

РЕАЛИЗАЦИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Ключевые слова: нелинейная задача регулирования, задача оптимального управления, стабилизирующая обратная связь.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что задача регулирования системой состоит в построении управления типа обратной связи, которое переводит систему из одного состояния равновесия в другое и стабилизирует ее относительно нового состояния [1]. В работах [2–8] исследовалась первая часть этой задачи (перевод системы из одного состояния в другое) и вторая ее часть (стабилизация системы в новом положении равновесия). Цель настоящей статьи — описать метод решения сформулированной задачи в классе ограниченных управляющих воздействий для нелинейной системы с обеспечением дополнительных свойств переходных процессов. Предлагаемый метод основан на кусочно-линейной аппроксимации исходной задачи и построении стабилизирующих обратных связей для кусочно-линейных систем [9]. Структура стабилизирующей обратной связи не задается заранее, ее значения вычисляются путем решения вспомогательных задач оптимального управления.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим динамическую систему, поведение которой при $t \geq 0$ в области $X \subset R^n$ описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + b(x)u, \quad x \in X, \quad (1)$$

где $x = x(t)$ — n -вектор состояния системы в момент времени t ; $A \in R^{n \times n}$ — постоянная матрица; $b(x)$, $x \in R^n$, — достаточно гладкая n -вектор-функция; $u = u(t) \in R$ — значение скалярного управляющего воздействия.

Будем считать, что управляющие воздействия ограничены: $L_* \leq u(t) \leq L^*$, $t \geq 0$ ($-\infty < L_* < L^* < \infty$). Введем множество состояний равновесия системы (1): $X_0 = \{x \in R^n: Ax + b(x)u_x = 0, L_* \leq u_x \leq L^*\}$.

Определение. Пусть $z \in \text{int } X_0$, $z \in G \subset R^n$. Функцию

$$u = u_z(x), \quad x \in G, \quad (2)$$

назовем дискретной (с периодом квантования $h > 0$) ограниченной стабилизирующей обратной связью для состояния равновесия z системы (1) в области G , если:

- 1) $u_z(z) = u_z$;
- 2) $L_* \leq u_z(x) \leq L^*$, $x \in G$;
- 3) замкнутая система

$$\dot{x} = Ax + b(x)u_z(x), \quad x(0) = x_0 \in G, \quad (3)$$

имеет решение $x(t) \in G$, $t \geq 0$;

4) траектория системы (3) представляет собой непрерывное решение уравнения $\dot{x} = Ax + b(x)u(t)$, $x(0) = x_0$, с управляющим воздействием $u(t) = u_z(x(kh))$, $t \in [kh, (k+1)h[$, $k = 0, 1, 2, \dots$;

5) движение $x(t) \equiv z$, $t \geq 0$, системы (3) асимптотически устойчиво в G .

При практическом построении обратной связи целесообразно обеспечить дополнительные свойства: область G — достаточно большая и в замкнутой системе выполняются ограничения на переходный процесс: $d_* \leq x(t) \leq d^*$, $t \geq 0$.

Для построения ограниченной стабилизирующей обратной связи будем использовать метод построения реализации оптимальных обратных связей, описанный в [6, 7]. При этом подходе структура обратной связи не задается, необходимые ее значения вычисляются в реальном времени в процессе каждого конкретного управления и естественным образом учитываются ограничения на управляющие воздействия. Предлагаемый ниже метод основан на использовании позиционных решений вспомогательных задач оптимального управления, которые вводятся с учетом ограничений исходной задачи управления.

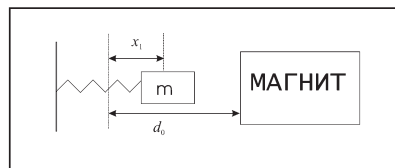


Рис. 1. Схема управления движением материальной точки с помощью магнита

Пусть движением материальной точки массы m управляют с помощью магнита [8] (рис. 1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{\alpha}{m} \frac{u}{(d_0 - x_1)^\gamma}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $x_1 = x_1(t)$ — положение точки в момент времени t , $x_2 = x_2(t)$ — ее скорость, $u = u(t)$ — значение управляющего воздействия.

Множество состояний равновесия системы (4) имеет вид

$$X_0 = \left\{ (x_1, x_2) : L_* \leq \frac{k}{\alpha} x_1 (d_0 - x_1)^\gamma \leq L^*, x_2 = 0 \right\}.$$

При этом u_z — решение уравнения $\frac{k}{m} x_1 = \frac{\alpha}{m} \frac{u}{(d_0 - x_1)^\gamma}$. Начальное состояние равновесия системы $x_1(0) = z_1$, $x_2(0) = z_2$ ($u_z = 0$).

Задача. Перевести материальную точку из начального состояния в окрестность состояния равновесия $g = (g_1, g_2) \in X_0$ так, чтобы не нарушалось фазовое ограничение $d_* \leq x_1(t) \leq d^*$ (точка не должна коснуться магнита), и стабилизировать систему (4) в окрестности этого состояния, причем управляющее воздействие должно удовлетворять ограничениям $L_* \leq u(t) \leq L^*$, $t \geq 0$.

Система (4) представляет собой частный случай системы (1)

$$x = (x_1, x_2), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{m(d_0 - x_1)^\gamma} \end{pmatrix}.$$

Для решения поставленной задачи введем кусочно-постоянную аппроксимацию системы (4), заменив нелинейную характеристику $b_2(x_1)$, $x_1 \in R$, на кусочно-постоянную функцию $f(x_1)$, $x_1 \in R$. Можно добиться сколь угодно высокой точности аппроксимации, но для начала ограничимся самой грубой. Рассмотрим область

$$G = \{(x_1, x_2) : d_* \leq x_1 \leq d^*\}, \quad (5)$$

которую разобьем на подобласти $G_1 = \{(x_1, x_2) : d_{1*} \leq x_1 < d_{1}^*\}$, $G_2 = \{(x_1, x_2) : d_{2*} \leq x_1 \leq d_{2}^*\}$, $G = G_1 \cup G_2$, где $d_{1*} = d_* < d_{1}^* = d_{2*} < d_{2}^* = d^*$. Положим

$$f(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x_1) \end{pmatrix}, \quad f_2(x_1) = \frac{\alpha}{m} p(x_1), \quad p(x_1) = p_1, \quad x_1 \in G_1, \quad p(x_1) = p_2, \quad x_1 \in G_2.$$

Здесь p_1, p_2 — постоянные значения выбранной аппроксимации функции $\frac{1}{(d_0 - x_1)^\gamma}$ в соответствующих областях.

Динамическую систему $\dot{x} = Ax + f(x_1)u$ назовем линейной аппроксимацией системы (4).

ПЕРВЫЙ ТИП СОПРОВОЖДАЮЩЕЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Выберем число Θ , $0 < \Theta = Nh < \infty$ (параметр метода), и в классе дискретных управляющих воздействий $u(t) = u(kh)$, $t \in [kh, (k+1)h]$, $k = 0, N-1$, рассмотрим вспомогательную (сопровождающую) задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \min, \\ \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{\alpha}{m}p_1u, (x_1, x_2) \in G_1, \\ \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{\alpha}{m}p_2u, (x_1, x_2) \in G_2, \\ x_1(0) &= z_1, x_2(0) = z_2, x_1(\Theta) = g_1, x_2(\Theta) = g_2, \\ L^* &\leq u(t) \leq L^*, t \in T; |u(t) - u_z| \leq \rho, t \in T = [0, \Theta]. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть $z = (z_1, z_2)$ — начальное состояние системы в задаче (6), $u_\Theta^0(t|z)$, $t \in T$, — оптимальное программное управление задачи (6), X_Θ — множество точек $z \in G$, для которых существует решение задачи (6).

Определение. Функцию

$$u_\Theta^0(z) = u_\Theta^0(0|z), z \in X_\Theta, \quad (7)$$

назовем оптимальным (стартовым) управлением типа обратной связи. Можно показать, что функция (7) является дискретной ограниченной стабилизирующей обратной связью для состояния z .

Рассмотрим два способа построения стабилизирующей обратной связи (7).

Способ 1. Пусть оптимальная траектория системы (4) на плоскости в течение времени $\Theta_1 < \Theta$ находится в области G_1 , а в оставшееся время $\Theta - \Theta_1$ находится в области G_2 . Тогда кусочно-линейная задача оптимального управления (6) в классе дискретных управляющих воздействий сведется к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \min, \\ \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{\alpha}{m}p_1u, t \in [0, \Theta_1], \\ x_1(0) &= z_1, x_2(0) = z_2, x_1(\Theta_1) = d_1^*; \\ \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{\alpha}{m}p_2u, t \in [\Theta_1, \Theta], \\ x_1(\Theta) &= g_1, x_2(\Theta) = g_2; \\ L^* &\leq u(t) \leq L^*, t \in T = [0, \Theta]; |u(t) - u_z| \leq \rho, t \in T. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь Θ_1 — оптимальный момент перехода траектории $x^0(t)$, $t \in T$, из области G_1 в область G_2 .

Используя формулу Коши для линейной системы $\dot{x} = Ax + bu$, $x(0) = x_0$

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t-\tau)bu(\tau)d\tau,$$

где $F(t)$ — фундаментальная матрица решения системы $\dot{F} = AF$, $F(0) = E$, E — единичная матрица, исключим из задачи (8) переменные состояния

$$\begin{pmatrix} x_1(\Theta)_1 \\ x_2(\Theta)_1 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} F_{11}(\Theta_1)x_1(0) + F_{12}(\Theta_1)x_2(0) + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \frac{\alpha}{m} p_1 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{12}(\Theta_1-t) dt \\ F_{21}(\Theta_1)x_1(0) + F_{22}(\Theta_1)x_2(0) + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \frac{\alpha}{m} p_2 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{22}(\Theta_1-t) dt \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} F_{11}(\Theta) d_1^* + F_{12}(\Theta) F_{21}(\Theta_1)x_1(0) + F_{12}(\Theta) F_{22}(\Theta_1)x_2(0) + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \frac{\alpha}{m} p_1 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{12}(\Theta) F_{22}(\Theta_1-t) dt + \\ + \sum_{j=N_1+1}^N u_j \frac{\alpha}{m} p_2 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{12}(\Theta-t) dt \\ F_{21}(\Theta) d_1^* + F_{22}(\Theta) F_{21}(\Theta_1)x_1(0) + F_{22}(\Theta) F_{22}(\Theta_1)x_2(0) + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \frac{\alpha}{m} p_1 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{22}(\Theta) F_{22}(\Theta_1-t) dt + \\ + \sum_{j=N_1+1}^N u_j \frac{\alpha}{m} p_2 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{12}(\Theta-t) dt \end{pmatrix}}.$$

Здесь $\Theta_1 = N_1\nu$ ($N_1 < N$), N_1 — целое число, $F(t)$, $t \geq 0$, — фундаментальная матрица решения однородной системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2.$$

Запишем задачу (8) с учетом используемого класса доступных управляющих воздействий в эквивалентной функциональной форме

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \min, & (9) \\ F_{11}(\Theta) d_1^* + F_{12}(\Theta) F_{21}(\Theta_1)x_1(0) + F_{12}(\Theta) F_{22}(\Theta_1)x_2(0) + \\ &\sum_{j=1}^{N_1} u_j \frac{\alpha}{m} p_1 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{12}(\Theta) F_{22}(\Theta_1-t) dt + \\ &\sum_{j=N_1+1}^N u_j \frac{\alpha}{m} p_2 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{12}(\Theta-t) dt = g_1, \\ F_{21}(\Theta) d_1^* + F_{22}(\Theta) F_{21}(\Theta_1)x_1(0) + F_{22}(\Theta) F_{22}(\Theta_1)x_2(0) + \\ &\sum_{j=1}^{N_1} u_j \frac{\alpha}{m} p_1 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{22}(\Theta) F_{22}(\Theta_1-t) dt + \sum_{j=N_1+1}^N u_j \frac{\alpha}{m} p_2 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{12}(\Theta-t) dt = g_2, \\ L_* \leq u_j \leq L^*, \quad j = \overline{1, N}; \quad |u_j - u_z| \leq \rho, \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

В задаче оптимального программного управления (9) все элементы известны, и поэтому для начального состояния $z = (z_1(0), z_2(0))$ она может быть заранее решена любым методом без учета затрат машинного времени. Однако, имея в виду последующий синтез, задачу (9) целесообразно решить адаптивным (прямым или двойственным) методом [10], который кроме оптимального программного управле-

ния $u_h^0(t|z)$, $t \in T$, доставляет оптимальную опору $K_{оп}^0(0)$ — важный элемент для реализации оптимального управления типа обратной связи.

Опишем алгоритм реализации оптимальной обратной связи. В соответствии с (7) значение $u_h^0(0|z)$ используем в качестве начального сигнала $u^*(t)$, $u_h^*(0) = u_h(z)$ стабилизирующей обратной связи на промежутке времени $[0, h]$. Предположим, что стабилизатор проработал на промежутке времени $[0, \tau = lh[$ и замкнутая система в текущий момент времени τ оказалась в состоянии $x^*(\tau) \in G_1$.

Замечание. Если $x^*(\tau) \in G_2$, то текущее значение обратной связи вычисляется по линейной модели, т.е. задача (9) упрощается и принимает вид

$$\rho \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$F_{11}(\Theta)x_1(0) + F_{12}(\Theta)x_2(0) + \sum_{j=1}^N u_j \frac{\alpha}{m} p_2 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{12}(\Theta-t) dt = g_1,$$

$$F_{21}(\Theta)x_1(0) + F_{22}(\Theta)x_2(0) + \sum_{j=1}^N u_j \frac{\alpha}{m} p_2 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{22}(\Theta-t) dt = g_2,$$

$$L_* \leq u_j \leq L^*, \quad j = \overline{1, N}; \quad |u_j - u_z| \leq \rho, \quad j = \overline{1, N}.$$

Чтобы вычислить текущее значение $u_h(x^*(\tau))$ стабилизирующей обратной связи, стабилизатору необходимо решить задачу (9) с начальным состоянием $x^*(\tau)$ и учесть, что в предыдущий момент $\tau - h$, когда система (4) находилась в состоянии $x^*(\tau - h)$, стабилизатор уже решил задачу (9) с начальным состоянием $x^*(\tau - h)$, построив оптимальную опору $K_{оп}^0(\tau - h)$ и вычислив оптимальный момент перехода $\Theta_1^0(\tau - h)$. Задача (9) для соседних моментов τ и $\tau - h$ отличается только начальными условиями $x^*(\tau)$, $x^*(\tau - h)$ и это отличие тем меньше, чем меньше h . Поэтому наиболее эффективным методом решения задачи (9) с начальным состоянием $x^*(\tau)$ является двойственный метод коррекции опоры $K_{оп}^0(\tau - h)$, если дополнить его оптимизацией по параметру Θ_1 , которую можно осуществить направленным перебором, начиная со значения $\Theta_1^0(\tau - h)$. Построив решение $u_h^0(t|x^*(\tau))$, $t \in [0, \Theta]$, $K_{оп}^0(\tau)$ задачи (9) с начальным состоянием $x^*(\tau)$, получим реализацию $u^*(\tau) = u_h^0(x^*(\tau)) = u_h^0(0|x^*(\tau))$ обратной связи на промежутке $[\tau, \tau + h[$. Если время, необходимое для коррекции опоры $K_{оп}^0(\tau - h)$, а значит и для вычисления $u^*(\tau)$, не превосходит h , то можно говорить о решении задачи регулирования системы (4) в режиме реального времени.

По описанной выше схеме была решена задача регулирования для системы (4). При решении задачи выбраны следующие значения параметров системы [8]: $\alpha = 4.5 \cdot 10^{-5}$, $\gamma = 1.99$, $c = 0.6590$, $k = 38.94$, $d_0 = 0.0102$, $m = 1.54$. Фундаментальная матрица $F(t)$ при выбранных параметрах системы имеет вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-s_1 t} \cos(s_2 t) + s_3 e^{-s_1 t} \sin(s_2 t) & \frac{1}{s_2} e^{-s_1 t} \sin(s_2 t) \\ -s_4 e^{-s_1 t} \sin(s_2 t) & e^{-s_1 t} \cos(s_2 t) - s_3 e^{-s_1 t} \sin(s_2 t) \end{pmatrix},$$

где $s_1 = \frac{659}{3080}$, $s_2 = \frac{\sqrt{239436119}}{3080}$, $s_3 = \frac{659}{\sqrt{239436119}}$, $s_4 = \frac{77880}{\sqrt{239436119}}$.

В качестве заданного состояния равновесия взято $g = (0.0078, 0)$. Ему соответствует управляющее воздействие $u_z = \frac{k}{\alpha} 0.0078 (d_0 - 0.0078)^y$, на которое наложено ограничение $0 \leq u(t) \leq 0.3, t \geq 0$. При решении задачи была выбрана следующая аппроксимация функции $p(x_1)$:

$$p(x_1) = \begin{cases} 22017, & x_1 \in G_1 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 < 0.006\}, \\ 163000, & x_1 \in G_2 = \{(x_1, x_2) : 0.006 \leq x_1 \leq 0.008\}. \end{cases}$$

На рис. 2 представлены положения материальной точки в процессе регулирования, а на рис. 3 — значения соответствующей обратной связи. (Граничные значения обозначены штриховой линией.) Кривые 1 соответствуют оптимальной траектории и оптимальным значениям обратной связи, вычисленным способом 1. Для решения задачи (9) выбраны следующие параметры метода: $\Theta = 0.6, N = 20$, а для задачи (10) — параметры $\Theta = 0.15, N = 20$. Полученные результаты показывают, что хотя при решении вспомогательной линейной задачи фазовые ограничения $0 < x_1(t) < 0.008, t \geq 0$, не учитывались, предложенный метод обеспечивает их выполнение для исходной нелинейной системы (4) за счет выбора аппроксимации нелинейной системы и параметров сопровождающей задачи.

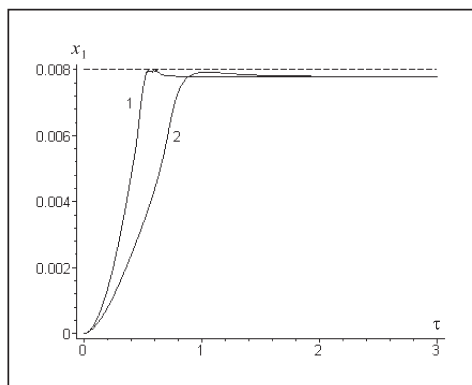


Рис. 2. Оптимальные траектории x_1 системы в процессе регулирования

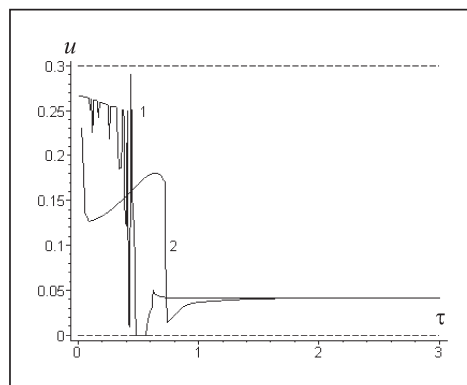


Рис. 3. Реализуемые значения обратной связи для задачи первого типа

Способ 2. Для решения поставленной задачи регулирования будем отдельно стабилизировать систему (4) на границе каждой области G_1, G_2 , используя границу первой области G_1 в качестве промежуточного состояния равновесия для стабилизации системы на всей области G .

Предположим, что оптимальная траектория $x^0(t), t \geq 0$, системы (4) проходит только по первой области, $x^0(t) \in G_1, t \geq 0$. Состояние $z = (d_1^*, 0)$ является состоянием равновесия системы, ему соответствует значение $u_z = \frac{k}{\alpha} \frac{d_1^*}{p_1}$. Для построения

стабилизирующей обратной связи в этой области используем решение следующей сопровождающей задачи оптимального управления:

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \min, & (11) \\ F_{11}(\Theta)x_1(0) + F_{12}(\Theta)x_2(0) + \sum_{j=1}^N u_j \frac{\alpha}{m} p_1 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{12}(\Theta-t) dt &= d_1^*, \\ F_{21}(\Theta)x_1(0) + F_{22}(\Theta)x_2(0) + \sum_{j=1}^N u_j \frac{\alpha}{m} p_1 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{22}(\Theta-t) dt &= 0, \\ L_* \leq u_j \leq L^*, \quad j = \overline{1, N}; \quad |u_j - u_z| \leq \rho, \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

После того как оптимальная траектория $x^0(t), t \geq 0$, системы (4) окажется в области $G_{2\varepsilon} = \{(x_1, x_2) : d_1^* - \varepsilon \leq x_1 \leq g_1\}$, $\varepsilon > 0$, перейдем к стабилизации состояния $z = (g_1, g_2)$. Для построения соответствующей стабилизирующей обратной связи используем решение второй сопровождающей задачи:

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \min, \\ F_{11}(\Theta)x_1(0) + F_{12}(\Theta)x_2(0) + \sum_{j=1}^N u_j \frac{\alpha}{m} p_2 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{12}(\Theta-t) dt &= g_1, \\ F_{21}(\Theta)x_1(0) + F_{22}(\Theta)x_2(0) + \sum_{j=1}^N u_j \frac{\alpha}{m} p_2 \int_{(j-1)h}^{jh} F_{22}(\Theta-t) dt &= g_2, \\ L_* \leq u_j \leq L^*, j = \overline{1, N}; |u_j - u_z| \leq \rho, j = \overline{1, N}; \left(u_z = \frac{k g_1}{\alpha p_2} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Алгоритм работы регулятора в областях G_1 и G_2 аналогичен описанному выше.

На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов для системы (4). Кривые 2 соответствуют оптимальному положению материальной точки и значениям обратной связи, полученным способом 2. При этом были выбраны следующие параметры сопровождающих задач: в области G_1 : $\Theta = 0.6, N = 20$; в области G_2 : $\Theta = 0.15, N = 20$.

Как показывают проведенные расчеты, оба способа регулирования являются достаточно эффективными. Все дальнейшие расчеты были проведены на основе способа 2.

Поставленная задача регулирования была решена при различных аппроксимациях нелинейной функции в области G_2 . Кривая 1 соответствует

$$p(x_1) = \begin{cases} 22017, & x_1 \in G_1, \\ 163000, & x_1 \in G_2, \end{cases}$$

кривая 2 соответствует $p(x_1) = \begin{cases} 22017, & x_1 \in G_1, \\ 160000, & x_1 \in G_2. \end{cases}$

В первом случае нелинейная системы (4) стабилизируется в состоянии $(0.0078, 0)$, во втором — в состоянии $(0.00792, 0)$.

В работе [8] для системы (4) была построена ограниченная стабилизирующая связь для состояния $(0.0074, 0)$. С целью сравнения с результатами работы [8] стабилизирующая обратная связь была реализована изложенным выше методом для $r = 0.0074$. В этом случае в качестве G была рассмотрена область

$$G = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 0.0074\}, G = G_1 \cup G_2,$$

$$G_1 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 < 0.006\}, G_2 = \{(x_1, x_2) : 0.006 \leq x_1 \leq 0.0074\}.$$

В каждой области выбрана следующая аппроксимация нелинейной системы (1): $f(x_1) = \frac{\alpha}{m} p(x_1)$, $p(x_1) = 22017, x_1 \in G_1$; $p(x_1) = 120269, x_1 \in G_2$.

Сравним результаты работы [8] с результатами, полученными в настоящей статье.

На рис. 4 показаны оптимальные траектории замкнутой системы, представленные в работе [8] (кривая 1) и построенные изложенным выше методом (кривая 2). Они соответствуют положению материальной точки для состояния равновесия $(0.0074, 0)$. Для сравнения показана траектория замкнутой системы для состояния $(0.0078, 0)$ (кривая 3).

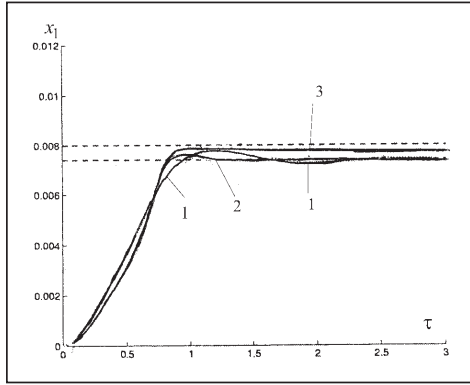


Рис. 4. Оптимальные траектории x_1 системы для задачи второго типа, полученные в [8] (1) и изложенные в настоящей статье (2)

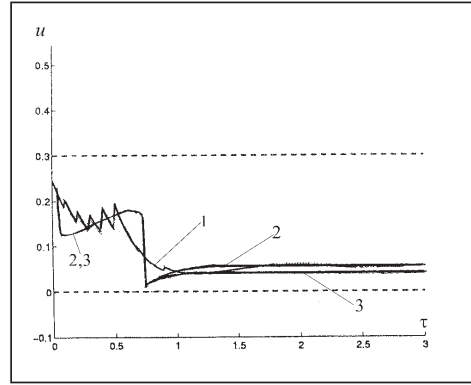


Рис. 5. Значения обратной связи, полученные в работе [8] (1) и изложенные в настоящей статье (2)

На рис. 5 приведены значения обратной связи для состояния равновесия $(0.0074, 0)$, полученные в работе [8] в процессе управления (кривая 1), и значения обратной связи, полученные изложенными выше методами (кривая 2). Для сравнения показана траектория замкнутой системы для состояния $(0.0078, 0)$ (кривая 3).

В работе [8] для состояния равновесия $(0.0074, 0)$ построено множество начальных состояний системы (4), для которых удалось решить поставленную задачу. Используемые в настоящей работе методы оптимального управления позволили существенно увеличить это множество.

ВТОРОЙ ТИП СОПРОВОЖДАЮЩЕЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Изменим тип сопровождающей задачи оптимального управления и построим стабилизирующую обратную связь, используя способ 1. Вместо задачи (6) используем сопровождающую задачу минимизации полного импульса управляющего воздействия, которая имеет вид

$$\int_0^{\Theta} |u(t) - u_z| dt \rightarrow \min, \quad (13)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{c}{m} x_2 + \frac{\alpha}{m} p_1 u, \quad (x_1, x_2) \in G_1,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{c}{m} x_2 + \frac{\alpha}{m} p_2 u, \quad (x_1, x_2) \in G_2,$$

$$x_1(0) = z_1, \quad x_2(0) = z_2, \quad x_1(\Theta) = g_1, \quad x_2(\Theta) = g_2,$$

$$L^* \leq u(t) \leq L^*, \quad t \in T = [0, \Theta].$$

Алгоритм реализации оптимальной обратной связи аналогичен описанному выше.

Сравним полученные результаты с работой [8]. На рис. 6, 7 показаны оптимальные траектории замкнутой системы и реализовавшиеся значения обратной связи, построенные изложенным выше методом и представленные в работе [8]. Кривые 2 соответствуют положению материальной точки и значениям обратной связи в [8] для состояния равновесия $(0.0074; 0)$, кривые 1 — положению материальной точки и значениям обратной связи, полученным в результате решения вспомогательной задачи (13) для $(0.0078; 0)$.

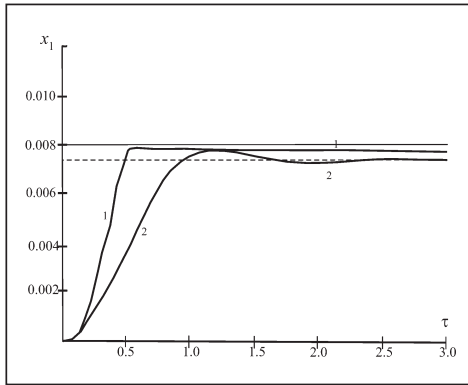


Рис. 6. Положения материальной точки в процессе регулирования при использовании задачи (13)

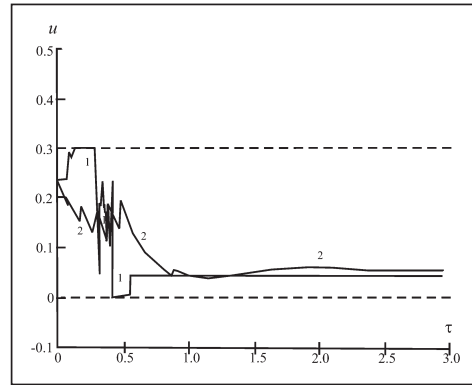


Рис. 7. Полученные значения обратной связи при использовании задачи (13)

Таким образом, сравнительный анализ полученных в данной статье результатов с результатами [8] для системы (4) показывает эффективность предложенного метода реализации дискретной обратной связи для задачи регулирования, которая позволяет существенно улучшить переходные процессы в системе и достичь гораздо большей области притяжения состояния равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А й з е р м а н М. А. Лекции по теории автоматического регулирования. — М.: Физматгиз, 1958. — 520 с.
2. Б а р б а ш и н Е. А. Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 224 с.
3. К р а с о в с к и й Н. Н. Некоторые проблемы стабилизации теории движения. — М.: Физматгиз. — 1959. — 523 с.
4. K w o n W. N., P e a r s o n A. E. A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1977. — 22. — P. 838–842.
5. М а у н е D. Q., М і с х а л с к а Н. Receding control of nonlinear systems // Ibid. — 1990. — 35. — P. 814–824.
6. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М., Р у ж и ц к а я Е. А. Решение классической задачи регулирования методами оптимального управления // АиТ. — 2001. — № 6. — С. 18–29.
7. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М., Р у ж и ц к а я Е. А. Демпфирование и стабилизация маятника при больших начальных возмущениях // Изв. РАН. Техн. кибернетика. — 2001. — № 1. — С. 29–38.
8. G i l b e r t E. G., K o l m a n o v s k y I. A generalized reference governor for nonlinear systems / Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control, Orlando, Florida USA, December 4-7, 2001. — P. 4222–4227.
9. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М. Оптимальное управление в режиме реального времени / Вторая международная конференция по проблемам управления (17–19 июня 2003 года): Пленарные доклады. — М.: Ин-т проблем управления, 2003. — С. 20–47.
10. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М., Т я т ю ш к и н А. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи. — Минск: Университетское, 1984. — 214 с.

Поступила 07.02.2007