КИБЕРНЕТИКА

В.С. ГРИГОРКИВ

УДК 519.86:330.115

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЦЕН В ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Ключевые слова: *модель эколого-экономического баланса, двойственная модель относительно цен, стохастическая модель, детерминированный эквивалент*.

В современном мире экономические системы функционируют в условиях все более значительного влияния внешней среды и особенно экологических факторов, что в большинстве случаев дает основания исследовать их как эколого-экономические системы.

В связи с этим изучение многих проблем экономики, в том числе и проблем ценообразования, следует проводить, рассматривая экономику как единую сложную эколого-экономическую систему, что вполне соответствует политике устойчивого развития и ее внедрения в реальную жизнь. Настоящая работа посвящена вопросам моделирования сбалансированных цен в эколого-экономической системе, олицетворением которой является, например, экономика страны или региона.

Прежде чем приступить к изложению основных результатов, заметим, что предпосылкой для построения таких моделей, очевидно, могут быть балансовые модели эколого-экономических систем, которые апробированы как в научном, так и практическом смысле.

Несмотря на определенные достижения экономико-математического моделирования, таких моделей совсем немного, хотя, как правило, для достижения соответствующих целей исследования они нуждаются в определенной модификации.

Среди этого довольно узкого множества моделей взаимодействия экономических и экологических систем (т.е. моделей эколого-экономических систем) балансового типа важное место занимают так называемые модели Леонтьева–Форда [1, 3], отображающие межотраслевой эколого-экономический баланс и позволяющие изучить ряд важных вопросов функционирования экономики в условиях определенного эколого-экономического равновесия.

Ниже предлагается вариант модели Леонтьева–Форда, представленный системой неравенств

$$\begin{cases} x_i^{(1)} \geq \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_{ij}^{(11)}(x_j^{(1)}, A_{ij}^{(11)}) + \sum\limits_{s=1}^{m} \varphi_{is}^{(12)}(x_s^{(2)}, A_{is}^{(12)}) + y_i^{(1)}, \ i=\overline{1,n}, \\ x_l^{(2)} \geq \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_{lj}^{(21)}(x_j^{(1)}, A_{lj}^{(21)}) + \sum\limits_{s=1}^{m} \varphi_{is}^{(22)}(x_s^{(2)}, A_{is}^{(22)}) - y_l^{(1)}, \ l=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x^{(1)} \in \mathbb{R}_+^n$ — вектор валового выпуска основного производства ($\mathbb{R}_+^l$ — неотрицательный ортант n-мерного векторного пространства); $x^{(2)} \in \mathbb{R}_+^m$ — вектор уничтоженных загрязнителей (т.е. вектор дополнительного производства); $y^{(1)} \in \mathbb{R}_+^n$ —

вектор конечной продукции; $y^{(2)} \in \mathbb{R}_+^m$ — вектор неуничтоженных загрязнителей; $\varphi_{ij}^{(11)}(x_j^{(1)}, A_{ij}^{(11)})$ — функция затрат продукции i на выпуск $x_j^{(1)}$ единиц продукции j; $\varphi_{is}^{(12)}(x_s^{(1)}, A_{is}^{(12)})$ — функция затрат продукции i на уничтожение $x_s^{(2)}$ единиц загрязнителя s; $\varphi_{lj}^{(21)}(x_j^{(1)}, A_{lj}^{(21)})$ — функция выпуска загрязнителя l при выпуске $x_j^{(1)}$ единиц продукции j; $\varphi_{ls}^{(22)}(x_s^{(2)}, A_{ls}^{(22)})$ — функция выпуска загрязнителя l при уничтожении $x_s^{(2)}$ единиц загрязнителя s; $A_{ij}^{(11)}$, $A_{is}^{(12)}$, $A_{lj}^{(21)}$, $A_{is}^{(22)}$ — конечные множества параметров. Все функции соответствующих затрат и выпусков в общем случае считаются нелинейными.

Модель (1) назовем прямой моделью Леонтьева–Форда. Заметим, что обычно соотношения модели межотраслевого эколого-экономического баланса записываются в виде равенств [1–4]. Соотношения (1) являются определенным обобщением. В содержательном смысле первые n неравенств (1) показывают, что выпуск основной продукции должен быть не меньшим, чем требуется на покрытие всех производственных затрат и на выполнение плана выпуска конечной продукции. Что касается последних m неравенств (1), то их смысл также очевиден — остаточный (неуничтоженный) объем загрязнения (разница между произведенным и уничтоженным загрязнением) не может превышать некоторой установленной грани $y_l^{(2)}$, $l = \overline{1, m}$.

Для получения двойственного варианта модели относительно цен обозначим $\tilde{x}_j^{(1)}$ и $\tilde{x}_j^{(2)}$ соответственно стоимость основной продукции отрасли j и уничтоженного загрязнителя s, $\tilde{z}_j^{(1)}$ и $\tilde{z}_s^{(2)}$ — соответственно стоимость условно-чистой продукции отрасли j основного производства и отрасли s вспомогательного производства, $\tilde{\varphi}_{ij}^{(11)}(x_j^{(1)}, A_{ij}^{(11)})$, $\tilde{\varphi}_{is}^{(12)}(x_s^{(2)}, A_{is}^{(12)})$ и $\tilde{\varphi}_{lj}^{(21)}(x_j^{(1)}, A_{lj}^{(21)})$, $\tilde{\varphi}_{is}^{(22)}(x_s^{(2)}, A_{is}^{(22)})$ — соответственно стоимостные аналоги рассмотренных выше затрат $\varphi_{ij}^{(11)}(x_j^{(1)}, A_{ij}^{(11)})$, $\varphi_{is}^{(12)}(x_s^{(2)}, A_{is}^{(12)})$ и выпусков $\varphi_{lj}^{(21)}(x_j^{(1)}, A_{lj}^{(21)})$, $\varphi_{ls}^{(22)}(x_s^{(2)}, A_{ls}^{(22)})$.

Тогда, отображая в определенном смысле классическую схему межотраслевого баланса в стоимостной форме «по столбцам» [4] для первого и третьего квадрантов, построим систему соотношений

$$\begin{cases} \tilde{x}_j^{(1)} \geq \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_{ij}^{(11)}(x_j^{(1)}, A_{ij}^{(11)}) + \sum_{l=1}^{m} \tilde{\varphi}_{lj}^{(21)}(x_j^{(1)}, A_{lj}^{(21)}) + \tilde{z}_j^{(1)}, \; j = \overline{1, n}, \\ \tilde{x}_s^{(2)} \geq \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_{is}^{(12)}(x_s^{(2)}, A_{is}^{(12)}) + \sum_{l=1}^{m} \tilde{\varphi}_{ls}^{(22)}(x_s^{(2)}, A_{ls}^{(22)}) + \tilde{z}_s^{(2)}, \; s = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{2}$$

Интерпретация неравенств (2) также очевидна. Первые n неравенств показывают, что количество произведенной основной продукции в стоимостном выражении не может быть меньшим от стоимостных затрат на закупку нужных объемов всех видов основной продукции, на уничтожение всех видов загрязнителей, которые являются следствием функционирования соответствующих отраслей основного производства, и на условно-чистую продукцию основного производства. Следующее m неравенств обозначают, что стоимость объема каждого из уничтоженных загрязнителей (уничтожение загрязнителя s осуществляется отраслью s вспомогательного производства) не может быть меньше стоимости его составных частей, произведенных в основном и дополнительном производствах, а также стоимости, которая выделяется как условно-чистая продукция вспомогательного производства.

Систему (2) преобразуем, введя в рассмотрение понятие цен. Пусть $p_j^{(1)}$ — цена единицы основной продукции j, $p_s^{(2)}$ — стоимость уничтожения единицы загрязнителя s, $k_j^{(1)}$ — коэффициент условно-чистой продукции на единицу произведенной основной продукции j ($\tilde{z}_j^{(1)} = k_j^{(1)} x_j^{(1)}$) или относительная цена единицы основной продукции, входящей в условно-чистую продукцию j-й отрасли основного производства (если $\hat{k}_j^{(1)}$ — доля продукции j, входящая в условно-чистую продукцию, то $k_j^{(1)} = \hat{k}_j^{(1)} p_j^{(1)}$, так как $\tilde{z}_j^{(1)} = k_j^{(1)} x_j^{(1)} = p_j^{(1)} (\hat{k}_j^{(1)} x_j^{(1)})$), $k_s^{(2)}$ — коэффициент условно-чистой продукции отрасли s вспомогательного производства ($\tilde{z}_s^{(2)} = k_s^{(2)} x_s^{(2)}$) или относительная стоимость уничтожения единицы загрязнителя s, входящая в условно-чистую продукцию отрасли s вспомогательного производства (если $\hat{k}_s^{(2)}$ — доля уничтоженного загрязнителя s, входящего в стоимостном смысле в условно-чистую продукцию, то $k_s^{(2)} = \hat{k}_s^{(2)} p_s^{(2)}$, так как $\tilde{z}_s^{(2)} = k_s^{(2)} x_s^{(2)} = p_s^{(2)} (\hat{k}_s^{(2)} x_s^{(2)})$).

С учетом этих обозначений систему (2) запишем так:

$$\begin{cases} p_j^{(1)} x_j^{(1)} \geq \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{(1)} \varphi_{ij}^{(11)} (x_j^{(1)}, A_{ij}^{(11)}) + \\ + \sum\limits_{l=1}^{m} p_l^{(2)} \varphi_{lj}^{(21)} (x_j^{(1)}, A_{lj}^{(21)}) + k_j^{(1)} x_j^{(1)}, \ \ j = \overline{1, n}, \\ p_s^{(2)} x_s^{(2)} \geq \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{(1)} \varphi_{is}^{(12)} (x_s^{(2)}, A_{is}^{(12)}) + \\ + \sum\limits_{l=1}^{m} p_l^{(2)} \varphi_{ls}^{(22)} (x_s^{(2)}, A_{ls}^{(22)}) + k_s^{(2)} x_s^{(2)}, \ \ s = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{3}$$

Теперь разделим первые n неравенств системы (3) соответственно на $x_j^{(1)} > 0$, а следующие m неравенств — на $x_s^{(2)} > 0$, после этого получим систему

$$\begin{cases} p_j^{(1)} \geq \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{(1)} [\varphi_{ij}^{(11)} (x_j^{(1)}, A_{ij}^{(11)}) / x_j^{(1)}] + \\ + \sum\limits_{l=1}^{m} p_l^{(2)} [\varphi_{lj}^{(21)} (x_j^{(1)}, A_{lj}^{(21)}) / x_j^{(1)}] + k_j^{(1)}, \ \ j = \overline{1, n}, \\ p_s^{(2)} \geq \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{(1)} [\varphi_{is}^{(12)} (x_s^{(2)}, A_{is}^{(12)}) / x_s^{(2)}] + \\ + \sum\limits_{l=1}^{m} p_l^{(2)} [\varphi_{ls}^{(22)} (x_s^{(2)}, A_{ls}^{(22)}) / x_s^{(2)}] + k_s^{(2)}, \ \ s = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{4}$$

В матрично-векторной форме система (4) приобретает вид

$$\begin{cases} \mathrm{p}^{(1)} \geq (\mathrm{F}^{(11)} (\mathrm{x}^{(1)}, \mathrm{A}^{(11)}))^{\mathrm{T}} \mathrm{p}^{(1)} + (\mathrm{F}^{(21)} (\mathrm{x}^{(1)}, \mathrm{A}^{(21)}))^{\mathrm{T}} \mathrm{p}^{(2)} + \mathrm{k}^{(1)}, \\ \mathrm{p}^{(2)} \geq (\mathrm{F}^{(12)} (\mathrm{x}^{(2)}, \mathrm{A}^{(12)}))^{\mathrm{T}} \mathrm{p}^{(1)} + (\mathrm{F}^{(22)} (\mathrm{x}^{(2)}, \mathrm{A}^{(22)}))^{\mathrm{T}} \mathrm{p}^{(2)} + \mathrm{k}^{(2)}, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$F^{(11)} (x^{(1)}, A^{(11)}) = (\varphi_{ij}^{(11)} (x_j^{(1)}, A_{ij}^{(11)}) / x_j^{(1)})_{i,\, j=1}^{n},$$

$$F^{(12)} (x^{(2)}, A^{(12)}) = (\varphi_{is}^{(12)} (x_s^{(2)}, A^{(12)}) / x_s^{(2)})_{i,\, s=1}^{n,\, m},$$

$$F^{(21)} (x^{(1)}, A^{(21)}) = (\varphi_{lj}^{(21)} (x_j^{(1)}, A^{(21)}) / x_j^{(1)})_{l,\, j=1}^{m,\, n},$$

$$\mathrm{F}^{(22)} (\mathrm{x}^{(2)}, \mathrm{A}^{(22)}) = (\varphi_{\mathrm{ls}}^{(22)} (\mathrm{x}_{\mathrm{s}}^{(2)}, \mathrm{A}^{(22)}) / \mathrm{x}_{\mathrm{s}}^{(2)})_{\mathrm{l,\, s=1}}^{\mathrm{m}},$$

$A^{(11)}$, $A^{(12)}$, $A^{(21)}$, $A^{(22)}$ — объединенные множества соответствующих множеств параметров функций затрат основной продукции и выпусков загрязнителей.

Систему соотношений (5) (или (4)) назовем двойственной моделью согласно цен по отношению к системе (1). В общем случае она является системой нелинейных неравенств, поскольку элементы матриц $F^{(11)}(x^{(1)}, A^{(11)})$, $F^{(12)}(x^{(2)}, A^{(12)})$, $F^{(21)}(x^{(1)}, A^{(21)})$, $F^{(22)}(x^{(2)}, A^{(22)})$ — матрицы нелинейных по $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ функций.

Проблема существования неотрицательных цен $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$, являющихся решением системы (5) при произвольных неотрицательных векторах $k^{(1)}$, $k^{(2)}$ и конкретно заданных матрицах $F^{(11)}(x^{(1)}, A^{(11)})$, $F^{(12)}(x^{(2)}, A^{(12)})$, $F^{(21)}(x^{(1)}, A^{(21)})$, $F^{(22)}(x^{(2)}, A^{(22)})$, очевидно является проблемой продуктивности двойственной модели и заслуживает отдельного рассмотрения, хотя ниже останавливаться на ней не будем. Заметим только, что решение системы (5) зависит от $A^{(11)}$, $A^{(12)}$, $A^{(21)}$, $A^{(22)}$ (которые образуют объединенное множество A), $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, т.е. $p^{(1)} = p^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)}, A)$, $p^{(2)} = p^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}, A)$. Если функции затрат основной продукции и выпусков загрязнителей конкретно определены (заданы численные значения параметров входящих в множества $A^{(11)}$, $A^{(12)}$, $A^{(21)}$, $A^{(22)}$), то цены зависят только от $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, т.е. $p^{(1)} = p^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)})$, $p^{(2)} = p^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)})$. В связи с этим для нахождения численных значений искомых цен в экологически сбалансированной экономике сначала нужно найти решение $x^{(1)*}$ и $x^{(2)*}$ системы (1), подставить его в систему (5), затем, решая эту систему, получить $p^{(1)*} = p^{(1)}(x^{(1)*}, x^{(2)*})$, $p^{(2)*} = p^{(2)}(x^{(1)*}, x^{(2)*})$.

Для дальнейших изложений перепишем модель (5) в виде

$$p \geq F^{\mathrm{T}}(x, A)p + k, \tag{6}$$

где $p = (p^{(1)}, p^{(2)})^{\mathrm{T}}$, $k = (k^{(1)}, k^{(2)})^{\mathrm{T}}$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)})^{\mathrm{T}}$,

$$A = A^{(11)} \cup A^{(12)} \cup A^{(21)} \cup A^{(22)},$$

$$F^{\mathrm{T}}(x, A) = \begin{pmatrix} (F^{(11)}(x^{(1)}, A^{(11)}))^{\mathrm{T}} & (F^{(21)}(x^{(1)}, A^{(21)}))^{\mathrm{T}} \\ (F^{(12)}(x^{(2)}, A^{(12)}))^{\mathrm{T}} & (F^{(22)}(x^{(2)}, A^{(22)}))^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Обозначив $d = -k$, $B(x, A) = F^{\mathrm{T}}(x, A) - I_{n+m}$, где I_{n+m} — диагональная единичная матрица размерности $(n+m)\times(n+m)$, получим еще одну запись модели (5) (или (6)):

$$B(x, A)p \leq d. \tag{7}$$

Используем (7) для формализации одного из вариантов стохастической двойственной модели относительно цен, считая компоненты вектора d и параметры модели, входящие во множество A, зависящими от элементарных событий некоторого вероятностного пространства (Ω, S, P), где Ω — пространство всех элементарных событий, S — алгебра событий, P — вероятность или числовая функция, определенная на алгебре S.

Это обстоятельство принципиально в смысле формализации модели, поскольку наличие случайных влияний на параметры модели (7) может нарушить ее условия. В связи с этим от модели (7) переходим к ее стохастическому аналогу

$$\begin{cases} P\{B(x, A(\omega))p \leq d(\omega)\} \geq \alpha, \\ \qquad \omega \in \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $P\{\cdot\}$ — вероятность соответствующего события, α — заданное минимальное значение вероятности (уровень значимости и доверительности события). Как правило, требуется, чтобы величина α была близкой к единице.

Формализация модели (8) такова, что она не может быть непосредственно решена, поэтому традиционная схема исследования таких моделей базируется на построении соответствующих им детерминированных эквивалентов [2, 5].

Для построения детерминированного эквивалента модели (8) дополнительно предположим, что все элементы множества $A(\omega)$ (а также соответствующие элементы матрицы $B(x, A(\omega))$ и вектора $d(\omega)$) взаимно независимы и нормально распределены случайными величинами с математическими ожиданиями $M(b_{ij}(x, A(\omega)) = \bar{b}_{ij}(x)$, $M(d_i(\omega)) = \bar{d}_i$ и дисперсиями $\sigma^2(b_{ij}(x, A(\omega)) = \sigma_{ij}^2(x)$, $\sigma^2(d_i(\omega)) = \bar{\theta}_i^2$.

В этом случае разность $\left(\sum_{j=1}^{n+m} b_{ij}(x, A(\omega))p_j - d_i(\omega)\right)$ также будет иметь нормальное распределение и

$$M\left(\sum_{j=1}^{n+m} b_{ij}(x, A(\omega))p_j - d_i(\omega)\right) = \sum_{j=1}^{n+m} \bar{b}_{ij}(x)p_j - \bar{d}_i,$$

$$\sigma^2\left(\sum_{j=1}^{n+m} b_{ij}(x, A(\omega))p_j - d_i(\omega)\right) = \sum_{j=1}^{n+m} \sigma_{ij}^2(x)p_j + \theta_i^2.$$

С учетом этого получим

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n+m} b_{ij}(x, A(\omega))p_j \le d_i(\omega)\right\} = P\left\{\sum_{j=1}^{n+m} b_{ij}(x, A(\omega))p_j - d_i(\omega) \le 0\right\} =$$

$$= P\left\{\left[\sum_{j=1}^{n+m} b_{ij}(x, A(\omega))p_j - d_i(\omega)\right] - \left[\sum_{j=1}^{n+m} \bar{b}_{ij}(x)p_j - \bar{d}_i\right] + \left[\sum_{j=1}^{n+m} \bar{b}_{ij}(x)p_j - \bar{d}_i\right] \le 0\right\} =$$

$$= P\left\{\frac{\left[\sum_{j=1}^{n+m} b_{ij}(x, A(\omega))p_j - d_i(\omega)\right] - \left[\sum_{j=1}^{n+m} \bar{b}_{ij}(x)p_j - \bar{d}_i\right]}{\left(\sum_{j=1}^{n+m} \sigma_{ij}^2(x)p_j^2 + \theta_i^2\right)^{1/2}} \le \frac{\bar{d}_i - \left[\sum_{j=1}^{n+m} \bar{b}_{ij}(x)p_j\right]}{\left(\sum_{j=1}^{n+m} \sigma_{ij}^2(x)p_j^2 + \theta_i^2\right)^{1/2}}\right\} \equiv$$

$$\equiv P\{\eta_i(x) \le t_i(x)\} = \tilde{F}(t_i(x)) \ge \alpha, \quad i = \overline{1, n+m}. \tag{9}$$

В соотношении (9) $\tilde{F}(t_i(x))$ — зависящая от вектора-параметра x функция нормированного нормального распределения, причем $\tilde{F}(\tau) = 0{,}5 + \Phi(\tau)$, где $\Phi(\tau)$ — функция Лапласа [5].

Поскольку функция распределения неубывающая, то неравенство $\tilde{F}(t_i(x)) \ge \alpha$ выполняется тогда, когда $t_i(x) \ge t_i^{(\alpha)}$, где $t_i^{(\alpha)} = \tilde{F}^{-1}(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha - 0{,}5)$, $i = \overline{1, n+m}$. Можно рассмотреть также и более общий случай, когда элементы множества $A(\omega)$ и вектора $d(\omega)$ имеют не обязательно нормальное распределение. Здесь важно только, чтобы все эти элементы были взаимно независимыми. Кроме того, уровень значимости не обязательно должен быть одинаковым для всех неравенств системы. Однако все эти допущения не принципиальны.

На основании анализа неравенства $t_i(x) \ge t_i^{(\alpha)}$ и (9) получим детерминированный эквивалент стохастической модели (8), который формализуется системой неравенств

$$\sum_{j=1}^{n+m} \bar{b}_{ij}(x)p_j + \left(\sum_{j=1}^{n+m} \sigma_{ij}^2(x)p_j^2 + \theta_i^2\right)^{1/2} \le \bar{d}_i, \quad i = \overline{1, n+m}. \tag{10}$$

Система (10) — нелинейная система, зависящая от параметров, поэтому найти ее решение в явном аналитическом виде очень сложно. Если зафиксировать вектор x, то получим систему без параметров, для решения которой можно применить общеизвестные методы решения нелинейных систем, в частности свести ее к определенной системе равенств, а последнюю решить численными методами [6, 7].

В частности, нахождение решения системы неравенств (10) можно свести к задаче математического программирования

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+m} v_j \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n+m} \bar{b}_{ij}(x) p_j + t_i^{(\alpha)} \left(\sum_{j=1}^{n+m} \sigma_{ij}^2(x) p_j^2 + \theta_i^2 \right)^{1/2} + w_i + v_j = \bar{d}_i, \ i = \overline{1, n+m}, \\ x, w, v \in \mathbb{R}_+^{n+m}, \end{cases} \tag{11}$$

где w — вектор вспомогательных переменных, v — вектор исскуственных переменных. Конкретизируя вектор параметров x и решая задачу (11), получим решение системы (10) (т.е. искомый вектор цен p^*), которое соответствует нулевому значению целевой функции.

Если значение целевой функции ненулевое (положительное), множество допустимых решений будет несовместным, что, как правило, может быть следствием определенных ошибок информационного обеспечения. Заметим также, что задачу (11) легко свести к сепарабельной задаче, введя обозначения $\mu_i(x) = \left(\sum_{j=1}^{n+m} \sigma_{ij}^2(x) p_j^2 + \theta_i^2 \right)^{1/2}$, $i = \overline{1, n+m}$, а также ограничения $\underline{p}_j \le p_j \le \bar{p}_j$, $\underline{\mu}_i(x) \le \mu_i(x) \le \bar{\mu}_i(x)$, $i, j = \overline{1, n+m}$, где $\underline{\mu}_i(x) = \left(\sum_{j=1}^{n+m} \sigma_{ij}^2(x) \underline{p}_j^2 + \theta_i^2 \right)^{1/2}$, $\bar{\mu}_i(x) = \left(\sum_{j=1}^{n+m} \sigma_{ij}^2(x) \bar{p}_j^2 + \theta_i^2 \right)^{1/2}$.

Как известно, сепарабельная задача сводится к задаче кусочно-линейного программирования, для решения которой имеется эффективное алгоритмическое и программное обеспечение.

Кроме рассмотренных выше подходов к моделированию цен в эколого-экономической системе, которые базируются на использовании детерминированных обобщенных моделей балансового типа и их стохастических модификаций, можно также предложить подходы, которые используют балансовые соотношения-равенства или соотношения-неравенства разных видов, а также подходы, использующие оптимизационные модели.

В частности, допустимыми множествами детерминированных и стохастических оптимизационных моделей могут быть соответственно множества цен, описываемые в виде (7) и (8), возможно, с некоторыми дополнительными ограничениями. Для формализации таких моделей требуется задать определенную на допустимых множествах функцию полезности, служащую критерием развития эколого-экономической системы. Заметим, что такой критерий может быть не единственным, т. е. оптимизационная модель может быть многокритериальной, хотя в большинстве случаев на основании нескольких критериев удается построить достаточно обоснованный в экономическом смысле один интегральный критерий и свести многокритериальную модель к однокритериальной.

В целом проблема построения функции полезности является сложной проблемой и заслуживает отдельного внимания, поскольку должны учитываться не только экономические и экологические интересы исследуемой системы, но и возможности математического инструментария, способного в конечном итоге решить поставленную задачу, сделать полный экономико-математический анализ моделируемой ситуации и создать эффективное алгоритмическое и программное обеспечение (если такого нет) для апробации и практического использования построенных моделей.

Сравнивая соотношения (1) и (7), можно предложить один из критериев и соответствующую ему функцию полезности. Поскольку вектор конечной продукции $y^{(1)}$ служит главной целью отраслей основного производства и в задачах прогнозирования является плановым (т.е. его компоненты известны), то максимизация его стоимости, очевидно, — естественный экономический критерий ($f^{(1)}(p(x, A)) = \langle y^{(1)}, p^{(1)}(x, A) \rangle \to \max$, где $\langle \cdot \rangle$ — скалярное произведение).

Другой критерий, отображающий цель отраслей вспомогательного производства, — минимизация стоимости затрат на уничтожение загрязнителей ($f^{(2)}(p(x, A)) = \langle x^{(2)}, p^{(2)}(x, A) \rangle \to \min$).

Одновременная максимизация функции $f^{(1)}(p(x, A))$ и минимизация функции $f^{(2)}(p(x, A))$ фактически приводит к однокритериальной максимизации функции

$$f(p(x, A)) = f^{(1)}(p(x, A)) - f^{(2)}(p(x, A)). \tag{12}$$

Если к соотношениям (7) добавить условия неотрицательности цен

$$p^{(1)}(x, A) \geq 0, \quad p^{(2)}(x, A) \geq 0, \tag{13}$$

где в неравенствах (13) нулями обозначены нулевые векторы соответствующих размерностей, то получим одну из детерминированных оптимизационных моделей нахождения цен, которая заключается в максимизации функции полезности (12) при ограничениях (7), (13). Эту модель можно модифицировать, введя ряд дополнительных ограничений. В математическом плане предложенная модель зависит от параметров задач математического программирования. Конкретизация параметров приводит к обыкновенной задаче математического программирования, а в случае линейных функций затрат и выпусков — к задаче линейного программирования. Построение стохастических аналогов таких задач, а также соответствующих детерминированных эквивалентов можно легко реализовать с помощью предложенных преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. — Київ: Вища шк., 1999. — 236 с.
2. Григоркив В.С., Белоскурский Р.Р. Некоторые стохастические модели Леонтьева–Форда и их детерминированные эквиваленты // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 3. — С. 3–10.
3. Григоркiв В.С. Моделювання еколого-економічної взаємодії: Навч. посібник. — Чернівці: Рута, 2007. — 84 с.
4. Григоркiв В.С., Верстяк А.В. Прогнозування системи збалансованих цін на основі моделі Леонтьєва–Форда // Наук. вісн. Львів. нац. ун-ту імені Івана Франка: Проблеми економічної кібернетики. — Львів, 2007. — Спецвипуск 16. — С. 61–68.
5. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. — СПб.: Лань, 2000. — 480 с.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы. — М.: Наука, 1975. — 632 с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.

Поступила 18.09.2008