Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2011

УДК 519.81

В. М. Михалевич

К критерию при многократном выборе решения

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Чикрием)

Отримано розв'язок проблеми невизначеності задачі багаторазових рішень для досить широкого класу правил вибору переваг в системі прийняття рішень у вигляді переваг на рішеннях, які задаються функцією корисності, параметрично залежної від опуклої статистичної закономірності на множині станів і функції корисності на наслідках, що визначається з точністю до додатного лінійного перетворення.

Рассмотрим многократный выбор решения для задач решения (ЗР) в необайесовской форме, определяемых в [1]. Напомним некоторые определения.

Для произвольного векторного пространства V введем отношение эквивалентности ($\overset{\mathrm{co}}{\approx}$) на 2^V следующим образом. Для любых $X, Y \subseteq V$

$$X \overset{\mathrm{co}}{\approx} Y \Leftrightarrow \mathrm{co}\, X = \mathrm{co}\, Y. \tag{1}$$

Определение 1. *Статистической закономерностью на* Θ, где Θ — произвольное множество с заданной алгеброй подмножества Σ (если Σ не задается, то считается, по умолчанию, что $\Sigma = 2^{\Theta}$) называется всякое непустое замкнутое множество P в топологии $\tau(\Theta)$ пространства

$$PF(\Theta) := \{p \in ([0,1])^{\Sigma} \colon p(\Theta) = 1,\ p(C \bigcup D) = p(C) + p(C \setminus D), \forall\, C, D \in \Sigma\} \tag{2}$$

всех аддитивных вероятностных мер на Θ, являющейся следом * — слабой топологии в сопряженном к банаховому пространству $B_{\Sigma}(\Theta)$ с нормой $\|f\| := \sup\limits_{\theta\in\Theta} |f(\Theta)|$. Семейство всех статистических закономерностей на Θ будем обозначать $P(\Theta)$.

Ясно, что в топологии $\tau(\Theta)$ пространство $PF(\Theta)$ компактно.

Рассмотрим класс ССЗР с заданными отношениями предпочтений на соответствующих множествах последствий. Тогда каждой такой параметрической ССЗР этого класса соответствует упорядоченная четверка вида $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g)$, где $(\succcurlyeq)$ — соответствующее отношение предпочтения на последствиях этой СЗР. Через $\mathbf{Z}$ обозначим класс всех

ССЗР вида $\mathcal{Z}$. Также введем обозначения: $\mathbf{Z}((X, \succcurlyeq)) := \{((X, \succcurlyeq), \cdot, \cdot, \cdot) \in \mathbf{Z}\}$, $\mathbf{Z}((X, \succcurlyeq), \Theta) := = \{((\cdot, \cdot), \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbf{Z}(X, \succcurlyeq)\}$.

Определение 2. *Проекцией* ССЗР класса $\mathbf{Z}$ называется такое отображение Пр: $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, что для любой ССЗР $((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}$ имеем Пр$(((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) = (X, \Theta, U, g)$.

Рассмотрим теперь задачу многократных решений (ЗМР) в классе ССЗР $\mathbb{Z}(Y, \Theta)$ (см. [1]).

Определение 3. Моделью ПВП для ЗМР, сокращенно МПВП (Ω-параметрической МПВП, сокращенно Ω-МПВП) в $\mathbb{Z}'(X, \Theta) \subseteq \mathbb{Z}(X, \Theta)$ будем называть конечную совокупность условий (аксиом) **У** на ПВП в ЗМР для $\mathbb{Z}'(X, \Theta)$, которые задают единственный ПВП (в зависимости от параметра $\omega \in \Omega$, где Ω — множество значений параметра ω), и обозначать $[\mathbf{Y}]$ для ЗМР в классе $\mathbb{Z}'(Y, \Theta)$ (с параметром $\omega \in \Omega$).

Определим класс ПВП в ЗМР для $\mathbb{Z}'(Y, \Theta) \subseteq \mathbb{Z}(Y, \Theta)$, который будем обозначать через $\Pi_0^\infty(\mathbb{Z}'(Y, \Theta))$, как подкласс всех таких ПВП $\pi \in \Pi^\infty(\mathbb{Z}'(Y, \Theta))$, что для любой определяющей ССЗР $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(Y, \Theta)$ (см. [1]) выполняются условия:

Y1) если $Z_i = (Y, \Theta, U_i, g_i) \in \mathbb{Z}'(Y, \Theta)$, $i = \overline{1, 2}$, то

а) $(Y, \succcurlyeq_{Z_1}) = (Y, \succcurlyeq_{Z_2}) =: (Y, \succcurlyeq)$ — невырожденное, т. е. не для всех y_1, $y_2 \in Y$ выполняется $y_1 \succcurlyeq y_2$,

б) из $(y_1)_\Theta \succcurlyeq^*_Z (y_2)_\Theta$ следует $y_1 \succcurlyeq y_2$ $\forall\, y_1$, $y_2 \in Y$,

в) из u_1, $v_1 \in U_1$, u_2, $v_2 \in U_2$, $g_1(\theta, u_1) = g_2(\theta, u_2)$, $g_1(\theta, v_1) = g_2(\theta, v_2)$ $\forall\, \theta \in \Theta$, $u_1 \succcurlyeq^*_{Z_1} v_1$ следует $u_2 \succcurlyeq^*_{Z_2} v_2$;

Y2) $(U^\infty, \succcurlyeq^*_Z)$ — нестрогий порядок;

Y3) если $u_i \in U$, $i = \overline{1, 2}$, $y \in Y$, $u_1 \succ^*_Z u_2$, $\alpha \in (0, 1)$, то

$$\alpha u_1 + (1 - \alpha) y_\Theta \succ^*_Z \alpha u_2 + (1 - \alpha) y_\Theta;$$

Y4) если $u_i \in U$, $i = \overline{1, 3}$, $u_1 \succ^*_Z u_2 \succ^*_Z u_3$, то найдутся такие α, $\beta \in (0, 1)$, что

$$\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_3 \succ^*_Z u_2 \succ^*_Z \beta u_1 + (1 - \beta) u_3;$$

Y5) если $\overline{u}$, $\overline{v} \in U^\infty$, $\overline{u} = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} u_i$, $\overline{v} = \bigoplus\limits_{j=1}^{l} v_j$ и $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} g(\theta, u_i) \succcurlyeq_Z \bigoplus\limits_{j=1}^{l} g(\theta, v_j)$ для любых $k, l \in \mathbb{N}$, $\theta \in \Theta$, то

$$\overline{u} \succcurlyeq^*_Z \overline{v};$$

Y6) если $u_i \in U$, $y_i \in Y$, $i = \overline{1, 2}$, то

$$u_1 \oplus u_2 \sim^*_Z u_2 \oplus u_1, \qquad y_1 \oplus y_2 \sim_Z y_2 \oplus y_1;$$

Y7) если $\overline{u}_i \in U^\infty$, $\overline{y}_i \in Y^\infty$, $i = \overline{1, 4}$, то из $\overline{u_1} \sim^*_Z \overline{u}_2$ следует, что $\overline{u}_3 \oplus \overline{u}_1 \succcurlyeq^*_Z \overline{u}_4 \oplus \overline{u}_2$ равносильно $\overline{u}_3 \succcurlyeq^*_Z \overline{u}_4$, а из $\overline{y_1} \sim^*_Z \overline{y}_2$ следует, что $\overline{y}_3 \oplus \overline{y}_1 \succcurlyeq^*_Z \overline{y}_4 \oplus \overline{y}_2$ равносильно $\overline{y}_3 \succcurlyeq^*_Z \overline{y}_4$;

Y8) если $\overline{u}_i \in U^\infty$, $\overline{y}_i \in Y^\infty$, $i = \overline{1, 4}$, то из $\overline{u_1} \succcurlyeq^*_Z \overline{u}_2$ следует, что найдется такое натуральное n, для которого

$$(n \otimes \overline{u}_1) \oplus \overline{u}_3 \succ^*_Z (n \otimes \overline{u}_2) \oplus \overline{u}_4,$$

а из $\overline{y_1} \succcurlyeq^*_Z \overline{y}_2$ следует, что найдется такое натуральное n, для которого

$$(n \otimes \overline{y}_1) \oplus \overline{y}_3 \succ^*_Z (n \otimes \overline{y}_2) \oplus \overline{y}_4;$$

Y9) если $u_i \in U$, $i = \overline{1,3}$, то из

$$g(\theta, u_1) \oplus g(\theta, u_2) \sim_Z 2 \otimes g(\theta, u_3) \qquad \forall\, \theta \in \Theta \tag{3}$$

следует, что

$$2 \otimes u_3 \succcurlyeq^*_Z u_1 \oplus u_2. \tag{4}$$

Далее для произвольного непустого множества A определим в функциональном пространстве $\mathbb{R}^A$ отношение эквивалентности $(\overset{\mathrm{m}}{\approx})$ следующим образом. Для любых f, $g \in \mathbb{R}^A$

$$f \overset{\mathrm{m}}{\approx} g \Leftrightarrow f = mg, \qquad m \in \mathbb{R}, \qquad m > 0. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение соответствие $\chi^\infty_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}$ из $\mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx} \times P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}$ в $\Pi^\infty(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$, где $P(\Theta)$ — семейство всех статистических закономерностей на Θ, а $(\overset{\mathrm{co}}{\approx})$ — эквивалентность, введенная согласно (1). Это соответствие определяется следующим образом. Если $\omega \in \widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx}$, $P \in \widetilde{P} \in P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}$, $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(Y,\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(Y,\Theta)$, то $\chi^\infty_{\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega, P) := (\chi^\infty_{1\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega, P), \chi^\infty_{2\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega, P))$, а $[\chi^\infty_{1\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega, P)](Z) := (Y^\infty, \succcurlyeq_Z)$, $[\chi^\infty_{2\mathbb{Z}'(Y,\Theta)}(\omega, P)](Z) := (U^\infty, \succcurlyeq^*_Z)$ и при этом для любых $\theta \in \Theta$ и для любых $m', n'_i \in \mathbb{N}$, $x'_{ij} \in X$, $\alpha'_{ij} \in [0,1]$, $u'_i \in U$, если $j = \overline{1, n'_i}$, $\sum\limits_{j=1}^{n'_i} \alpha'_{ij} = 1$, $g(\theta, u'_i) = \sum\limits_{k=1}^{l(\theta,u'_i)} \beta_k(\theta, u'_i) g_k(\theta, u'_i)$, $\sum\limits_{k=1}^{l(\theta,u'_i)} \beta_k(\theta, u'_i) = 1$, $\beta_k(\theta, u'_i) \in [0,1]$, $g_k(\theta, u'_i) \in X$, $k = \overline{1, l(\theta, u'_i)}$, $l(\theta, u'_i) \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, m'}$, а также для любых $m'', n''_i \in \mathbb{N}$, $x''_{ij} \in X$, $\alpha''_{ij} \in [0,1]$, $u''_i \in U$, если $j = \overline{1, n''_i}$, $\sum\limits_{j=1}^{n''_i} \alpha''_{ij} = 1$, $g(\theta, u''_i) = \sum\limits_{k=1}^{l(\theta,u''_i)} \beta_k(\theta, u''_i) g_k(\theta, u''_i)$, $\sum\limits_{k=1}^{l(\theta,u''_i)} \beta_k(\theta, u''_i) = 1$, $\beta_k(\theta, u''_i) \in [0,1]$, $g_k(\theta, u''_i) \in X$, $k = \overline{1, l(\theta, u''_i)}$, $l(\theta, u''_i) \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, m''}$ выполняются соотношения:

$$\bigoplus_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'_i} \alpha'_{ij} x'_{ij} \succcurlyeq_Z \bigoplus_{i=1}^{m''} \sum_{j=1}^{n''_i} \alpha''_{ij} x''_{ij} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'_i} \alpha'_{ij} \omega(x'_{ij}) \geqslant \sum_{i=1}^{m''} \sum_{j=1}^{n''_i} \alpha''_{ij} \omega(x''_{ij}), \tag{6}$$

$$\bigoplus_{i=1}^{m'} u'_i \succcurlyeq^*_Z \bigoplus_{i=1}^{m''} u''_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m'} \min_{p \in P} \int\limits_\Theta \sum_{k=1}^{l(\theta,u'_i)} \beta_k(\theta, u'_i) \omega(g_k(\theta, u'_i)) p(d\theta) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m''} \min_{p \in P} \int\limits_\Theta \sum_{k=1}^{l(\theta,u''_i)} \beta_k(\theta, u''_i) \omega(g_k(\theta, u''_i)) p(d\theta). \tag{7}$$

Теорема 1. *Для любого класса ССЗР* $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$

$$\Pi^\infty_0(\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)) = \chi^\infty_{\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx}, P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx})$$

и всякое ПВП $\pi \in \Pi^\infty_0(\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta))$ *можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВП* $\overline{\pi} \in \Pi^\infty_0(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$, *при этом* $\chi^\infty_{\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}$ *является инъекцией и*

$$\Pi^\infty_0(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)) = \chi^\infty_{\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)}(\mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx}, P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}).$$

Следствие 1. *Для любого класса* $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ *условия* **Y1–Y9** *на ПВП для ЗМР в классе* $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$ *представляют собой* $\mathbb{R}^X \diagup \overset{\mathrm{m}}{\approx} \times P(\Theta) \diagup \overset{\mathrm{co}}{\approx}$ *— МПВП для ЗМР в классе* $\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$*, т. е.* (**Y1–Y9**) *для ЗМР в* $\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ *с параметрами* $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X \diagup \overset{\mathrm{m}}{\approx}$ *и* $P \in P(\Theta) \diagup \overset{\mathrm{co}}{\approx}$*, при этом разным значениям параметров* $\widetilde{\omega}$ *и* P *соответствуют несовпадающие ПВП.*

Следствие 2. *МСЗР* $M = (Y,\Theta,U,g,P)$*, где* $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$*, а закономерность* $P \in P(\Theta) \diagup \overset{\mathrm{co}}{\approx}$ *является полным математическим описанием ситуации для* (**Y1–Y9**) *для ЗМР в* $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$ *с параметрами* $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X \diagup \overset{\mathrm{m}}{\approx}$ *и* $P \in P(\Theta) \diagup \overset{\mathrm{co}}{\approx}$*.*

Другими словами, ТПРы с ПВП из класса $\Pi_0^\infty(\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta))$ в ситуации с одинаковой моделью имеют одинаковые отношения предпочтений на решениях, при условии совпадения их отношений предпочтений на последствиях.

Теорема 2. *Для произвольного класса ССЗР* $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$ *всякое ПВП* $\pi \in \Pi_{21}(\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta))$ *можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВП* $\overline{\pi} \in \Pi_0^\infty(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$*.*

Далее, если через $\Pi_{21}^\infty(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$ обозначим класс таких ПВП в ЗМР для $\mathbb{Z}'(Y,\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(Y,\Theta)$, что для любой определяющей ССЗР $Z = (Y,\Theta,U,g) \in \mathbb{Z}'(Y,\Theta)$ выполняются условия **Y1–Y8**, то расширяя на Y^∞ и U^∞ функции полезности, определяющие предпочтения на Y и U соответственно, в силу условий **Y1–Y5**, согласно теореме 6 (см. [2]), требуя выполнения соотношений для любого $\overline{u} \in U^\infty$, где $\overline{u} = u_1 \oplus \cdots \oplus u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\omega_{U^\infty}(\overline{u}) = \omega_{U^\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \omega_U(u_i), \tag{8}$$

а также для любых $y_j \in Y$, $j = \overline{1,m}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\omega_{Y^\infty}\left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \omega_Y(y_j), \tag{9}$$

мы приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Для произвольного класса ССЗР* $\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)$

$$\Pi_{21}^\infty(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)) = \Pi_0^\infty(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta)).$$

Доказательство следует из определения $\Pi_{21}^\infty(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(Y,\Theta))$ и теоремы 2.

Доказанная теорема является в некотором смысле обобщением для ЗМР результатов И. Гильбоа и Д. Шмейдлера (см. [3, с. 145]).

1. *Михалевич, В. М.* Многократный выбор решения при наличии одной из форм принципа гарантированного результата // Доп. НАН України – 2011. – № 8. – С. 43–47.
2. *Михалевич, В. М.* О некоторых классах правил выбора предпочтений в задачах принятия решений // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 6. – С. 140–154.
3. *Gilboa I., Schmeidler D.* Maxmin expected utility with non-unique prior // J. of Math. Economics. – **18**. – P. 141–153.

НУ "Киево-Могилянская академия", Киев

Поступило в редакцию 24.03.2011

V. M. Mykhalevich

To the criterion when selecting multiple solutions

We obtain a solution of the fundamental problem of multiple solutions for a sufficiently broad class of rules of choosing preferences in decision-making systems without memory with a criterion which bijectively corresponds to a convex statistical regularity on the set of states and the utility function on the consequences, which is determined up to a positive linear transformation.