Д.В. Щербина

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РАСХОДОВ БЮДЖЕТА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕЖВРЕМЕННОГО ОБМЕНА ПОЛЕЗНОСТЯМИ

Постановка проблемы.

В процессе управления часто возникает проблема оптимального распределения средств между текущими потребностями и капиталовложениями. Расходуя ресурсы на текущие потребности, управленец жертвует будущим организации, и наоборот, вкладывая средства в инвестиции, отказывается от удовлетворения части текущих потребностей организации (например, уменьшая выплаты вознаграждений работникам). Проблема поиска оптимального соотношения первого и второго направлений расходов является актуальной для большинства управленцев.

Анализ исследований и публикаций по проблеме.

Современная методология анализа поставленной проблемы основывается, главным образом, на теоретических положениях, выдвинутых представителями австрийской экономической школы. Согласно их взглядам мотивом инвестирования является интерес, который, в свою очередь, обусловлен наличием у субъектов временных предпочтений. Рассмотрим данное суждение подробнее.

Любой субъект *всегда* предпочтет получить доход раньше, чем позже. Поэтому он согласится отложить потребление единицы ресурса ΔQ лишь в том случае, если это принесет в будущем прибавочный продукт $h \cdot \Delta Q$, где h - норма отдачи (производительности) ресурса. Какой же должна быть норма отдачи, чтобы заинтересовать субъекта инвестировать ресурсы? Она должна быть такой, чтобы будущий доход превысил его текущие затраты (издержки ожидания) с учетом дисконтирования. Ставка дисконтирования (i), согласно мнению проф. М. Ротбарда, отражает субъективные временные предпочтения индивида[1] [4]. Чем они выше, тем выше должна быть норма отдачи, чтобы пробудить у субъекта интерес. Следовательно, инвестиции выгодны, если выполняется правило:

$$\Delta Q < h \cdot \Delta Q/(1+i).$$

Таким образом, стремление получать доход раньше, а не позднее, полностью обусловлено субъективным желанием того или иного индивида. И только вследствие вариации субъективных предпочтений у разных субъектов их интерес неодинаков, т.е. их может побудить к инвестициям различная ожидаемая отдача вложений [1-4].

Представляется важным определить, участвуют ли в генезисе интереса[2] и объективные факторы, помимо

[1] Инфляция для удобства анализа изначально принимается равной нулю.

[2] Интерес в данной работе рассматривается как мотив инвестиционной деятельности субъекта.

© Щербина Дмитрий Владимирович – преподаватель.
Государственный университет управления, Донецк.

Цели исследования.

1. Выявление объективных факторов генезиса интереса.

2. Поиск возможностей применения имеющихся знаний об интересе в сфере бюджетного планирования.

Основной материал.

Чтобы ответить на вопрос относительно объективных и субъективных оснований генезиса интереса, рассмотрим пример.

Предположим, что ресурсы, имеющиеся у субъекта А (бюджет), составляют X единиц (скажем, 1000 кг пшеницы). Бюджет субъекта Б – Y единиц (2000 кг пшеницы). Для того, чтобы обеспечить минимально необходимый уровень потребления (прожиточный минимум) в течение года, субъекту А необходимо использовать все свои ресурсы X. Для Б прожиточный минимум обойдется в те же X единиц (1000 кг пшеницы) и у него еще останутся 1000 кг. Теперь предположим, что существует технология, используя которую можно инвестировать ресурсы (посеять пшеницу) и получить 50% прироста. Субъект А не может инвестировать ни 1 единицы своих ресурсов, так как он не обеспечит себе минимально необходимый уровень потребления. Его интерес в капиталовложении равен 0. Интерес субъекта Б больше 0, поскольку он может себе позволить превратить предметы потребления в средства достижения будущих целей. Поэтому, несмотря на одинаковую физическую производительность ресурса h, интерес *объективно* будет для разных субъектов различным.

Эти различия обусловлены действием закона убывающей предельной полезности благ с одной стороны[3], и различным начальным уровнем доходов – с другой. Известно, что предельная полезность продукта (R) представляет собой постоянно убывающую функцию, отвечающую по своим характеристикам гиперболе

$$R = a_0 + a_1/Q, \quad (1)$$

где Q – количество единиц ресурса.

График данной функции представлен на рис. 1.

Как показано на графике, отказ субъекта от потребления 1 единицы ресурса (ΔQ) влечет потери полезности больших масштабов, чем будущий прирост ресурсов на ту же единицу:

$$R(Q_0) > R(Q_0+\Delta Q).$$

Закономерно ли данное явление для межвременного обмена в любом направлении (переноса потребления единицы ресурса из настоящего в будущее или, наоборот, из будущего в настоящее) при условии постоянства получаемого дохода?

Сформулируем теорему 1: при условии получения субъектом стабильной величины дохода Q_0 = const в периоды T_1, T_2, …T_n, перенос потребления 1 единицы ресурса из периода T_f в период T_g всегда влечет потери полезности независимо от исходной величины Q_0.

Доказательство.

В период T_f субъект отказывается от потребления 1 единицы ресурса. Согласно формуле (1) потери полезности

[3] Полезность каждой последней остающейся у субъекта единицы ресурса возрастает по мере уменьшения общего количества данного ресурса.

составят при этом $Rc = a_0 + a_1/Q_0$. Выигрыш субъекта в период T_g

$$Rr = a_0 + a_1/(Q_0+1).$$

$$a_0 + a_1/Q_0 - (a_0 + a_1/(Q_0+1)) = x.$$

$$1/Q_0 - 1/(Q_0+1) = x.$$

$$1/(Q_0(Q_0+1)) = x.$$

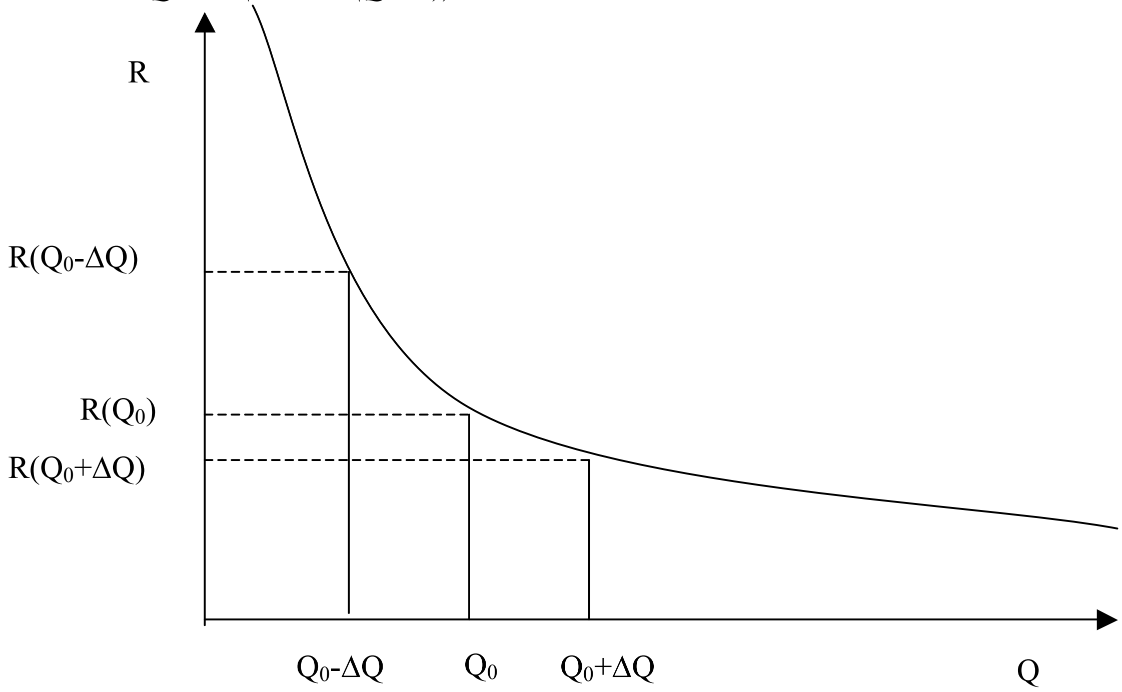

Рис.1. График предельной полезности продукта

Очевидно, что для любого положительного Q_0 всегда будет выполняться неравенство $x>0$, т.е. потери полезности будут всегда превышать выгоду, что и требовалось доказать.

Отсюда следует:

1. Эффективность межвременного обмена, формирующая интерес, обусловлена не только субъективными временными предпочтениями индивида, но и объективным фактором – убывающей предельной полезностью ресурсов.
2. Чем выше начальный размер бюджета, тем более низкая норма отдачи ресурса может побудить индивида к инвестициям, поскольку (Rc - Rr) -> 0 при $Q_0 \to \infty$.
3. Субъект осуществляет инвестиции (межвременной обмен) лишь в том случае, если они принесут ему выигрыш, измеряемый полезностью, а не физической величиной прибавочного продукта.

Представители австрийского направления экономической теории стремятся дать ответ на вопрос, какая норма отдачи[4] может заинтересовать субъекта инвестировать средства при данных временных предпочтениях? Эта норма интерпретируется ими как уровень интереса. Однако на практике возникает другой вопрос: какую долю имеющихся ресурсов следует инвестировать при заданной (известной субъекту) норме отдачи ресурсов, а какую оставить для текущего потребления? То есть какой должна быть величина $k\cdot\Delta Q$ (k – количество единиц ресурса, направляемого в инвестиции)?

[4] Процент, рента.

Перенос потребления ресурса из периода T_f в период T_g назовем межвременным обменом полезностями[5]. Согласно теореме 1 такой обмен всегда невыгоден при стабильном бюджете. Однако при использовании технологии, дающей прибавочный продукт к инвестируемым ресурсам, межвременной обмен может дать выигрыш, измеряемый полезностью. При этом величина прибавочного продукта определяется нормой отдачи (нормой производительности) ресурса h. Потери ресурсов составляют $k \cdot \Delta Q$, где k – количество единиц ресурса, изымаемых из текущего потребления. Прибавочный продукт равен $k \cdot h \cdot \Delta Q$. Тогда общие потери полезности (Rc) в период T_0 составят:

$$Rc = R(Q_0) + R(Q_0-\Delta Q) + R(Q_0-2\cdot\Delta Q) + \ldots + R(Q_0 - (k-1)\cdot\Delta Q). \qquad (2)$$

Соответственно прирост полезности в период T_1 составит:

$$Rr = R(Q_0+\Delta Q) + R(Q_0+2\Delta Q) + R(Q_0+3\Delta Q) + \ldots + R(Q_0 + k\cdot h\cdot\Delta Q). \qquad (3)$$

Принимая решение об использовании имеющихся ресурсов (бюджета), субъект максимизирует общую полезность (текущую и будущую) в том случае, когда $Rr – Rc$ -> max.

Следовательно, задача оптимизации межвременного обмена сводится к нахождению такого k, при котором выполняется:

$$[R(Q_0+\Delta Q) + R(Q_0+2\Delta Q) + R(Q_0+3\Delta Q) + \ldots + R(Q_0 + k\cdot h\cdot\Delta Q)] – [R(Q_0) + R(Q_0-\Delta Q) + R(Q_0-2\cdot\Delta Q) + \ldots + R(Q_0 - (k-1)\cdot \Delta Q)] \to max. \qquad (4)$$

При этом предполагается, что h, ΔQ, Q_0, а также параметры функции (1) a_0, a_1 известны.

Решение.

Поскольку ΔQ = const, выражение (4) можно записать следующим образом:

$$[R(Q_0)\cdot\Delta Q + R(Q_0-\Delta Q)\cdot\Delta Q + R(Q_0-2\cdot\Delta Q)\cdot\Delta Q + \ldots + R(Q_0 - (k-1)\cdot \Delta Q) \cdot\Delta Q] - [R(Q_0+\Delta Q)\cdot\Delta Q + R(Q_0+2\Delta Q)\cdot\Delta Q + R(Q_0+3\Delta Q)\cdot\Delta Q + \ldots + R(Q_0 + k\cdot h\cdot\Delta Q) \cdot\Delta Q] \to max. \qquad (5)$$

Это означает нахождение такого k, при котором сумма площадей прямоугольников $R(Q)\cdot\Delta Q$, находящихся справа от точки Q_0, превысит сумму площадей прямоугольников $R(Q)\cdot\Delta Q$, находящихся слева от точки Q_0, на максимальную величину (рис.2).

---

[5] Понятие «межвременной обмен» известно и используется в литературе по отношению к ресурсам, а не к их полезностям.

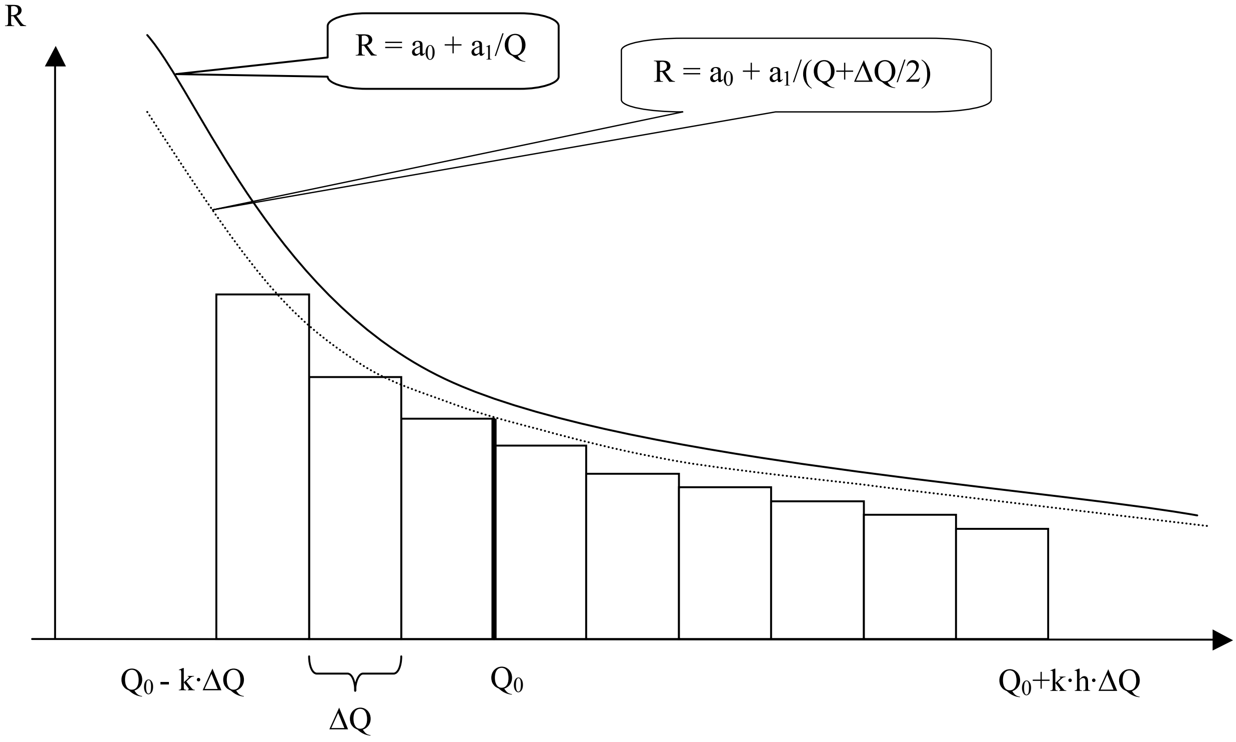

Рис.2. Межвременное соотношение полезностей ресурсов

Очевидно, что сумма площадей прямоугольников, ограниченных в крайнем правом углу функцией $R = a_0 + a_1/Q$, представляет собой интеграл функции
$R = a_0 + a_1/(Q+\Delta Q/2)$ (рис.2).

Поэтому задача оптимизации может быть представлена в следующем виде:

$$f(k) = \int\limits_{Q_0}^{Q_0+k\cdot h\cdot\Delta Q} (a_0 + a_1/(Q+\Delta Q/2))dQ -$$

$$- \int\limits_{Q_0-k\cdot\Delta Q}^{Q_0} (a_0 + a_1/(Q+\Delta Q/2))dQ -> \max \qquad (6)$$

или $f'(k) = (\int\limits_{Q_0}^{Q_0+k\cdot h\cdot\Delta Q} (a_0 + a_1/(Q+\Delta Q/2))dQ -$

$$- \int\limits_{Q_0-k\cdot\Delta Q}^{Q_0} (a_0 + a_1/(Q+\Delta Q/2))dQ)' = 0 . \qquad (7)$$

Решение уравнения (7) выполняется следующим образом:

$$\int_1 = \int\limits_{Q_0-k\cdot\Delta Q}^{Q_0} (a_0 + a_1/(Q+\Delta Q/2))dQ =$$

$$= a_0 Q - a_1 \ln|Q + \Delta Q/2| \Big| =$$

$$= a_0 Q_0 + a_1 \ln|Q_0 + \Delta Q/2| - a_0(Q_0 - k\cdot\Delta Q) -$$

$$- a_1 \ln|Q_0 + \Delta Q/2 - k\cdot\Delta Q| = a_0 k\cdot\Delta Q +$$

$$+ a_1 \ln|(Q_0 + \Delta Q/2)/Q_0 - k\Delta Q + \Delta Q/2)|.$$

$$\int_2 = \int\limits_{Q_0}^{Q_0+kh\cdot\Delta Q} a_0 + a_1/(Q+\Delta Q/2))dQ =$$

$$= a_0 Q + a_1 \ln|Q + \Delta Q/2| \Big| =$$

$$= a_0(Q + kh\cdot\Delta Q) + a_1 \ln|Q_0 + kh\cdot\Delta Q + \Delta Q/2| -$$

$$-a_0Q_0 - a_1\ln\left|Q_0 + \Delta Q/2\right| = a_0kh\cdot\Delta Q +$$
$$+a_1\ln\left|Q_0 + kh\cdot\Delta Q + \Delta Q/2)/(Q_0 + \Delta Q/2)\right|$$
$$f(k) = \int_2 - \int_1 = a_0kh\cdot\Delta Q + a_1\ln\left|(Q_0 +\right.$$
$$+kh\cdot\Delta Q + \Delta Q/2)/(Q_0 + \Delta Q/2)\big| - a_0k\cdot\Delta Q +$$
$$+a_1\ln\left|(Q_0 + \Delta Q/2)/(Q_0 - k\cdot\Delta Q + \Delta Q/2)\,|\right) =$$
$$= a_0k\cdot\Delta Q(h-1) + a_1\ln|((Q_0 + kh\cdot\Delta Q + \Delta Q/2)$$
$$(Q_0 + k\cdot\Delta Q + \Delta Q/2))/(Q_0 + \Delta Q/2)^2|.$$

Далее, раскрывая скобки в числителе логарифмируемого выражения, получаем:

$$f(k) = a_0k\cdot\Delta Q(h-1) + a_1\ln\left|Q_0^2 + \Delta QQ_0 -\right.$$
$$-k\cdot\Delta QQ_0 + \Delta Q^2/4 - k\cdot\Delta Q^2/2 + kh\cdot\Delta QQ_0 +$$
$$\left.+kh\Delta Q^2/2 - k^2h\cdot\Delta Q^2)/(Q_0 + \Delta Q/2)^2\right|.$$

Находим производную по k:

$$f'(k) = a_0\cdot\Delta Q(h-1) + a_1\left[(Q_0 + \Delta Q/2)^2/(Q_0^2 +\right.$$
$$+\cdot\Delta QQ_0 - k\cdot\Delta QQ_0 + \Delta Q^2/4 - k\cdot\Delta Q^2/2 + kh\cdot\Delta QQ_0 +$$
$$+kh\Delta Q^2/2 - k^2h\cdot\Delta Q^2)\big]\left[1/(Q_0 + \Delta Q/2)^2)(-\Delta QQ_0 -\right.$$
$$\left.-\Delta Q^2/2 + h\cdot\Delta QQ_0 + h\cdot\Delta Q^2/2 - 2kh\cdot\Delta Q^2)\right] = 0.$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$a_0\cdot\Delta QhQ_0^2 + a_0\cdot\Delta Q^2hQ_0 - a_0k\cdot\Delta Q^2hQ_0 +$$
$$+a_0\cdot\Delta Q^3\,h/4 - a_0\cdot\Delta Q^3hk/2 + a_0\cdot\Delta Q^2h^2kQ_0 +$$
$$+a_0\cdot\Delta Q^3h^2\,k/2 - a_0k^2\cdot\Delta Q^3h^2 - a_0\cdot\Delta QQ_0^{\;2} -$$
$$-a_0\cdot\Delta Q^2Q_0 + a_0\cdot\Delta Q^2kQ_0 - a_0\cdot\Delta Q^3/4 + a_0\cdot\Delta Q^3\,k/2 -$$
$$-a_0\cdot\Delta Q^2khQ_0 - a_0\cdot\Delta Q^3h\,k/2 + a_0k^2\cdot\Delta Q^3h -$$
$$-a_0\cdot\Delta QQ_0 - a_1\cdot\Delta Q^2/2 + a_1h\cdot\Delta QQ_0 + a_1h\cdot\Delta Q^2/2 -$$
$$-2a_1kh\cdot\Delta Q^2 = 0.$$

Выражение (8) представляет собой квадратное уравнение типа:

$$f(k) = Ak^2 + Bk + C = 0,$$

значения параметров которого представлены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры квадратного уравнения по переменной k

A	B	C
$a_0\cdot\Delta Q^3h(1-h)$	$a_0\cdot\Delta Q^2hQ_0(1-h) - a_0\cdot\Delta Q^3h +$ $+(a_0\cdot\Delta Q^3/2)(h^2+1) -$ $a_0\cdot\Delta Q^2Q_0(h-1) - a_1h\cdot\Delta Q^2$	$a_0\cdot\Delta Q\;hQ_0^2 + a_0\cdot\Delta Q^2hQ_0 + a_0\cdot\Delta Q^3\,h/4 -$ $-a_0\cdot\Delta Q\,Q_0^2 - a_0\cdot\Delta Q^2Q_0 + a_0\cdot\Delta Q^3/4 - a_1\cdot\Delta QQ_0 -$ $-a1\cdot\Delta Q^2/2 + a_1h\cdot\Delta QQ_0 + a_1h\cdot\Delta Q^2/2$

Отсюда находим по стандартной формуле k

$$k_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\left(B^2 - 4AC\right)}}{2A}$$

или

$$k_{1,2} = \{-(a_0\cdot\Delta Q^2hQ_0(h-1) - a_0\cdot\Delta Q^3h +$$
$$+(a_0\cdot\Delta Q^{\,3}/2)(h^2+1) - a_0\cdot\Delta Q^2Q_0(h-1) -$$
$$-2a_1h\cdot\Delta Q^2 \pm \sqrt{\left[(a_0\cdot\Delta Q^2hQ_0(h-1) - a_0\cdot\Delta Q^3h +\right.}$$
$$\overline{+(a_0\cdot\Delta Q^{\,3}/2)(h^2+1) - a_0\cdot\Delta Q^2Q_0(h-1) -}$$
$$\overline{-2a_1h\cdot\Delta Q^2)^2 - 4(a_0\cdot\Delta Q^3h(1-h))(a_0\cdot\Delta QhQ_0^{\;2} +}$$
$$\overline{+a_0\cdot\Delta Q^2hQ_0 + a_0\cdot\Delta Q^3\,h/4 - a_0\cdot\Delta QQ_0^{\;2} -}$$
$$\overline{-a_0\cdot\Delta Q^2Q_0 - a_0\cdot\Delta Q^3/4 - a_1\cdot\Delta QQ_0 - a_1\cdot\Delta Q^2/2 +}$$
$$\overline{-a_0\cdot\Delta Q^2Q_0 - a_0\cdot\Delta Q^3/4 - a_1\cdot\Delta QQ_0 - a_1\cdot\Delta Q^2/2 +}$$
$$\overline{\left.+a_1h\cdot\Delta QQ_0 + a_1h\cdot\Delta Q^2/2)\right]}\}/\{2(a_0\cdot\Delta Q^3h(1-h))\} \quad (9)$$

Примечания:

1.Из постановки задачи следует, что k – положительное натуральное число, следовательно, из найденного положительного корня следует вычленить его целую часть – она и будет единственным решением задачи.

2.Решение задачи выполнено для $a_0 \neq 0$. Для частного случая $a_0 = 0$ решение выполняется аналогично, путем нахождения корней уравнения

$$f(k) = \int_{Q_0}^{Q_0 + k\cdot h\cdot\Delta Q} (a_1/(Q + \Delta Q/2))dQ -$$

$$-\int_{Q_0-k\cdot\Delta Q}^{Q_0}(a_1/(Q+\Delta Q/2))dQ->\max. \qquad (10)$$

Другой вариант нахождения решения при $a_0 = 0$ - подстановка $a_0 = \text{m}$, m -> 0. Например, $a_0 = 0{,}000001$. Погрешность решения при этом будет допустимо низкой.

3.При малых значениях Q_0 следует брать достаточно малое ΔQ (скажем, 1% от Q_0), это также повышает точность решения.

4.Общее количество ресурсов, изымаемых из текущего потребления и направляемых в инвестиции $Q_{инвест}$, будет определяться по формуле

$$Q_{инвест} = k \cdot \Delta Q. \qquad (11)$$

5.Формула (9) не учитывает субъективные временные предпочтения и формируемые ими издержки ожидания, которые, очевидно, имеют место. Их учет возможен путем включения в формулу (9) дисконтированной величины нормы отдачи ресурса: $h(1/(1+i)^n)$, где n - количество временных интервалов.

Рассмотрим пример решения задачи оптимизации бюджетного планирования с использованием формулы (9).

Исходные данные представлены в табл. 2.

Таблица 2. Исходные данные для решения задачи оптимизации межвременного обмена

a_0	a_1	ΔQ	Q_0	h
0.1	1	1	10	2

Подставляя данные в формулу (9), находим k:

$k_1 = 5{,}44161519$;

$k_2 = -20{,}191615$.

Решением задачи следует считать $k = 5$ (согласно правилу, изложенному в примечании 1).

Общеизвестно, что критерием принятия экономического решения является равенство предельного дохода (mr) предельным издержкам (mc). Найдем величину k, пошагово рассчитывая mr и mc. Расчетные значения показателей представлены в табл. 3.

Как видно из таблицы, наибольшее приближение к равенству $mr = mc$ достигается в точке $k = 5$. Выигрыш субъекта при этом составит $Rr- Rc$ = 0,523136 единиц полезности, что является максимально возможной величиной при заданных условиях. Оставшиеся 5 единиц ресурса субъект направит на текущее потребление.

Таблица 3. Расчетные значения показателей эффективности межвременного обмена

Q	R	k	Rc	mc	Rr	mr	mr-mc	Rr- Rc
0	-	1	0,2	0,2	0,374242	0,374242	0,174242	0,174242
1	1,1	2	0,41111111	0,211111	0,722594	0,348352	0,137241	0,311483
2	0,6	3	0,63611111	0,225	1,051761	0,329167	0,104167	0,41565
3	0,433333333	4	0,87896825	0,242857	1,36614	0,314379	0,071522	0,487172
4	0,35	5	1,14563492	0,266667	1,668771	0,302632	0,035965	0,523136
5	0,3	6	1,44563492	0,3	1,961845	0,293074	-0,00693	0,51621
6	0,266666667	7	1,79563492	0,35	2,24699	0,285145	-0,06486	0,451355
7	0,242857143	8	2,22896825	0,433333	2,525451	0,278462	-0,15487	0,296483
8	0,225	9	2,82896825	0,6	2,798203	0,272751	-0,32725	-0,03077
9	0,211111111	10	3,92896825	1,1	3,066019	0,267816	-0,83218	-0,86295
10	0,2	11						
11	0,190909091	12						

12	0,183333333	13						
13	0,176923077	14						
14	0,171428571	15						
15	0,166666667	16						
16	0,1625	17						
17	0,158823529	18						
18	0,155555556	19						
19	0,152631579	20						
20	0,15	21						
21	0,147619048	22						
22	0,145454545	23						
23	0,143478261	24						
24	0,141666667	25						
25	0,14	26						
26	0,138461538	27						
27	0,137037037	28						
28	0,135714286	29						
29	0,134482759	30						
30	0,133333333	31						

Таким образом, правильность расчетов и дееспособность формулы (9) подтверждена.

Применение модели.

Данную модель можно использовать в любой сфере деятельности, связанной с принятием инвестиционных решений.

Перспективным, в частности, представляется использование модели при разработке программ социально-экономического развития административно-территориальных единиц.

Выводы.

1. Доказано, что эффективность межвременного обмена, формирующая заинтересованность субъекта в инвестициях, объективно определяется исходным количеством располагаемых ресурсов, функцией их предельной полезности, нормой отдачи ресурса.

2. Разработана модель оптимизации величины инвестиционных расходов бюджета на основе анализа межвременного обмена полезностями.

Литература

1. Toward A Libertarian Theory Of Interest by Bob Murphy www.anti-state.com 27.01.2002.

2. Praxeology: The Austrian Method Wages and Labor (lecture 6 of 34) June 11, 2004. http://blog.mises.org/blog/archives/002105.asp . 20.06.2004.

3. David J. Heinrich. Time Preference and Interest (lecture 5 of 34). http://blog.mises.org/blog/archives/002106.asp 30.04.2002.

4. "Professor Rothbard and the Theory of Interest" in Man, Economy, and Liberty: Essays in Honor of Murray N. Rothbard, Walter Block and Llewellyn H. Rockwell, Jr., eds., Auburn, AL: Ludwig von Mises Institute, 1988. – P. 44-55. http://www.von-mises.org/studyGuideDisplay.asp?action=AuthorListings&AuthorLast1=Garrison&AuthorFirst1=Roger%20W. 30.01.2004.