S_n$, то обозначим $c^t = (c_{t(1)}, c_{t(2)}, \ldots, c_{t(n)})$, $x^t = (x_{t(1)}, x_{t(2)}, \ldots, x_{t(n)})$. Тогда $F(x, c) =$

$= F(c^t, x^t) = (c, x) = (c^t, x^t)$. Аналогично $F(x, c, u) = F(x^t, c^t, u')$, где $u' = t^{-1}ut$ для всякого u из S_n. Следовательно, при решении основной проблемы всегда можно заменить пару (x, c) на пару (x^t, c^t). В частности, всегда можно считать, что:

$$\text{а) } c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_n$$

либо

$$\text{б) } c_1 \ge c_2 \ge \ldots \ge c_n.$$

Если $H = S_n$, то проблема решена [8]. Доказано, что если имеет место случай а), то максимум функции $F(x, c, u)$ достигается для перестановки $u_0 = (1, 2, \ldots, n)$, а минимум — для перестановки $u^* = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$. В дальнейших исследованиях будет предполагаться, что для коэффициентов c_i $(1 \le i \le n)$ всегда имеет место случай а). Рассмотрим теперь детально структуру соответствующих графов для небольших значений *n*. Для $n = 3$ граф изображен на рис. 1, где дуга, выходящая из перестановки p_i и заходящая в перестановку p_j $(p_i, p_j \in N_6)$, равносильна соотношению $F(x, c, p_i) \ge F(x, c, p_j)$.

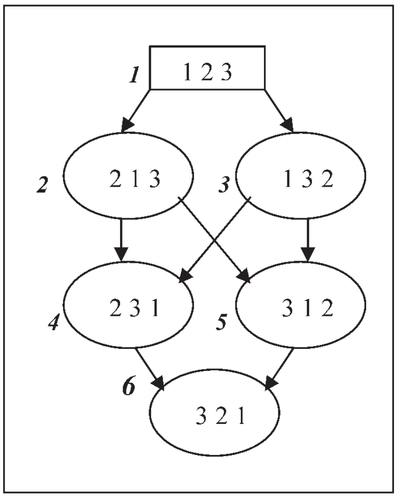


Рис. 1

Чтобы убедиться в том, что граф однозначно отображает упорядочения значений функций, достаточно сделать непосредственное вычисление разности перестановок. Например:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \end{array} \end{array}$$

Разница соответствует разности значений функции $c_2 - c_3 \le 0$, что соответствует действительности. На этом графе нет соединений между перестановками 1 3 2 и 2 1 3, а также между 2 3 1 и 3 1 2. Этим парам соответствует разность 1 – 2 1, что равносильно $c_1 - 2c_2 + c_3$. Здесь знак разности не может быть определен однозначно.

Рассмотрим теперь граф для $n = 4$.

Пример 1. Пусть дано множество $A = \{1, 2, 3, 4\}$, с помощью которого образуется множество перестановок $P(A)$. Определена функция

$$F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4,$$

коэффициенты которой упорядочены как $c_1 \le c_2 \le c_3 \le c_4$ и принимают значения $\{1, 2, 3, 4\}$, а $y^* = F(x^*)$ – значение функции в некоторой точке.

Необходимо найти $x^* = \arg\operatorname{extr} F(x)$, где $x^* \in P(A)$.

Решение. Как известно [9], $\Pi(A) = \operatorname{conv} P(A)$. Представим разложение графа перестановочного многогранника $\Pi(A)$ на подграфы, в каждом из которых зафиксирован один и тот же элемент перестановки. Согласно утверждению 1 и условию упорядочения коэффициентов в самой верхней вершине находится перестановка, в которой достигается максимальное значение целевой функции.

Зафиксируем те перестановки, у которых на четвертом месте стоит цифра 4. Так как при вычислении разности кодов перестановок на четвертой позиции всегда будет нуль, то очевидно, что этот подграф будет точной копией графа, изображенного на рис. 1. Подграф при $x_4 = 4$ представлен на рис. 2, *а*. Если объединить перестановки, в которых на четвертом месте стоит цифра 3, то получим подграф, представленный на рис. 2, *б*. Аналогичные графы представлены на рис. 2, *в* и 2, *г*, где на последнем месте перестановок зафиксированы цифры 2 и 1 соответственно. Стрелками указан переход от одной точки к другой по убыванию значений целевых функций. Следует отметить, что практически все связи определены, но между соседними элементами внутри (как и на рис. 1) связь необходимо изучить, после чего можно представить полный гамильтонов путь на графе перестановочного многогранника. Таким образом, можно изобразить все подграфы, которые получены из мультимножества A с помощью одной транспозиции.

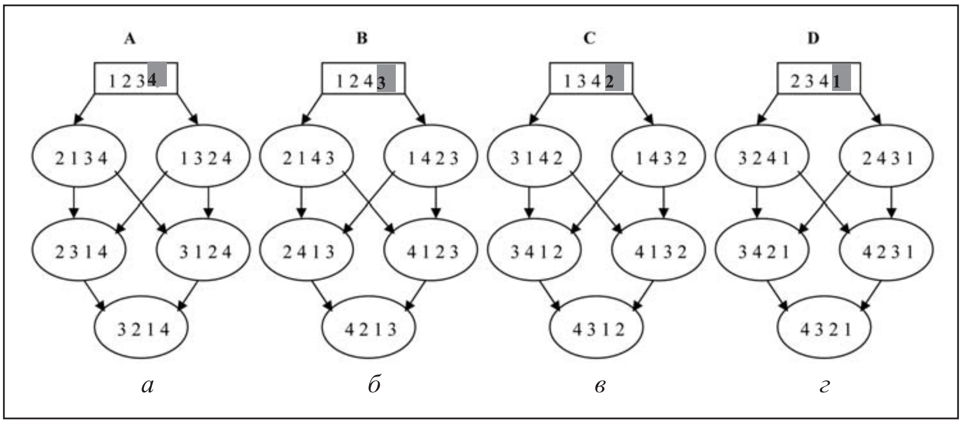


Рис. 2

Следует заметить, что во всех графах однозначно определяются максимальное и минимальное значения функции. При этом все графы являются копией графа ***A***, так что их можно в том же порядке поместить один под другим. Нетрудно заметить, что граф ***B*** получается из графа ***A***, если в последнем во всех перестановках сделать транспозицию элементов 4 и 3. Аналогично граф ***C*** получается из графа ***B***, если в последнем сделать транспозицию (3, 2), а граф ***D*** — из графа ***C*** после транспозиции (2, 1). Отсюда вытекает, что значение функции тем больше, чем выше находится соответствующий граф. Это можно представить схематично:

$$F(x)_{[\boldsymbol{A}]} \geq F(x)_{[\boldsymbol{B}]} \geq F(x)_{[\boldsymbol{C}]} \geq F(x)_{[\boldsymbol{D}]}.$$

Если объединить все подграфы, то получим $\mathbf{G} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$. На рис. 3 показан общий граф для $n = 4$.

Анализируя рис. 1–3, приходим к выводу, что в каждой подгруппе остаются по две несравнимые вершины. Для нахождения гамильтонова пути с убывающими значениями функции необходимо сравнить значения функции во всех этих вершинах, а также в вершинах соседних подграфов.

На основании изложенных выше рассуждений и рис. 1–3 сделаем вывод, что точки множества перестановок $P(A)$ можно разложить по параллельным гиперплоскостям в порядке убывания значений линейной целевой функции $F(x)$ в этих точках. Разложение точек комбинаторного множества перестановок $P(A)$ при $n \geq 4$ обеспечивает иерархическое расположение этих точек по гиперплоскостям ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** (см. рис. 2) согласно значениям целевой функции $y^* = F(x^*)$.

Введем следующие обозначения: $\Delta_1 = c_2 - c_1$; $\Delta_2 = c_3 - c_2$; $\Delta_3 = c_4 - c_3$. Отношения между ними могут зависеть от их конкретных значений.

Для определенных выше обозначений установим возможные соотношения:

$$\begin{array}{ll} \text{I)}\ \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3; & \\ \text{2)}\ \Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3; & \text{3)}\ \Delta_1 > \Delta_3 > \Delta_2; \\ \text{4)}\ \Delta_2 > \Delta_1 > \Delta_3; & \text{5)}\ \Delta_2 > \Delta_3 > \Delta_1; \\ \text{6)}\ \Delta_3 > \Delta_1 > \Delta_2; & \text{7)}\ \Delta_3 > \Delta_2 > \Delta_1. \end{array} \qquad (10)$$

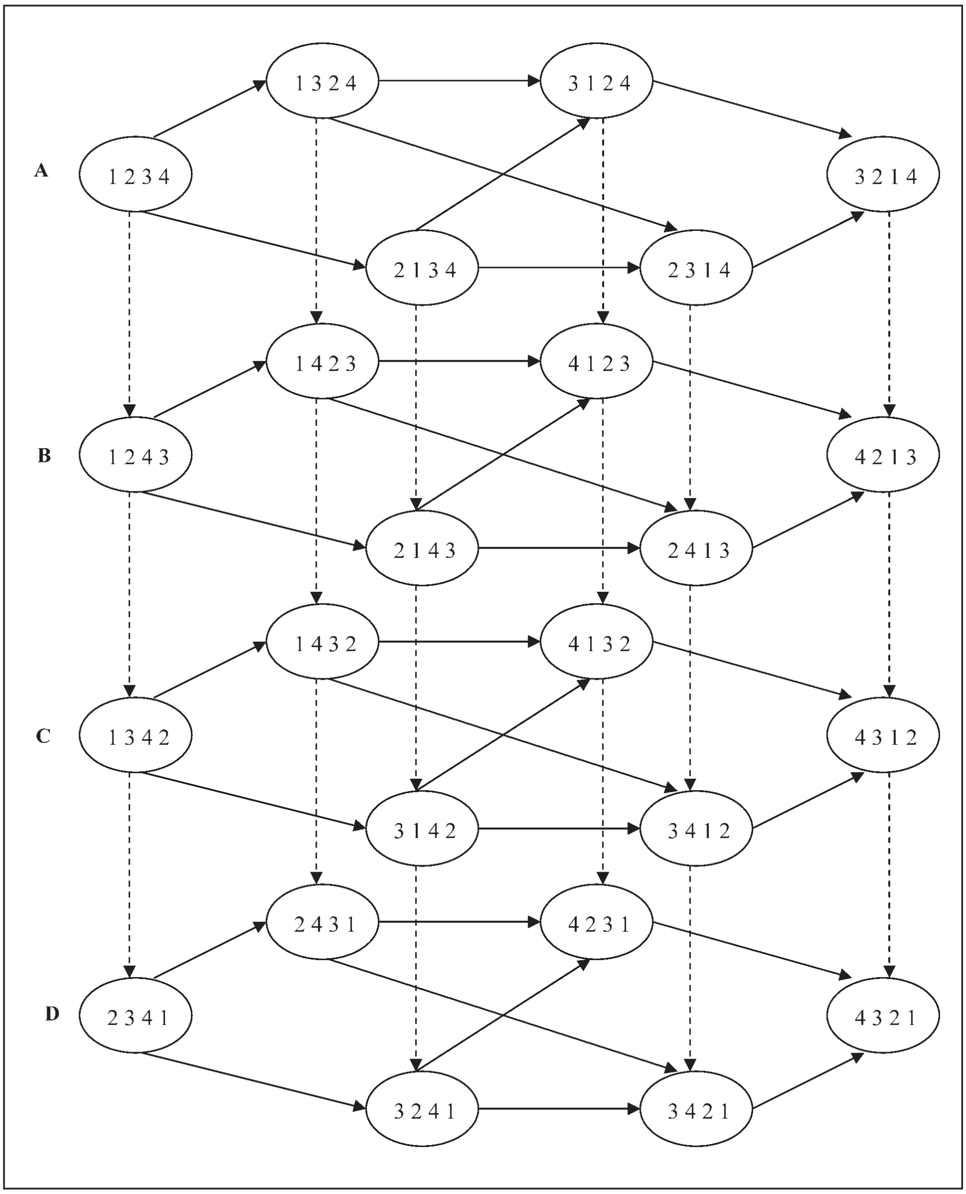


Рис. 3

Можно рассмотреть и частные случаи:

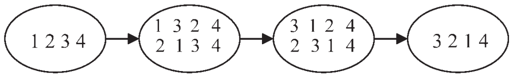
$$
\begin{array}{ll}
1)\ \Delta_1 = \Delta_2 > \Delta_3; & 2)\ \Delta_1 = \Delta_2 < \Delta_3; \\
3)\ \Delta_1 = \Delta_3 > \Delta_2; & 4)\ \Delta_1 = \Delta_3 < \Delta_2; \\
5)\ \Delta_2 = \Delta_3 > \Delta_1; & 6)\ \Delta_2 = \Delta_3 < \Delta_1.
\end{array} \tag{11}
$$

Для построения гамильтонова пути необходимо установить соотношения на каждой из гиперплоскостей ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** (см. рис. 2) между парами точек ***3***,***2*** и ***5***,***4*** (точки пронумерованы на рис. 1).

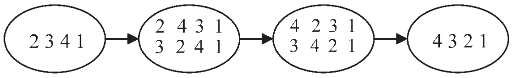
Для каждого случая необходимо вычислить схему по подграфам ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, затем составить общее соотношение и указать гамильтонов путь по всему перестановочному многограннику $\Pi(A)$. В качестве примера рассмотрим первый случай, когда $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$. Верхний подграф ***A*** получает две пары вершин: ***3***,***2***, и ***5***,***4*** , где значения функций совпадают и между ними необходимо установить равенство. Вычисления дают соотношения

$$\frac{-\begin{array}{cccc}1&3&2&4\\2&1&3&4\end{array}}{-1+2-1}=\Delta_1-\Delta_2=0,\quad \frac{-\begin{array}{cccc}3&1&2&4\\2&3&1&4\end{array}}{+1-2+1}=-\Delta_1+\Delta_2=0.$$

Тогда можно изобразить следующую схему в подграфе ***A***:



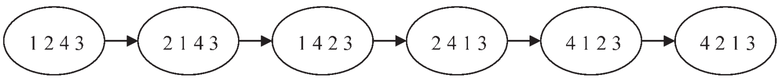
Аналогичная ситуация в подграфе ***D***:



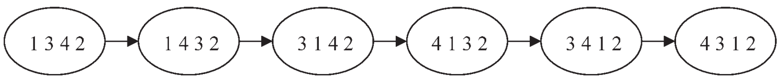
Если рассмотреть подграф ***B*** (см. рис. 2), то получаем соотношение для таких пар вершин:

$$\frac{-\begin{array}{cccc}1&4&2&3\\2&1&4&3\end{array}}{-1+3-2}=\Delta_1-2\Delta_2=-\Delta_2<0 \qquad \frac{-\begin{array}{cccc}4&1&2&3\\2&4&1&3\end{array}}{+2-3+1}=-2\Delta_1+\Delta_2=-\Delta_1<0.$$

В подграфе ***B*** возникают соотношения $\Delta_1-2\Delta_2$ и $-2\Delta_1+\Delta_2$. В результате гамильтонов путь на ***B*** имеет вид



В подграфе ***C*** аналогичная ситуация: $1432>3142$ и $4132>3412$, поэтому имеем



Заметим, что на гиперплоскостях ***A*** и ***B*** имеются точки, для которых выполняется следующее соотношение: $\frac{-\begin{array}{cccc}1&3&2&4\\1&2&4&3\end{array}}{+1-2+1}=-\Delta_3+\Delta_4=0$, т.е. значения функции в них совпадают.

Аналогично значение функции в точке 3 1 2 4 на гиперплоскости ***A*** равно значению функции в точке 1 4 2 3 на гиперплоскости ***B***, так как $\frac{-\begin{array}{cccc}3&1&2&4\\1&4&2&3\end{array}}{+2-3\ 0\ 1}=$ $=2\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=0$, а значение функции в точке 3 2 1 4 на гиперплоскости ***A*** больше, чем значение функции в точке 2 4 1 3 на гиперплоскости ***B***, так как выполняется условие $\frac{-\begin{array}{cccc}3&2&1&4\\2&4&1&3\end{array}}{+1-2\ 0\ 1}=-\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3>0$.

Рассчитаем значения целевой функции в следующих точках:

$F(x_1) = 1*1 + 2*2 + 3*3 + 4*4 = 30$, $\quad F(x_7) = 1*2 + 2*3 + 3*1 + 4*4 = 27$,

$F(x_2) = 1*1 + 2*3 + 3*2 + 4*4 = 29$, $\quad F(x_8) = 1*1 + 2*4 + 3*2 + 4*3 = 27$,

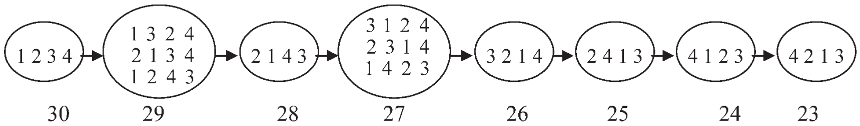
$F(x_3) = 1*2 + 2*1 + 3*3 + 4*4 = 29$, $\quad F(x_9) = 1*3 + 2*2 + 3*1 + 4*4 = 26$,

$F(x_4) = 1*1 + 2*2 + 3*4 + 4*3 = 29$, $\quad F(x_{10}) = 1*2 + 2*4 + 3*1 + 4*3 = 25$,

$F(x_5) = 1*2 + 2*1 + 3*4 + 4*3 = 28$, $\quad F(x_{11}) = 1*4 + 2*1 + 3*2 + 4*3 = 24$,

$F(x_6) = 1*3 + 2*1 + 3*2 + 4*4 = 27$, $\quad F(x_{12}) = 1*4 + 2*2 + 3*1 + 4*3 = 23$.

В результате изложенных рассуждений вершины на подграфах ***A*** и ***B*** можно расположить в виде цепочки в зависимости от значений целевой функции:



Рассмотрим вершины в подграфе ***C***, в частности 3 1 4 2 и 1 4 3 2: так как $\frac{\begin{array}{r}-\begin{array}{cccc}3&1&4&2\\1&4&3&2\end{array}\end{array}}{+2\,-3\;\;1} = -2\Delta_1 + \Delta_2 = -\Delta_1 < 0$, то значение функции в вершине 3 1 4 2 больше, чем значение функции в вершине 1 4 3 2.

Аналогичны соотношения значений функции в вершинах 4 1 3 2 и 3 4 1 2, так как $\frac{\begin{array}{r}-\begin{array}{cccc}4&1&3&2\\3&4&1&2\end{array}\end{array}}{+1-3\;+2} = -\Delta_1 + 2\Delta_2 = \Delta_2 > 0$.

Возникает соотношение $-\Delta_1 + 2\Delta_2$, для которого необходимо определить знак.

Если рассматривать отношение точек из разных гиперплоскостей, то значение функции в точке 1 3 4 2 из ***B*** равно значению функции в точке 1 4 2 3 из ***C***, так как

$$\frac{\begin{array}{r}-\begin{array}{cccc}1&3&4&2\\1&4&2&3\end{array}\end{array}}{-1\;2-1} = \Delta_2 - \Delta_3 = 0.$$

Аналогичная ситуация с точками 3 2 1 4 из ***A*** и 1 4 3 2 из ***B***, так как значение соотношения равно $\frac{\begin{array}{r}-\begin{array}{cccc}3&2&1&4\\1&4&3&2\end{array}\end{array}}{+2\,-2\,-2+2} = -2\Delta_1 + 2\Delta_2 = 0$.

Рассмотрим также точки 2 4 1 3 из ***B*** и 1 4 3 2 из ***C*** и их соотношение $\frac{\begin{array}{r}-\begin{array}{cccc}2&4&1&3\\1&4&3&2\end{array}\end{array}}{+1\,-2\,+1} = -\Delta_1 + \Delta_3 = 0$, а также точки 2 4 1 3 из ***B*** и 3 1 4 2 из ***C***, в них значения функции равны, так как $\frac{\begin{array}{r}-\begin{array}{cccc}2&4&1&3\\3&1&4&2\end{array}\end{array}}{-\,1+3-3\;\;1} = \Delta_1 - 2\Delta_2 + \Delta_3 = 0$.

Имеем также равенство значений функции в точках 4 2 1 3 из ***B*** и 4 1 3 2 из ***C***, так как $\frac{\begin{array}{r}-\begin{array}{cccc}4&2&1&3\\4&1&3&2\end{array}\end{array}}{+1-2+1} = -\Delta_2 + \Delta_3 = 0$.

Очевидно, что значение функции в точке 2 3 4 1 из ***D*** равно значению функции в точке 4 1 2 3 из ***B***, так как $\dfrac{-\begin{array}{cccc}2&3&4&1\\4&1&2&3\end{array}}{-2+2+2-2}=2\Delta_1-2\Delta_2=0$.

Аналогичная ситуация с точками 4 1 3 2 из ***C*** и 3 2 4 1 из ***D***, так как $\dfrac{-\begin{array}{cccc}4&1&3&2\\3&2&4&1\end{array}}{+1-1-1+1}=-\Delta_1+\Delta_3=0$, а также с точками 4 3 1 2 из ***C*** и 3 4 2 1 из ***D***, так как $\dfrac{-\begin{array}{cccc}4&3&1&2\\3&4&2&1\end{array}}{+1-1-1+1}=-\Delta_1+\Delta_3=0$.

В результате расчетов получим гамильтонов путь графа перестановочного многогранника и упорядочение всех значений линейной функции $F(x)$ в порядке их убывания для точек подграфов ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** (рис. 4).

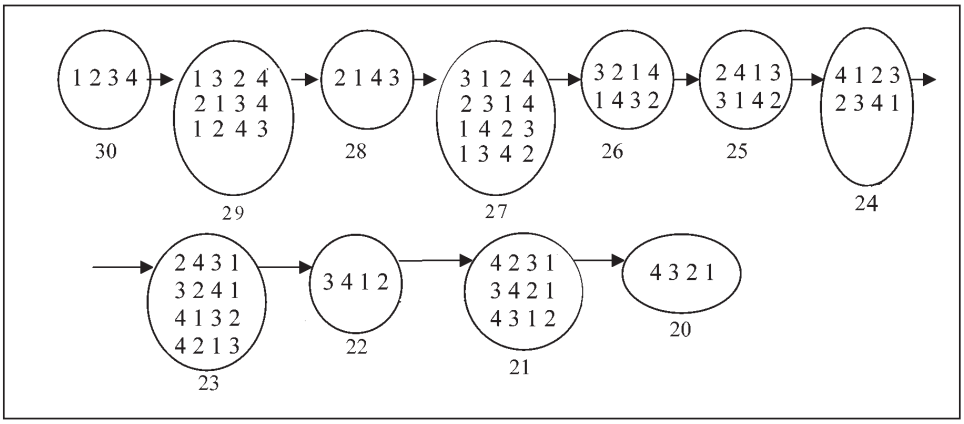


Рис. 4

Аналогично рассчитываются и другие варианты из (10).

В процессе определения гамильтонова пути возникают ситуации, когда необходимо ответить на один из трех вопросов: какой знак имеет определенное выражение или оно равно нулю. Назовем эти вопросы α -вопросами. Соответствующие выражения приводятся ниже (в процессе предыдущих вычислений они уже приводились):

$$\alpha_1=\Delta_1-\Delta_2;\ \alpha_2=\Delta_1-2\Delta_2;\ \alpha_3=2\Delta_1-\Delta_2.$$

Общая схема на рис. 4 преобразуется в схему на рис. 5, на которой при $\alpha_i>0$ направление стрелки сохраняется.

Вопросы имеют определенную зависимость, которую обозначим следующими соотношениями:

1) если $\alpha_1>0$, то $\alpha_2>0$ и α_3 не определено,
2) если $\alpha_1<0$, то $\alpha_2<0$ и α_3 не определено;
3) если $\alpha_1=0$, то $\alpha_2<0$ и $\alpha_3>0$.

Рассмотрим теперь случай 2 из (10): $\Delta_1>\Delta_2>\Delta_3$. В данном случае $\alpha_1>0$; $\alpha_3>0$ и α_2 не определено. Если $\alpha_2>0$, то общий граф приобретает вид рис. 6. Здесь добавлены шесть стрелок, которые обозначены как β-вопрос. Эти вопросы возникают при сравнении вершин, принадлежащих разным соседним подграфам. В данном случае необходимо выяснить только один вопрос вида $\beta=-\Delta_1+2\Delta_2+\Delta_3$.

При других решениях α-вопросов могут появиться дополнительные β-вопросы.

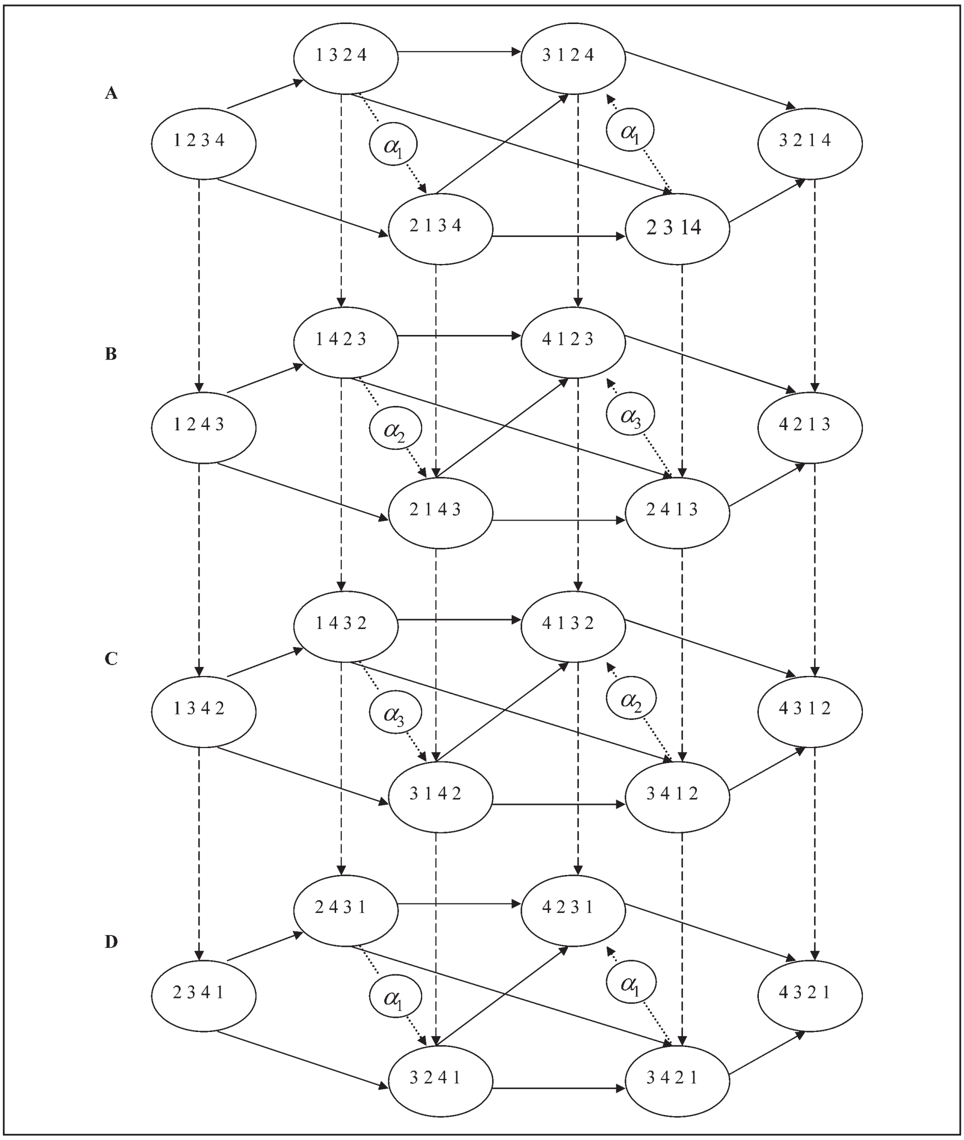
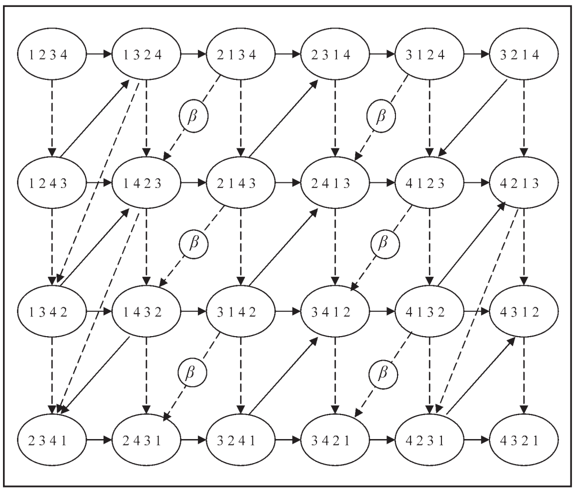


Рис. 5



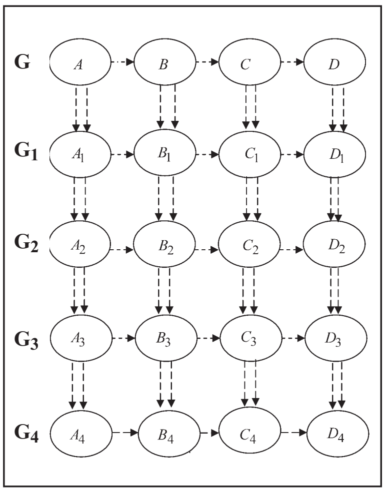


Рис. 6 *Рис. 7*

Для построения гамильтонова пути имеющихся дуг недостаточно. Необходимо еще сравнить вершины в соседних столбцах, например пары 2314 и 3142, а также 2413 и 3241. Вопросы такого типа будем называть γ-вопросами. Они будут рассмотрены в дальнейших публикациях.

Был рассмотрен пример для случая $n=4$, однако результаты можно обобщить и для $n=5$. При этом в множестве перестановок $P(A)$ необходимо рассмотреть 5!=120 точек, которые расположены на пяти гиперплоскостях вида $\mathbf{G}$ (см. рис. 5), каждая из которых содержит по 24 точки (рис. 7).

Необходимо рассмотреть α-вопросы внутри каждого подграфа $\mathbf{G}_i$ $(1 \le i \le 5)$, которые представлены на рис. 2. Для произвольной размерности n будем иметь аналогичную ситуацию, т. е. перестановочный многогранник всегда будет содержать подграфы вида $\mathbf{G}_i$, для которых всегда возникает необходимость рассматривать α- и β-вопросы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы сложные комбинаторные задачи на множестве перестановок. Рассмотрены некоторые свойства допустимой области евклидовой комбинаторной задачи, которая имеет специфические входные данные. Построен и обоснован метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок.

Дальнейшее развитие настоящей статьи будет направлено на реализацию и адаптацию сформулированного метода, а также на разработку новых методов решения комбинаторных оптимизационных задач с учетом входных данных и различных комбинаторных множеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1981. — 287 с.
2. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1988. — 472 с.
3. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 158–172.
4. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев: Наук. думка, 1986. — 265 с.
5. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. — 188 с.
6. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. — К.: Наук. думка, 2005. — 118 с.
7. Липский В. Комбинаторика для программистов. — М.: Мир, 1988. — 200 с.
8. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948. — 456 с.
9. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 344 с.

Поступила 21.10.2008