УДК 519.21

С.А. СЕМЕНЮК, Я.М. ЧАБАНЮК

ФЛУКТУАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С АСИМПТОТИЧЕСКИМ ДИФФУЗИОННЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Ключевые слова: *флуктуация, стохастическая система, марковский процесс.*

ВВЕДЕНИЕ

Асимптотическая нормальность флуктуаций стохастической системы является важной характеристикой как самой системы, так и скорости ее сходимости к точке равновесия. В данной работе определена асимптотическая нормальность флуктуаций вокруг точки равновесия усредненной динамической системы. Рассмотрен случай стохастической системы, в которой функция скорости имеет зависящие от системы сингулярные возмущения по параметру серий, в отличие от [3], где возмущение зависит только от внешней среды.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим стохастическую систему, которая задается решением уравнения

$$\frac{du^{\varepsilon}(t)}{dt}=C(u^{\varepsilon}(t),x(t/\varepsilon^4))+\varepsilon^{-1}C_0(u^{\varepsilon}(t),\,x(t/\varepsilon^4)), \tag{1}$$

здесь $C(u,\cdot)\in C^2(R^n)$, $C_0(u,\cdot)\in C^3(R^n)$. Марковский процесс $x(t)$, $t\ge 0$, в стандартном фазовом пространстве $(X,\mathbf{X})$ задается генератором Q [2]:

$$Q\varphi(x)=q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y)-\varphi(x)],\quad \varphi\in\mathbf{B}(X),$$

где $\mathbf{B}(X)$ — банахово пространство действительных ограниченных функций с супремум-нормой $||\varphi||=\max\limits_{x\in X}|\varphi(x)|$. Стохастическое ядро $P(x,B)$, $x\in X$, $B\in\mathbf{X}$, определяет равномерно эргодическую встроеную цепь Маркова $x_n=x(\tau_n)$, $n\ge 0$, со стационарным распределением $\rho(B)$, $B\in\mathbf{X}$. Стационарное распределение $\pi(B), B\in\mathbf{X}$, марковского процесса $x(t)$, $t\ge 0$, определяется соотношением

$$\pi(dx)q(x)=q\,\rho(dx),\ \ q=\int_X \pi(dx)q(x).$$

Потенциальный оператор R_0 [3] генератора Q определяется соотношением $R_0=\Pi-(\Pi+Q)^{-1}$, где $\Pi\varphi(x)=\int_X \pi(dy)\varphi(y)$ — проектор на подпространство $N_Q=\{\varphi\colon Q\varphi=0\}$ нулей оператора Q.

Усредненная система задается решением усредненного уравнения

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt}=\hat{C}(\hat{u}(t)), \tag{2}$$

где $\hat{C}(u)=\int_X \pi(dx)C(u,x)$.

Рассмотрим характеристики флуктуаций начальной стохастической системы при условии существования единственной точки равновесия усредненной скорости $\hat{C}(0)=0$, т.е. при выполнении условия баланса

$$\Pi C(0,x)=\int_X \pi(dx)C(0,x)=0. \tag{3}$$

Диффузионное возмущение задается соотношением [2]

$$\overline{C}_0^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^{-2}\int_0^t C_0(u^{\varepsilon}(s),x(s/\varepsilon^4))\,ds.$$

Пусть $C_0^0(x)=C_0(0,x)$. Диффузионное возмущение в точке равновесия имеет вид

$$C_0^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^{-2}\int_0^t C_0(0,x(s/\varepsilon^4))\,ds=\varepsilon^{-2}\int_0^t C_0^0(x(s/\varepsilon^4))\,ds. \tag{4}$$

При условии баланса

$$\int_X \pi(dx)C_0(u,x)=0 \tag{5}$$

имеет место слабая сходимость (см. [3, гл.3])

$$\varepsilon^{-2}\int_0^t C_0^0(x(s/\varepsilon^4))\,ds\to W_\sigma(t),\quad \varepsilon\to 0,$$

где $W_\sigma(t)$ — винеровской процесс.

Рассмотрим нормированные флуктуации

$$V^{\varepsilon}=[u^{\varepsilon}(t)-\varepsilon C_0^{\varepsilon}(t)]/\varepsilon. \tag{6}$$

2. ТЕОРЕМА

Пусть выполняются условия баланса (3) и (5), а функции $C_0'(u,x)$ и $C_0''(u,x)$ ограничены равномерно по x:

$$\sup_{x\in X}\|C_0'(u,x)\|\le C_1<+\infty;\qquad \sup_{x\in X}\|C_0''(u,x)\|\le C_2<+\infty. \tag{7}$$

Тогда имеет место слабая сходимость

$$(V^{\varepsilon}(t),C_0^{\varepsilon}(t))\to(\zeta(t),W_\sigma(t)),\quad \varepsilon\to 0.$$

Предельный процесс $(\zeta(t),W_\sigma(t))$ задается генератором

$$L\varphi(v,w)=c(v+w)\varphi_v'(v,w)+\frac{1}{2}B\varphi_w''(v,w),$$

где $c=\int_X \pi(dx)C'(0,x)$; $\quad B=2\int_X \pi(dx)C_0(0,x)R_0C_0(0,x)$.

Предельный процесс $\zeta(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\zeta(t)=c(\zeta(t)+W_\sigma(t))\,dt.$$

3. СВОЙСТВА НОРМИРОВАННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Пусть $z^{\varepsilon}(t)=V^{\varepsilon}(t)+C_0^{\varepsilon}(t)$, тогда нормированная флуктуация (6) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dV^{\varepsilon}(t)}{dt}=\mathbf{C}^{\varepsilon}(V^{\varepsilon}(t),x(t/\varepsilon^4)), \tag{8}$$

где

$$\mathbf{C}^{\varepsilon}(V^{\varepsilon}(t),\ x(t/\varepsilon^4))=\varepsilon^{-1}C(\varepsilon z^{\varepsilon}(t),\ x(t/\varepsilon^4))+$$

$$+\varepsilon^{-2}C_0(\varepsilon z^{\varepsilon}(t),\ x(t/\varepsilon^4))-\varepsilon^{-2}C_0^0(x(t/\varepsilon^4)).$$

Уравнение (8) получается из (6) диференциированием по t, используя (1) и свойство диффузионного возмущения (4).

Рассмотрим полугруппы операторов $\mathbf{C}_{t+s}^{\varepsilon,t}(x)\varphi(v)=\varphi(V^{\varepsilon}(t+s))$, $V^{\varepsilon}(s)=v$, порожденные решениями системы (8) с генератором

$$\mathbf{C}_t^{\varepsilon,V}(x)\varphi(v)=\mathbf{C}^{\varepsilon}(v,x)\varphi'(v). \tag{9}$$

Лемма 1. Генератор трехкомпонентного марковського процесса

$$V^{\varepsilon}(t),\ C_0^{\varepsilon}(t),\ x_t^{\varepsilon}=x(t/\varepsilon^4),\ t\ge 0, \tag{10}$$

имеет аналитическое представление

$$L^{\varepsilon}\varphi(v,w,x)=[\varepsilon^{-4}Q+\varepsilon^{-2}\mathbf{C}_0(x)+\mathbf{C}_t^{\varepsilon,V}(x)]\varphi(v,w,x), \tag{11}$$

где $\mathbf{C}_0(x)\varphi(v,w,x)=C_0^0(x)\varphi'_w(v,w,x)$.

Доказательство. Вычислим условное математическое ожидание:

$$E[\varphi(v_{t+\Delta},w_{t+\Delta},x_{t+\Delta}^{\varepsilon})-\varphi(v_t,w_t,x_t)\,|\,x_t^{\varepsilon}=x_t,\ V^{\varepsilon}(t)=v_t,C_0^{\varepsilon}(t)=w_t]=$$

$$=E[\varphi(v_t,w_t,x_{t+\Delta}^{\varepsilon})-\varphi(v_t,w_t,x_t)]+$$

$$+E[\varphi(v_{t+\Delta},w_t,x_{t+\Delta}^{\varepsilon})-\varphi(v_t,w_t,x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]+$$

$$+E[\varphi(v_{t+\Delta},w_{t+\Delta},x_{t+\Delta}^{\varepsilon})-\varphi(v_{t+\Delta},w_t,x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]=$$

$$=E[\varphi(v_t,w_t,x_{t+\Delta}^{\varepsilon})-\varphi(v_t,w_t,x_t)]+E\left[\varphi'_w(v_{t+\Delta},w_t,x_{t+\Delta}^{\varepsilon})\frac{dC_0^{\varepsilon}(t)}{dt}\right]\Delta+$$

$$+E[\varphi(v_{t+\Delta},w_t,x_{t+\Delta}^{\varepsilon})-\varphi(v_t,w_t,x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]+o(\Delta).$$

Следуя определению генератора марковського процесса (10), имеем

$$L^{\varepsilon}\varphi(v,w,x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v_{t+\Delta},w_{t+\Delta},x_{t+\Delta}^{\varepsilon})-\varphi(v_t,w_t,x_t)]=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v_t,w_t,x_{t+\Delta}^{\varepsilon})-\varphi(v_t,w_t,x_t)]+$$

$$+\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E\left[\varphi'_w(v_{t+\Delta},w_t,x_{t+\Delta}^{\varepsilon})\frac{dC_0^{\varepsilon}(t)}{dt}\right]\Delta+$$

$$+\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v_{t+\Delta},w_t,x_{t+\Delta}^{\varepsilon})-\varphi(v_t,w_t,x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]. \tag{12}$$

Поскольку

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v_{t+\Delta},w_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(v_t,w_t,x_t)]=\varepsilon^{-4}Q\varphi(v,w,x),$$

$$\lim_{\Delta\to 0}E\left[\varphi'_w(v_{t+\Delta},w_t,x^{\varepsilon}_{t+\Delta})\frac{dC^{\varepsilon}_0(t)}{dt}\right]=\varepsilon^{-2}C^0_0(x)\varphi'_w(v,w,x),$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v_{t+\Delta},w_t,x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(v_t,w_t,x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]=\mathbf{C}^{\varepsilon,V}_t(x)\varphi(v,w,x),$$

то из (12) получим (11).

Лемма 2. Генератор L^{ε} имеет асимптотическое представление

$$L^{\varepsilon}\varphi(v,w,x)=[\varepsilon^{-4}Q+\varepsilon^{-2}\mathbf{C}_0(x)+\varepsilon^{-1}\mathbf{C}(x)+\mathbf{C}_1(x)+\theta^{\varepsilon}_L(x)]\varphi(v,w,x), \tag{13}$$

где

$$\mathbf{C}_0(x)\varphi(v,w,x)=C^0_0\varphi'_w(v,w,x); \tag{14}$$

$$\mathbf{C}(x)\varphi(v,w,x)=[C(0,x)+(v+w)C'_0(0,x)]\varphi'_v(v,w,x);$$

$$\mathbf{C}_1(x)\varphi(v,w,x)=(v+w)[C'(0,x)+$$

$$+(v+w)C''_0(0,x)/2]\varphi'_v(v,w,x), \tag{15}$$

остаточний член такой, что $||\theta^{\varepsilon}_L(x)\varphi(v,w,x)||\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. Используя разложение функций C и C_0 в ряд Тейлора по первой переменной для генератора (9), получаем

$$\mathbf{C}^{\varepsilon,V}_t(x)\varphi(v,w,x)=\varepsilon^{-1}[C(0,x)+\varepsilon(v+C^{\varepsilon}_0(t))C'(0,x)+\varepsilon^2\theta_1(x)]\varphi(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon^{-2}[C^0_0(x)+\varepsilon(v+C^{\varepsilon}_0(t))C'_0(0,x)+$$

$$+\varepsilon^2(v+C^{\varepsilon}_0(t))^2C''_0(0,x)/2+\varepsilon^3\theta_2(x)]\varphi(v,w,x)-\varepsilon^{-2}C^0_0(x)\varphi(v,w,x)=$$

$$=\varepsilon^{-1}[C(0,x)+(v+C^{\varepsilon}_0(t))C'_0(0,x)]\varphi(v,w,x)+$$

$$+(v+C^{\varepsilon}_0(t))C'(0,x)\varphi(v)+ \tag{16}$$

$$+(v+C^{\varepsilon}_0(t))^2C''_0(0,x)\varphi(v)/2+\varepsilon\theta_V(x)\varphi(v,w,x),$$

где $\theta_V(x)=\theta_1(x)+\theta_2(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ — некоторые равномерно ограниченные по x функции. Подставив разложение (16) в (11), получим представление (13).

4. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Усеченный оператор имеет вид

$$L^{\varepsilon}_0=\varepsilon^{-4}Q+\varepsilon^{-2}\mathbf{C}_0(x)+\varepsilon^{-1}\mathbf{C}(x)+\mathbf{C}_1(x). \tag{17}$$

Решим проблему сингулярного возмущения для усеченного оператора (17), используя тест-функцию

$$\varphi^{\varepsilon}(v,w,x)=\varphi(v,w)+\varepsilon^2\varphi_2(v,w,x)+\varepsilon^3\varphi_1(v,w,x)+\varepsilon^4\varphi_0(v,w,x).$$

Лемма 3. Решение проблемы сингулярного возмущения для усеченного оператора (17) в условиях теоремы реализуется соотношением

$$L_0^{\varepsilon} \varphi^{\varepsilon}(v, w, x) = L\varphi(v, w) + \varepsilon \theta^{\varepsilon}(x) \varphi(v, w), \tag{18}$$

где остаточний член $\theta^{\varepsilon}(x)$ ограничен равномерно по x.

Предельный оператор L определяется формулой

$$L\Pi = \Pi \mathbf{C}_1(x)\Pi + \Pi \mathbf{C}_0(x) R_0 \mathbf{C}_0(x)\Pi. \tag{19}$$

Доказательство. Для выполнения равенства (18) необходимо, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях ε слева и справа совпадали. Для этого вычислим

$$L_0^{\varepsilon} \varphi^{\varepsilon} = \varepsilon^{-4} Q\varphi + \varepsilon^{-2}[Q\varphi_2 + \mathbf{C}_0(x)\varphi] + \varepsilon^{-1}[Q\varphi_1 + \mathbf{C}(x)\varphi] +$$

$$+[Q\varphi_0 + \mathbf{C}_0(x)\varphi_2 + \mathbf{C}_1(x)\varphi] + \varepsilon \theta^{\varepsilon}(x)\varphi.$$

Поскольку φ не зависит от x, то $Q\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi \in N_Q$.

Условие баланса (5) есть условием разрешимости уравнения $Q\varphi_2 + \mathbf{C}_0(x)\varphi = 0$, поэтому

$$\varphi_2 = R_0 \mathbf{C}_0(x)\varphi. \tag{20}$$

Используя условие баланса (3) и (5), получим

$$\Pi \mathbf{C}(x)\varphi(v, w) = [\Pi C(0, x) + (v + w)\Pi C_0'(0, x)]\varphi_v'(v, w) =$$

$$= \Pi C(0, x)\varphi_v'(v, w) + (v + w)[\Pi C_0(0, x)]_u' \varphi_v'(v, w) = 0,$$

что, в свою очередь, есть условием разрешимости уравнения $Q\varphi_1 + \mathbf{C}(x)\varphi = 0$, поэтому

$$\varphi_1 = R_0 \mathbf{C}(x)\varphi. \tag{21}$$

Используя (20) и (21), последнее уравнение $Q\varphi_0 + \mathbf{C}_0(x)\varphi_2 + \mathbf{C}_1(x)\varphi = L\varphi$ можно свести к виду

$$Q\varphi_0 + [\mathbf{C}_1(x)\varphi_2 + \mathbf{C}_0(x) R_0 \mathbf{C}_0(x)]\varphi = L\varphi.$$

Условие разрешимости последнего уравнения и дает предельный оператор L в форме (19).

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Используя (14) и (15) при вычислении правой части (19), получаем

$$L\varphi(v, w) = [\Pi \mathbf{C}_1(x) + \Pi \mathbf{C}_0(x) R_0 \mathbf{C}_0(x)]\varphi(v, w) =$$

$$= (v + w)\left[\int_X \pi(dx)(C'(0, x) + (v + w)C_0''(0, x)/2)\varphi_v'(v, w)\right] +$$

$$+ \int_X \pi(dx) C_0(0, x) R_0 C_0(0, x)\varphi_w''(v, w). \tag{22}$$

Поскольку из условий (5) и (7) имеет место соотношение $\int_X \pi(dx) C_0''(0, x) =$ $= \Pi C_0''(0, x) = 0$, то окончательно имеем

$$L\varphi(v, w) = c(v + w)\varphi_v'(v, w) + \frac{1}{2} B \varphi_w''(v, w).$$

Завершение доказательства теоремы реализируется по схеме доказательства теоремы 2.1 в [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулированная теорема расширяет возможности исследования флуктуаций эволюционных систем около точки равновесия на случай зависимого от эволюции сингулярного возмущения эволюционной системы. Полученый результат позволяет углубить анализ флуктуаций процедуры стохастической аппроксимации около точки равновесия при изучении условий оптимизации стохастических систем [4], а также процедуры стохастической аппроксимации [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chabaniuk Y., Koroliuk V.S., Limnius N. Fluctuation of stochastic system with average equilibrium point. — Paris: Academ. Sci., 2007. — P. 405–410.
2. Korolyuk V.S. Stability of stochastic systems in diffusion approximaiton scheme // Ukr. Math. J. — 1998. — **50**, N 1. — P. 36–47.
3. Korolyuk V.S., Limnius N. Stochastic systems in merging phase space. — Dordrecht: World Sci., 2005. — 330 p.
4. Ljung L., Pflung G., Walk H. Stochastic approximation and optimization of random systems. Basel: Birkhauser Verlag, 1992. — 113 p.
5. Чабанюк Я.М. Непрерывная процедура стохастической аппроксимации с сингулярным возмущением в условиях баланса // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 3. — С. 1–7.

Поступила 03.04.2008