

А. О. Камінський, М. Ф. Селіванов, Ю. О. Чорноіван

## Дослідження переміщення берегів двох колінеарних тріщин рівної довжини

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

*Розглянуто задачу нелінійної механіки руйнування про визначення переміщення берегів двох колінеарних тріщин у пружному ізотропному нескінченному тілі під дією рівномірного сталого навантаження на нескінченності, прикладеного перпендикулярно до лінії тріщин. Побудовано графіки залежностей переміщень берегів тріщини та розкриття у фізичній вершині тріщини від геометричних параметрів задачі.*

Вивченню напружено-деформованого стану нескінченного пружного ізотропного тіла, послабленого колінеарними тріщинами, під дією нормального до ліній тріщин навантаження присвячено роботи [1–3] та ін. Для постановки задач механіки руйнування у цих роботах було використано модель з урахуванням зон нелінійної поведінки матеріалу у вершині тріщини. Однак поза увагою дослідників залишилося визначення переміщення берегів тріщини, що є важливим для вивчення питань поширення тріщини.

Нехай у пружному нескінченному ізотропному тілі вздовж однієї прямої розташовано систему двох тріщин, що перебувають під дією однорідного напруження  $p$ , прикладеного на нескінченності перпендикулярно до лінії тріщин. Введемо ортогональну декартову систему координат, вісь  $x$  якої спрямуємо вздовж лінії тріщин (рис. 1).

Згідно з моделлю Леонова–Панасюка–Дагдейла, вважатимемо, що області нелінійної поведінки матеріалу в околі вершин тріщин можна замінити розрізами, до берегів яких прикладено стискаючі напруження інтенсивністю  $\sigma_0$ . Відповідні позначення наведені на рис. 1.

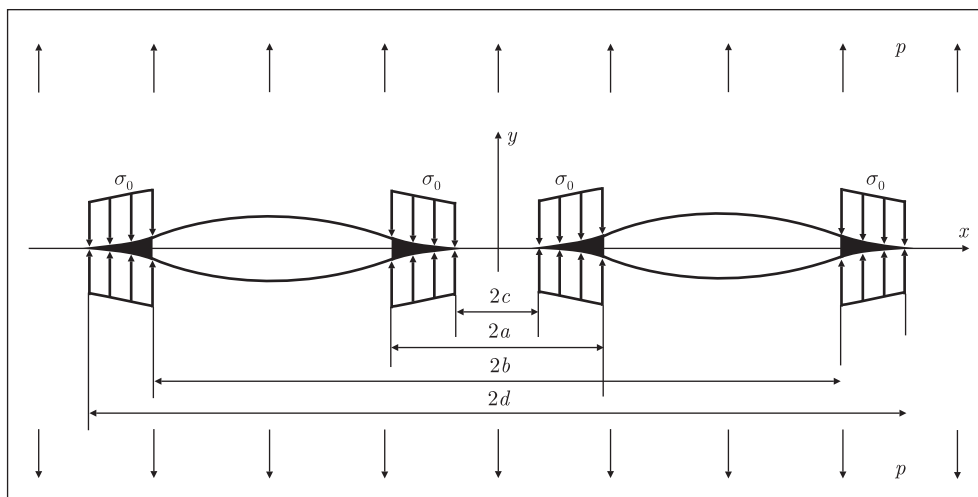


Рис. 1

Запишемо граничні умови поставленої задачі

$$\begin{aligned} v = 0, \quad \tau_{12} = 0 \quad \text{при} \quad |x| < c \cup |x| > d, \\ \sigma_{22} = \sigma_0, \quad \tau_{12} = 0 \quad \text{при} \quad c \leq x < a \cup b < |x| \leq d, \\ \sigma_{22} = -p, \quad \tau_{12} = 0 \quad \text{при} \quad a \leq |x| \leq b, \end{aligned}$$

причому координати кінців розрізів слід визначати з умови скінченності напружень у вершинах тріщин.

Для визначення умов пружної рівноваги та деформованого стану матеріалу навколо тріщини важливим є встановлення залежності між навантаженням на тріщину, геометричними параметрами тріщини та її розкриттям.

Загальний розв'язок задачі для площини з прямолінійними розрізами в роботі [4] дається двома комплексними функціями  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\overline{\Omega(\bar{z})} - \Phi(z) - (z - \bar{z})\Phi'(z)], \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\kappa = (3\lambda + \mu)/(\lambda + \mu)$ ;  $\lambda$  та  $\mu$  — параметри Ламе матеріалу пластини,

$$\omega(z) = \int \Omega(z) dz, \quad \varphi(z) = \int \Phi(z) dz.$$

Функції  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  для розглянутої задачі визначені в роботі [1] і мають вигляд

$$\Phi(z) = \Omega(z) - \frac{p}{2} = -\frac{\sigma_0}{\pi i} \ln U(z) - \frac{p}{4}, \quad (2)$$

де

$$U(z) = \ln \frac{(d_a z_c + a_c d_z) b_z}{(d_b z_c + b_c d_z) z_a},$$

а  $d_a^2 = d^2 - a^2$ ,  $z_c^2 = z^2 - c^2$  тощо,  $d_a = \sqrt{d_a^2}$ ,  $z_c = \sqrt{z_c^2}$  тощо.

Для забезпечення обмеженості і неперервності напружень у точках  $z = \pm c$  і  $z = \pm d$  покладено

$$\begin{aligned} d_c^2 \cos^2 \rho_1 &= a_c^2 + b_c^2 - 2a_c b_c \sin \rho_1, \\ d_a a_c \left[ F(k) + \frac{a^2}{d_a^2} \Pi\left(-\frac{d_c^2}{d_a^2}, k\right) \right] &= d_b b_c \left[ F(k) + \frac{b^2}{d_b^2} \Pi\left(-\frac{d_c^2}{d_b^2}, k\right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

де  $F(k)$  і  $\Pi(n, k)$  — еліптичні інтеграли першого і третього роду відповідно,

$$\rho_1 = \frac{\pi}{2\rho_2}, \quad \rho_2 = \frac{\sigma_0}{p} —$$

силові параметри.

Рівняння (3) враховано при отриманні виразів (2) і використано для знаходження зовнішніх границь зон нелінійної поведінки матеріалу  $c$  і  $d$ .

При  $c = 0$  і  $a > 0$  з першого з рівнянь (3) можна визначити  $d$ :

$$d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \rho_1}}{\cos \rho_1},$$

друге рівняння при цьому перетвориться на нерівність

$$\frac{bd}{ab} \leq \operatorname{ch} \left( \frac{b}{a} \operatorname{arch} \frac{d}{b} \right),$$

яка є умовою додатності вертикального переміщення в точці початку координат.

Вертикальне переміщення для випадку  $c > 0$  отримаємо з (1) підстановкою функцій  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  з (2):

$$v(x) = \frac{\rho_3 p}{E} \operatorname{Re} \int_c^x U(z) dz, \quad \rho_3 = \frac{4\rho_2}{\pi}, \quad (4)$$

де  $E$  — модуль Юнга матеріалу пластини.

Позначимо  $\tilde{v} = Ev/\rho_3 p$  і проінтегруємо в (4). Отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x) &= xU_1(x) - q_a \Pi_a(x) + q_b \Pi_b(x), \\ U_1(x) &= \operatorname{Re} U(x) = \ln \frac{(d_a x_c + a_c d_x) \sqrt{|b_x^2|}}{(d_b x_c + b_c d_x) \sqrt{|x_a^2|}}, \\ q_a &= \frac{d_a c^2}{d a_c}, \quad \Pi_a(x) = \Pi(\varphi(x), -n_a, k), \quad n_a = \frac{d_c a^2}{d^2 a_c^2}; \\ q_b &= \frac{d_b c^2}{d b_c}, \quad \Pi_b(x) = \Pi(\varphi(x), -n_b, k), \quad n_b = \frac{d_c b^2}{d^2 b_c^2}. \end{aligned}$$

Тут  $\Pi(\varphi, n, k)$  — неповний еліптичний інтеграл третього роду,

$$\varphi(x) = \arcsin \left( \frac{x x_c}{k} \right), \quad k = \frac{d_c}{d}.$$

При  $x = a$  і  $x = b$ , відповідно, отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{v}(a) &= a \ln \frac{d_a(a+c)b_a}{(d_b a_c + b_c d_a)a} + \frac{b}{2} \ln \frac{(a+b)(b-c)}{(b-a)(b+c)} - dE_a \left( \frac{d_a}{a_c} - \frac{d_b}{b_c} \right) + \frac{d_a^2}{a} - \frac{d_a d_b a_c}{a b_c} + \\ &\quad + d_c^2 \left( \frac{I_{aa}}{a_c} - \frac{I_{ba}}{b_c} \right), \\ \tilde{v}(b) &= b \ln \frac{(d_a b_c + a_c d_b)b}{d_b(b+c)b_a} + \frac{a}{2} \ln \frac{(b-a)(a+c)}{(a+b)(a-c)} - dE_b \left( \frac{d_a}{a_c} - \frac{d_b}{b_c} \right) + \frac{d_a d_b b_c}{b a_c} - \frac{d_b^2}{b} + \\ &\quad + d_c^2 \left( \frac{I_{ab}}{a_c} - \frac{I_{bb}}{b_c} \right), \\ E_a &= E(\varkappa_a, k), \quad \varkappa_a = \arcsin \frac{a_c}{a k}, \quad E_b = E(\varkappa_b, k), \quad \varkappa_b = \arcsin \frac{b_c}{b k}, \end{aligned}$$

де  $E(\varphi, k)$  — неповний еліптичний інтеграл другого роду,

$$I_{aa} = \int_c^a \frac{x^2 dx}{d_x(d_a x_c + a_c d_x)}, \quad I_{ba} = \int_c^a \frac{x^2 dx}{d_x(d_b x_c + b_c d_x)},$$

$$I_{ab} = \int_c^b \frac{x^2 dx}{d_x(d_a x_c + a_c d_x)}, \quad I_{bb} = \int_c^b \frac{x^2 dx}{d_x(d_b x_c + b_c d_x)}.$$

Вертикальне переміщення для випадку  $c = 0$  (внутрішні зони нелінійної поведінки матеріалу об'єднані) матиме вигляд

$$\tilde{v}(x) = \operatorname{Re} \int_d^x U(z) dz.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\tilde{v}(x) = x \ln \frac{(d_a x + a d_x) \sqrt{|b_x^2|}}{(d_b x + b d_x) \sqrt{|x_a^2|}} + \frac{a}{2} \ln \frac{|d_x - d_a|}{d_x + d_a} - \frac{b}{2} \ln \frac{|d_x - d_b|}{d_x + d_b}.$$

При  $x = a$  та  $x = b$ , відповідно, отримаємо

$$\tilde{v}(a) = a \ln \frac{a b_a}{d_b a + b d_a} + \frac{b}{2} \ln \frac{d_a + d_b}{d_a - d_b};$$

$$\tilde{v}(b) = \frac{a}{2} \ln \frac{d_a - d_b}{d_a + d_b} + b \ln \frac{d_a b + a d_b}{b b_a}.$$

При  $a = 0$  одержуємо переміщення берегів тріщини довжиною  $2b$

$$\tilde{v}(x) = x \ln \frac{d \sqrt{|b_x^2|}}{d_b x + b d_x} - \frac{b}{2} \ln \frac{|d_x - d_b|}{d_x + d_b}. \quad (5)$$

Покладаючи  $x = b$  в розв'язку (5), отримаємо переміщення в кінці фізичної тріщини довжиною  $2b$ :

$$\tilde{v}(b) = b \ln \frac{d}{b}.$$

Проведемо чисельний аналіз одержаних результатів.

На рис. 2 наведено залежності від координати вертикального переміщення для п'ятих геометричних конфігурацій тріщин. Для кожної з конфігурацій  $b = 1$ , а для параметра  $a$  вибрано такі значення: 1)  $a = 0,4$ ,  $a = 0,2$  — для цих двох випадків  $c > 0$ ; 2)  $a = 0,1$ ,  $a = 0,05$  — для цих двох випадків зони нелінійної поведінки матеріалу з'єднуються; 3)  $a = 0$  — зона нелінійної поведінки матеріалу, що розташована між тріщинами, зникає. Крапками на рисунку для кожної з тріщин позначені переміщення в точках  $a$  і  $b$ .

Проведемо аналіз взаємного впливу тріщин. Розв'язки отримаємо для  $\rho_2 = 3$ .

На рис. 3 проілюстровано вплив на вертикальне переміщення в кінцях фізичних тріщин відстані між ними. Покладаємо довжини тріщин рівними одиниці і обчислюємо вказані

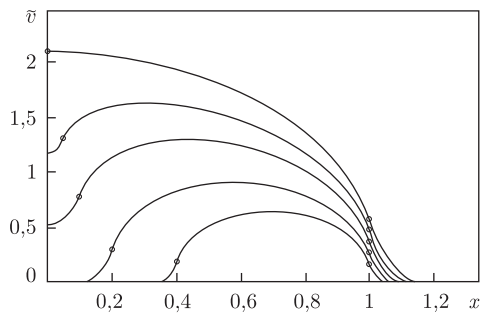


Рис. 2

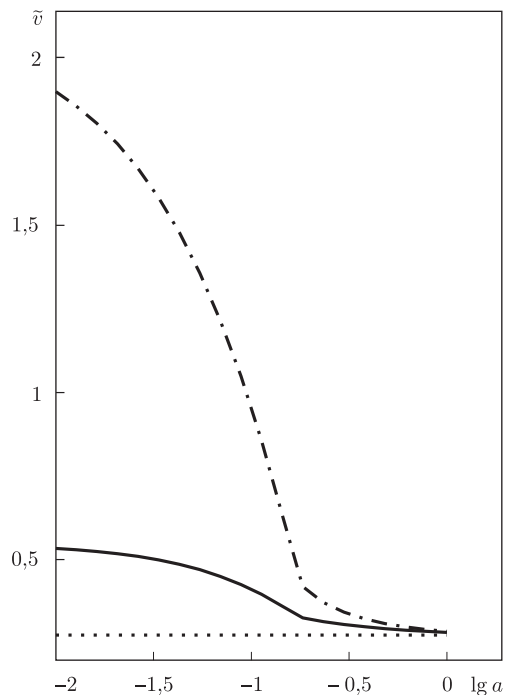


Рис. 3

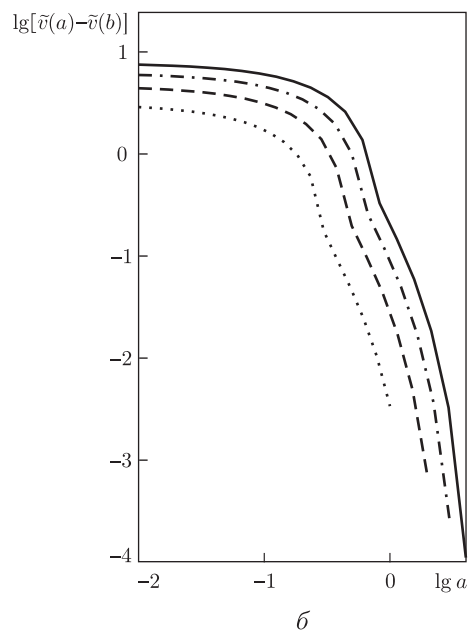
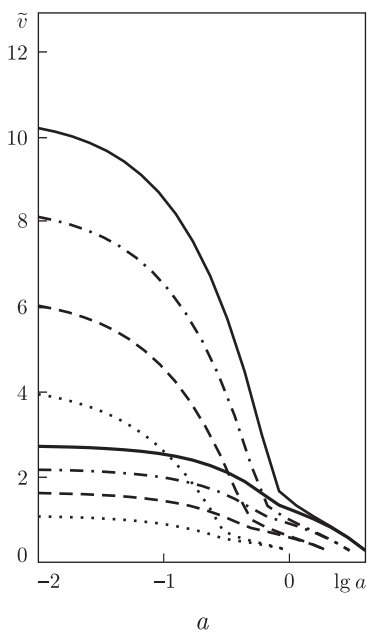


Рис. 4

переміщення залежно від розташування точки  $a$ . Штрихпунктирна крива відповідає переміщенню в точці  $a$ , суцільна — в точці  $b = a + 1$ . Пунктирна пряма відповідає переміщенню, обчисленому при відсутності другої тріщини (вираз (5) при напівдовжині, що дорівнює  $(b - a)/2 = 1/2$ ). При  $a = 1$  розбіжності по переміщеннях в кінцях фізичної тріщини порівняно з тріщиною такої ж довжини при відсутності другої тріщини становлять 4,19%

(в точці  $a$ ) і 2,96% (в точці  $b$ ), при  $a = 2$  ці розбіжності становлять 1,32 і 1,08%, при  $a = 3$  – 0,65 і 0,56%.

На рис. 4 зображено залежності вертикального переміщення в кінцях фізичної тріщини (блок  $a$ ) та різниці між цими переміщеннями (блок  $b$ ) від положення точки  $a \in (0, b - 1)$  для значень  $b = 2$  (пунктирні криві),  $b = 3$  (штрихові криві),  $b = 4$  (штрихпунктирні криві) і  $b = 5$  (суцільні криві). Жирні криві блока  $a$  відповідають переміщенню в точці  $b$ .

Наведені дані можуть бути використані для якісного аналізу необхідності застосування у реальних інженерних задачах моделей з багатьма осередками руйнування, а також для досліджень довготривалого поширення та злиття тріщин в елементах конструкцій.

1. *Витвицкий П. М.* Полосы скольжения при растяжении тонких пластин с прямолинейными разрезами // Концентрация напряжений. – Киев: Наук. думка, 1965. – С. 77–85.
2. *Collins R. A., Cartwright D. J.* An analytical solution for two equal-length collinear strip yield cracks // Eng. Fract. Mech. – 2001. – **68**. – P. 915–924.
3. *Nishimura T.* Strip yield analysis of two collinear unequal cracks in an infinite sheet // Ibid. – 2002. – **69**. – P. 1173–1191.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 31.01.2011*

**A. A. Kaminsky, M. F. Selivanov, Yu. O. Chornoivan**

### **Study of a displacement of crack edges for two collinear cracks of equal length**

*We study the non-linear fracture mechanics problem of elastic crack opening for two collinear cracks in an isotropic infinite body under the uniform constant loading applied transversally to the crack line. Results are shown as the plots of the crack opening along the crack length and at the physical ends versus the geometric parameters of the problem.*