

А. П. Юрачківський

Узагальнення теореми Арцела–Асколі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Нехай (T, d) — повний псевдометричний простір, а X — сепарабельний збіжнісний простір. Говоримо, що послідовність (f_n) у T^X збігається до $f \in T^X$ рівномірно в точці x , якщо співвідношення $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ справджується для всякої збіжної до x послідовності (x_n) . Показано, що для відносної компактності (f_n) відносно поточково збіжної послідовності необхідною і достатньою є така пара умов: 1) $d(f_n(x_n), f_n(x)) \rightarrow 0$ для будь-яких $x \in X$ і збіжної до x послідовності (x_n) ; 2) існує зліченна послідовнісно цільна множина $X_0 \subset X$ така, що всі послідовності $(f_n(x))$, $x \in X_0$, відносно компактні.

У цьому повідомленні класичну теорему Арцела–Асколі (див., наприклад, [1, 2]) узагальнено в таких напрямках: 1) область визначення відображень — збіжнісний, не обов'язково топологічний, простір; 2) цей простір не обов'язково послідовнісно компактний; 3) відображення не обов'язково послідовнісно неперервні. У такій постановці рівномірна на всьому просторі збіжність перестає бути адекватною, тож розглядаємо слабшу збіжність — поточково рівномірну.

Скрізь нижче (T, d) — псевдометричний простір.

Лема 1. Нехай t_n^k, t_n ($k, n \in \mathbb{N}$) — деякі точки в T . Припустимо, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} d(t_n^k, t_n) = 0 \quad (1)$$

і при кожному k послідовність $(t_n^k, n \in \mathbb{N})$ фундаментальна. Тоді послідовність (t_n) також фундаментальна.

Доведення. Записавши $d(t_n, t_m) \leq d(t_n, t_n^k) + d(t_n^k, t_m^k) + d(t_m^k, t_m)$, одержимо з останнього припущення

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} d(t_n, t_m) \leq 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} d(t_n, t_n^k),$$

після чого фундаментальність (t_n) випливає з (1).

Лема 2. Нехай виконано умови лемати 1 і, крім того, простір T повний. Тоді:

- 1) кожна з послідовностей $(t_n^k, n \in \mathbb{N})$ збігається;
- 2) (t_n) збігається;
- 3) співвідношення

$$t_n \rightarrow t, \quad t_n^k \rightarrow t^k \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

зумовлюють $t^k \rightarrow t$.

Доведення. Перші два твердження випливають із фундаментальності послідовностей $(t_n^k, n \in \mathbb{N})$ і, за лемою 1, (t_n) та повноти T .

Співвідношення $t^k \rightarrow t$ — простий наслідок (1), (2) і нерівності трикутника.

У подальшому X — довільна (до появи додаткових припущень) непорожня множина. Нехай ι — відображення з X у $2^{X^{\mathbb{N}}} \setminus \{\emptyset\}$ (тобто для кожного $x \in X$ $\iota[x]$ — непорожня множина послідовностей в X). Назвемо множину $Y \subset X$ ι -замкнутою, якщо для будь-якого $x \in X$ співвідношення

$$Y^{\mathbb{N}} \cap \iota[x] \neq \emptyset \quad (3)$$

зумовлює $x \in Y$.

Лема 3. *Перетин довільної сукупності ι -замкнутих множин — ι -замкнута множина.*

Доведення. Нехай $Y = \bigcap X_\alpha$, де α пробігає деяку множину позначок, а X_α — ι -замкнуті підмножини X . Тоді $Y^{\mathbb{N}} = \bigcap X_\alpha^{\mathbb{N}}$, що дозволяє переписати (3) у вигляді

$$X_\alpha^{\mathbb{N}} \cap \iota[x] \neq \emptyset \quad \text{при всіх } \alpha.$$

Звідси за припущенням про X_α маємо $x \in X_\alpha$ при всіх α .

Лема 3 дає змогу означити ι -замикання множини $V \subset X$ як найменшу з тих ι -замкнутих підмножин множини X , які містять V . Підмножину, ι -замикання якої співпадає з X , назвемо ι -щільною.

Введемо умови:

A1. При кожному $x \in X_0$ послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна.

A2. Для будь-яких $x \in X$ і $(x_k) \in \iota[x]$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x_k), f_n(x)) = 0. \quad (4)$$

Лема 4. *Нехай X_0 — ι -щільна множина в X , а (f_n) — задовольняюча умови **A1** і **A2** послідовність у T^X . Тоді для будь-якого $x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна.*

Доведення. Позначимо $Y = \{y \in X : (f_n(y)) \text{ фундаментальна}\}$. Потрібно показати, що $Y = X$. А це, з огляду на **A1** і ι -щільність X_0 , рівносильно ι -замкнутості Y .

Нехай $x \in X$, $(x_k) \in Y^{\mathbb{N}} \cap \iota[x]$. Тоді за лемою 1, застосованою до $t_n^k = f_n(x_k)$ і $t_n = f_n(x)$, послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна, тобто $x \in Y$.

Відображення $f: X \rightarrow T$ називатимемо: ι -неперервним у точці $x \in X$, якщо для будь-якої $(x_k) \in \iota[x]$

$$f(x_k) \rightarrow f(x); \quad (5)$$

ι -неперервним на X (але “на X ” розумітиметься за умовчанням), якщо (5) справджується для всіх $x \in X$ і $(x_k) \in \iota[x]$.

Лема 5. *Нехай X_0 — ι -щільна множина в X , а (f_n) — задовольняюча умови **A1** і **A2** послідовність у T^X . Припустимо також, що T повний. Тоді (f_n) поточково збігається і будь-яка границя її — ι -неперервне відображення.*

Доведення. Перше твердження випливає з леми 4 і повноти T .

Нехай $x \in X$, $(x_k) \in \iota[x]$, а f — відображення X у T таке, що

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad f_n(x_k) \rightarrow f(x_k) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тоді лема 2, застосована до $t_n^k = f_n(x_k)$, $t^k = f(x^k)$, $t_n = f_n(x)$ і $t = f(x)$, стверджує (5).

Пригадаймо, що послідовність у наділеній збіжністю (топологічною, порядковою чи заданою аксіоматично) множині називається *відносно компактною* (в. к.), якщо кожна її підпослідовність містить збіжну підпослідовність.

Лема 6. Нехай (f_n) — задовольняюча умову **A2** послідовність у T^X . Припустимо також, що існує зліченна ι -щільна множина $X_0 \subset X$ така, що для будь-якого $x \in X_0$ послідовність $(f_n(x))$ в.к. Тоді (f_n) в.к. відносно поточної збіжності і кожна часткова границя її — ι -неперервне відображення.

Доведення. Занумеруємо будь-які елементи множини X_0 і позначимо m -й елемент через y_m . Нехай J_0 — довільна нескінченна множина натуральних чисел. За припущенням для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує нескінченна множина $J_{m-1} \subset J_m$ така, що послідовність $(f_n(y_m), n \in J_m)$ збігається. Позначимо J множину, m -й елемент якої такий же, як у J_m . Тоді для будь-якого $y \in X_0$ послідовність $(f_n(y), n \in J)$ збігається. При цьому за умовою **A2** для всіх $x \in X$ і $(x_k) \in \iota[x]$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty, n \in J} d(f_n(x_k), f(x)) = 0.$$

Тоді за лемою 5 послідовність $(f_n, n \in J)$ поточно збігається і будь-яка границя її — ι -неперервне відображення.

Назвемо *збіжнісним простором* пару $(X, \text{снвг})$, де X — непорожня множина, а снвг — відображення X у $2^{X^{\mathbb{N}}}$ таке, що для кожного $x \in X$ множина $\text{снвг}[x]$ має властивості:

- (i) $(x, x, \dots) \in \text{снвг}[x]$;
- (ii) якщо $\text{снвг}[x]$ містить деяку послідовність, то вона містить і всі її підпослідовності;
- (iii) якщо $(y_k) \in \text{снвг}[x]$ і

$$x_n = y_k \quad \text{при} \quad n_{k-1} < n \leq n_k, \tag{6}$$

де $n_0 = 0$, а (n_k) — строго зростаюча послідовність натуральних чисел, то $(x_n) \in \text{снвг}[x]$. Останнє співвідношення будемо записувати ще так: $x_n \rightarrow x$ (це не виключає, що $x_n \rightarrow y \neq x$) і читати “ (x_n) збігається x ”, називаючи при цьому x границею (точніше однією з границь) послідовності (x_n) .

У збіжнісних просторах префікс ι - у даних вище означеннях замінюємо словом “послідовнісно”. Наприклад, називатимемо відображення $f: X \rightarrow T$ послідовнісно неперервним у точці x , якщо (5) справджується для будь-якої збіжної до x послідовності (x_k) . Читач легко переформулює лему 3–6 у цих термінах.

У подальшому X означає збіжнісний простір. Назвемо послідовність (f_n) у T^X *асимптотично послідовнісно одностайно неперервною* (а.п.о.н.) у точці x (відповідно, на X , але “на X ”, як правило, випускатиметься), якщо для будь-якої збіжної до x послідовності (відповідно, для всіх $x \in X$ та $(x_n) \in \text{снвг}[x]$) справджується співвідношення

$$d(f_n(x_n), f_n(x)) \rightarrow 0.$$

Говоримо, що послідовність (f_n) у T^X *збігається до f рівномірно в точці x* (відповідно, *поточно рівномірно*), якщо для всякої збіжної до x послідовності (x_n) (відповідно, для всіх $x \in X$ і $(x_n) \in \text{снвг}[x]$) справджується

$$f_n(x_n) \rightarrow f(x). \tag{7}$$

Пригадавши властивість (i) відображення снвг , виводимо з останнього означення таке.

Лема 7. Якщо послідовність (f_n) у T^X збігається до f рівномірно в точці x , то $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Також безпосередньо з даних вище означень випливає

Лема 8. Нехай f, f_1, f_2, \dots — відображення з X у T , а x — точка в X така, що $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Тоді для того щоб послідовність (f_n) збігалась до f рівномірно в точці x , необхідно і достатньо, щоб (f_n) була а. п. о. н. у цій точці.

З останніх двох лем маємо

Наслідок 1. Нехай послідовність (f_n) у T^X в. к. відносно поточково рівномірної збіжності. Тоді вона а. п. о. н. і для кожного $x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ в. к.

Зауваження 1. Стаціонарна послідовність (f, f, \dots) не збігається до f рівномірно в тих точках, у яких f не є послідовнісно неперервною. Тому простір T^X , наділений поточково рівномірною збіжністю, не є, взагалі кажучи, збіжнісим. Але вищенаведене означення відносної компактності застосовне і до цієї збіжності.

Лема 9. Кожна підпослідовність а. п. о. н. (у точці чи на X) послідовності в T^X сама має цю властивість.

Доведення. Припустимо, що послідовність (f_n) у T^X має не а. п. о. н. у точці x підпослідовність. Це те саме, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} d(f_n(z_n), f_n(x)) > c$$

для деяких $c > 0$ і $(z_n) \in \text{snrg}[x]$. Тоді існує строго зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$d(f_{n_k}(y_k), f_{n_k}(x)) > c, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

де $y_k = z_{n_k}$. За вибором (z_n) і властивістю (ii) відображення snrg послідовність (y_k) також збігається до x . Тоді внаслідок (iii) збігається до x і задана рівністю (6) послідовність (x_k) . Переписавши (8) з урахуванням (6) у вигляді

$$d(f_{n_k}(x_{n_k}), f_{n_k}(x)) > c, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

бачимо, що послідовність (f_n) не а. п. о. н. у точці x .

Наслідок 2. Нехай (f_n) — а. п. о. н. у точці x послідовність у T^X . Тоді рівність (4) справджується для всякої збіжної до x послідовності (x_k) .

Доведення. Нехай існують послідовність $(x_k) \in \text{snrg}[x]$ і додатне число c такі, що

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x_k), f_n(x)) > c.$$

Тоді існують нескінченна множина $S \subset \mathbb{N}$ і строго зростаюча послідовність $(n_k, k \in S)$ натуральних чисел такі, що

$$d(f_{n_k}(x_k), f_{n_k}(x)) > c, \quad k \in S. \quad (10)$$

За властивістю (ii) відображення snrg послідовність $(x_k, k \in S)$ також збігається до x . Тому (10) означає, що підпослідовність $(f_{n_k}, k \in S)$ послідовності $(f_n, n \in \mathbb{N})$ не а. п. о. н. у точці x .

Поточково рівномірну збіжність називатимемо ще *твердою*.

Наслідок 3. Будь-яка з границь твердо збіжної послідовності в T^X — послідовнісно неперервне відображення.

Доведення. Нехай (f_n) твердо збігається до f . Тоді за лемою 8 вона а. п. о. н. Тепер співвідношення (5) для довільних $x \in X$ і $(x_k) \in \text{спт}[x]$ випливає з наслідку 2, леми 7 і очевидної нерівності

$$d(f(x_k), f(x)) \leq d(f(x_k), f_n(x_k)) + d(f_n(x_k), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)).$$

Теорема 1. Нехай T — повний псевдометричний простір, X — збіжнісний простір, X_0 — послідовнісно щільна множина в X , а (f_n) — а. п. о. н. послідовність у T^X така, що для будь-якого $x \in X_0$ послідовність $(f_n(x))$ збігається. Тоді (f_n) твердо збігається.

Доведення. Послідовність (f_n) має властивості **A1** (за припущенням) і **A2** (за наслідком 2). Тому лема 5 стверджує, що вона поточково збігається на X . За лемою 8 ця збіжність тверда.

Збіжнісний простір, що містить зліченну послідовнісно щільну підмножину, називати-
мемо послідовнісно сепарабельним (або просто сепарабельним, якщо з контексту зрозуміло,
що розглядається саме збіжнісний простір). Уведемо умову:

A3. Послідовність $(f_n(x))$ в. к. при всіх x із деякої зліченної послідовнісно щільної мно-
жини.

Теорема 2. Нехай T — повний псевдометричний простір, X — сепарабельний збіж-
нісний простір, а (f_n) — а. п. о. н. послідовність у T^X , що задовольняє умову **A3**. Тоді (f_n)
в. к. відносно твердої збіжності.

Доведення. За наслідком 2 послідовність (f_n) задовольняє умову **A2**. Тому лема 6
стверджує, що вона в. к. відносно поточної збіжності. Будь-яка поточково збіжна підпо-
слідовність її за лемою 9 а. п. о. н., відтак, за лемою 8, збігається твердо.

Поєднавши теорему 2 з наслідком 1, одержимо

Наслідок 4. Нехай T — повний псевдометричний простір, X — сепарабельний збіж-
нісний простір. Тоді для того щоб послідовність (f_n) у T^X була в. к. відносно твердої
збіжності, необхідно і достатньо, щоб вона була а. п. о. н. і задовольняла умову **A3**.

Розглядатимемо топологічний простір як збіжнісний, ототожнюючи за умовчанням
 $\text{спт}[x]$ із множиною топологічно збіжних до x послідовностей. Сім'ю всіх оточень точки x
у топологічному просторі X позначаємо $\tau(x)$. Відношення \supset робить її напрямленою мно-
жиною. Границю довільної напрямленості $F: \tau(x) \rightarrow \mathbb{R}$ позначаємо $\lim_{U \in \tau(x)} F(U)$. Очевидним
є таке твердження.

Лема 10. Нехай X — топологічний простір, x — точка в ньому, а (f_n) — послідовність
у T^X така, що

$$\lim_{U \in \tau(x)} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in U} d(f_n(y), f_n(x)) = 0. \quad (11)$$

Тоді (f_n) а. п. о. н. в точці x .

Лема 11. Нехай X — топологічний простір, x — точка в ньому, а (f_n) — задоволь-
няюча умову (11) і потчково збіжна до деякого відображення f послідовність у T^X . Тоді f
неперервна в точці x .

Доведення. Записавши

$$\sup_{y \in U} d(f_n(y), f(x)) = \sup_{y \in U} \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(y), f_n(x)) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in U} d(f_n(y), f_n(x)),$$

дістанемо з (11) $\lim_{U \in \tau(x)} \sup_{y \in U} d(f(y), f(x)) = 0$.

Лема 10, теорема 2 і лема 11 приводять до такого висновку.

Наслідок 5. *Нехай X — послідовно сепарабельний топологічний простір, T — повний псевдометричний простір, а (f_n) — послідовність у T^X , що задовольняє умови **A3** і (11) (останню — при всіх $x \in X$). Тоді (f_n) в.к. відносно твердої збіжності і кожна її границя — неперервне відображення.*

Лема 12. *Нехай X — топологічний простір, а (f_n) — а.п.о.н. у точці $x \in X$ послідовність у T^X . Припустимо, що $\tau(x)$ має конфінальну послідовність $(U_k, k \in \mathbb{N})$. Тоді справджується рівність (11).*

Доведення. Порушення (11) рівносильне, з огляду на конфінальність (U_k) , існуванню додатного числа c такого, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in U_k} d(f_n(y), f_n(x)) > 2c, \quad k \in \mathbb{N}.$$

А це означає існування такої послідовності (n_k) натуральних чисел, що

$$\sup_{y \in U_k} d(f_{n_k}(y), f_{n_k}(x)) > 2c, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Узявши таку точку $x_k \in U_k$, що

$$d(f_{n_k}(x_k), f_{n_k}(x)) > \sup_{y \in U_k} d(f_{n_k}(y), f_{n_k}(x)) - c,$$

приходимо до (9). При цьому $x_k \rightarrow x$, бо $x_k \in U_k$ і послідовність (U_k) конфінальна у $\tau(x)$. Отже, послідовність (f_{n_k}) не а.п.о.н. у x . Тоді за лемою 9 і (f_n) не має цієї властивості.

Наслідок 6. *Нехай X — топологічний простір із першою аксіомою зліченності, а (f_n) — в.к. відносно твердої збіжності послідовність у T^X . Тоді для будь-якого $x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ в.к. і справджується рівність (11).*

Зауваження 2. Наслідки 5 і 6 узагальнюють теорему Арцела–Асколі в частинах достатності і необхідності відповідно.

Для множини $\mathfrak{F} \subset T^X$ і точки $x \in X$ позначимо $\mathfrak{F}(x) = \{f(x), f \in \mathfrak{F}\} \subset T$. Множину $\mathfrak{F} \subset T^X$, де T — топологічний простір, а X — непорожня множина, назовемо *поточково передкомпактною на підмножині $Y \subset X$* (а при $Y = X$ — просто поточково передкомпактною), якщо всі множини $\mathfrak{F}(x)$, $x \in Y$, передкомпактні. У разі якщо X — топологічний, а T — псевдометричний простір, множину $\mathfrak{F} \subset T^X$ називатимемо *одностайно неперервною в точці $x \in X$* , якщо

$$\lim_{U \in \tau(x)} \sup_{f \in \mathfrak{F}} \sup_{y \in U} d(f(y), f(x)) = 0; \tag{12}$$

одностайно неперервною на X (але “на X ” розумітиметься за умовчанням), якщо (12) справджується для всіх $x \in X$. Очевидно, всі елементи одностайно неперервної в точці x множини відображень топологічно неперервні в x . Множину всіх неперервних відображень з X у T позначаємо $C(X \rightarrow T)$. Це збіжнісний простір відносно як поточної, так і твердої збіжності. Назвемо множину в збіжнісному просторі *послідовно компактною (послідовно передкомпактною)*, якщо всяка послідовність її точок містить збіжну до деякої точки цієї множини (відповідно, цього простору) підпослідовність.

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір із першою аксіомою зліченності, T — псевдометричний простір, \mathfrak{F} — послідовно передкомпактна відносно твердої збіжності*

множина в $C(X \rightarrow T)$. Тоді \mathfrak{F} поточково предкомпактна і поточково одностайно неперервна.

Доведення. Візьмемо довільні точку $x \in X$ і послідовність $(f_n) \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$. Остання в.к. відносно твердої збіжності, тож за наслідком 6 послідовність $(f_n(x))$ в.к. А це означає, з огляду на довільність (f_n) , що $\mathfrak{F}(x)$ передкомпактна.

Нехай (U_k) — існуюча за першою аксіомою зліченності конфінальна послідовність у $\tau(x)$. Якщо (12) не справджується, то існують додатне число c і послідовність $(f_n) \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$ такі, що

$$\sup_{y \in U} d(f_n(y), f_n(x)) > c \quad \text{для всіх} \quad U \in \tau(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

З іншого боку, за припущенням про \mathfrak{F} усяка підпослідовність $(f_n, n \in J_0 \subset \mathbb{N})$ містить твердо збіжну підпослідовність $(f_n, n \in J)$. За лемою 12

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty, n \in J} \sup_{y \in U_k} d(f_n(y), f_n(x)) = 0.$$

Тому існує строго зростаюча послідовність $(n_k) \in J^{\mathbb{N}}$ така, що

$$\sup_{y \in U_k} d(f_{n_k}(y), f_{n_k}(x)) \rightarrow 0.$$

А це суперечить (13).

Введемо умову:

A4. \mathfrak{F} поточково передкомпактна на деякій зліченній послідовнісно щільній множині в X .

Теорема 4. Нехай X — послідовнісно сепарабельний топологічний простір, T — повний псевдометричний простір, а \mathfrak{F} — задовольняюча умову **A4** поточково одностайно неперервна множина в T^X . Тоді \mathfrak{F} послідовнісно передкомпактна відносно твердої збіжності.

Доведення. За припущенням про \mathfrak{F} будь-яка послідовність $(f_n) \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$ задовольняє умови 11 (при всіх x) і **A3**. Залишається послатись на наслідок 5.

1. Иосида К. Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.

2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1989. – 624 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 15.12.2010

A. P. Yurachivsky

A generalization of the Arzela–Ascoli theorem

Let (T, d) be a complete pseudometric space and X be a sequentially separable space with axiomatically defined convergence. We say that a sequence (f_n) in T^X converges to $f \in T^X$ uniformly at a point x if the relation $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ holds for every sequence (x_n) converging to x . It is shown that the following pair of conditions is necessary and sufficient for the relative compactness of (f_n) with respect to the pointwise uniform convergence: 1) $d(f_n(x_n), f_n(x)) \rightarrow 0$ for all $x \in X$ and sequences (x_n) converging to x ; 2) there exists a countable sequentially dense set $X_0 \subset X$ such that all the sequences $(f_n(x)), x \in X_0$, are relatively compact.