

СИСТЕМНА МЕТОДОЛОГІЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У КРИВОЛІНІЙНИХ ОБЛАСТЯХ З НЕВИЗНАЧЕНИМИ ДІЛЯНКАМИ МЕЖ

А.Я. БОМБА, В.І. ГАВРИЛЮК

Систематизовано підхід до розв'язання модельних крайових задач на конформні відображення в областях з невизначеними ділянками меж. Побудовано загальний алгоритм їх чисельного розв'язання.

ВСТУП

У роботах [1 – 6] широко використовувався метод обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень) для побудови динамічних сіток потенційних та квазіпотенційних полів, побудови різного роду профілів та поля швидкості із паралельним розрахунком інших характеристик (витрат, перетоків і т.ін.). Як відомо, шляхом введення функції течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряженої до шуканого потенціалу (квазіпотенціалу) $\varphi = \varphi(x, y)$, задачі в областях, обмежених двома лініями течії та двома еквіпотенціальними лініями, а також у областях з вільними межами, зводяться до конформного (квазіконформного) відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області на прямокутник — область комплексного (квазікомплексного) потенціалу [1, 2]. Зокрема, у роботах [3–5], де відповідна область квазікомплексного потенціалу G_ω не є канонічною, однією з ділянок її границі є деяка (невідома) крива. Для виконання такого відображення нами запропоновано варіант методу «фіктивних областей». Під оберненням такого роду задач мається на увазі як перехід від прямих задач до задач на конформне (квазіконформне) відображення відповідної області комплексного (квазікомплексного) потенціалу на вихідну область, так і те, що вони містять невідомі параметри (витрати) та вільні ділянки границь при додаткових відомостях про їх розв'язки.

У цій роботі пропонується систематизований підхід до постановок такого роду задач та побудови алгоритмів їх розв'язування. Серед усіх можливих варіантів формування течії виділені ті, які характеризуються певними умовами оптимізації та керування.

ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо процес фільтрації в однозв'язній восьмикутній криволінійній області $G_z (z = x + iy, \partial G_z = ABB_*B^*CC_0D_0D)$ з вільними (невідомими) кривими BB_* , B^*C , AD (рис. 1, а), де $B_*B^* \in FP = \{z : y = f_*(x)\}$ — лінія течії; $AB = \{z : y = 0, -l_1 \leq x \leq 0\}$; $C_0D_0 = \{z : y = -H, l_2 \leq x \leq l_3\}$ — еквіпотенціальні лінії (водні резервуари). Опишемо його рівнянням руху

$\vec{v} = k \cdot \text{grad } \varphi$ (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності $\text{div } \vec{v} = 0$ [1–5], де $\vec{v} = (v_x(x, y) + iv_y(x, y))$ — швидкість фільтрації; k — коефіцієнт фільтрації (для зручності викладок покладемо $k = 1$); $\varphi = \varphi(x, y)$ — потенціал у точці (x, y) , такий що $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CC_0D_0D} = \varphi^*$, $\varphi'_n|_{BB_*B^*C} = \varphi'_n|_{AD} = 0$, $\varphi|_{BB_*} = g_1(y)$, $\varphi|_{B^*C} = g_2(y)$, $\varphi|_{AD} = g_3(y)$; \vec{n} — зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області; $g_1(y)$, $g_2(y)$, $g_3(y)$, $f_*(x)$ — обмежені неперервно-диференційовані функції (зокрема, розглядається випадок, коли $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = \varphi^*(H) = H$).

Відповідна задача на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z , що розглядається, на відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ (рис. 1, б) з невідомим параметром — повною витратою $Q = - \int_{AB} v_x dy - v_y dx$ — матиме вигляд [1–5]

$$\varphi'_x = \psi'_y, \quad \varphi'_y = -\psi'_x, \tag{1}$$

$$\varphi|_{AB} = 0, \quad \varphi|_{CC_0D_0D} = H, \quad \varphi|_{BB_*} = g_1(y), \quad \varphi|_{B^*C} = g_2(y),$$

$$\varphi|_{AD} = g_3(y), \quad g_1(0) = 0, \quad g_1(y_*) = \tilde{\varphi}_*, \quad g_2(y^*) = \tilde{\varphi}^*, \quad g_2(-H) = H,$$

$$g_3(0) = 0, \quad g_3(-H) = H, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BB_*B^*C} = -Q, \tag{2}$$

де $\tilde{\varphi}_*$ і $\tilde{\varphi}^*$ — шукані значення потенціалу у відповідних кутових точках B_* та B^* .

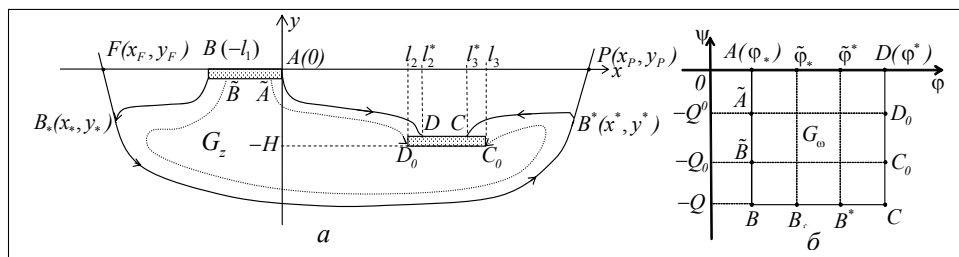


Рис. 1. Фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_ω (б)

Відповідна їй обернена крайова задача на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z (при невідомих Q , $\tilde{\varphi}_*$, $\tilde{\varphi}^*$) запишеться так:

$$y'_\psi = x'_\varphi, \quad x'_\psi = -y'_\varphi, \quad (\varphi, \psi) \in G; \tag{3}$$

$$\begin{cases} y(0, \psi) = 0, \quad y(H, \psi) = -H, & 0 \leq \psi \leq -Q, \\ g_3(y(\varphi, 0)) = \varphi, & 0 \leq \varphi \leq H, \\ g_1(y(\varphi, -Q)) = \varphi, & 0 \leq \varphi \leq \tilde{\varphi}_*, \\ y(\varphi, -Q) - f_*(x(\varphi, -Q)) = 0, & \tilde{\varphi}_* \leq \varphi \leq \tilde{\varphi}^*, \\ g_2(y(\varphi, -Q)) = \varphi, & \tilde{\varphi}^* \leq \varphi \leq H. \end{cases} \tag{4}$$

При цьому відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ мають вигляд

$$x''_{\varphi\varphi} + x''_{\psi\psi} = 0, \quad y''_{\varphi\varphi} + y''_{\psi\psi} = 0. \quad (5)$$

Різницевий аналог рівнянь (5), крайових умов (4), приграничних умов ортогональності та умов конформної подібності в малому відповідних чотирикутників у відповідній рівномірній сітковій області $G'_\omega = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$:

$\varphi_i = \Delta\varphi i$, $i = \overline{0, m+1}$; $\psi_j = \Delta\psi j$, $j = \overline{0, n+1}$; $\Delta\varphi = 1/(m+1)$, $\Delta\psi = Q/(n+1)$, $\gamma = \Delta\varphi / \Delta\psi$, $m, n \in \mathbf{N}$ } запишемо як [1–5]

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(x_{i+1, j+1} - 2x_{i, j+1} + x_{i-1, j+1}) + (1 - 2\sigma)(x_{i+1, j} - 2x_{i, j} + x_{i-1, j}) + \\ + \sigma(x_{i+1, j-1} - 2x_{i, j-1} + x_{i-1, j-1}) + \gamma^2 (\sigma(x_{i+1, j+1} - 2x_{i+1, j} + x_{i+1, j-1}) + \\ + (1 - 2\sigma)(x_{i, j+1} - 2x_{i, j} + x_{i, j-1}) + \sigma(x_{i-1, j+1} - 2x_{i-1, j} + x_{i-1, j-1})) = 0, \\ \sigma(y_{i+1, j+1} - 2y_{i, j+1} + y_{i-1, j+1}) + (1 - 2\sigma)(y_{i+1, j} - 2y_{i, j} + y_{i-1, j}) + \\ + \sigma(y_{i+1, j-1} - 2y_{i, j-1} + y_{i-1, j-1}) + \gamma^2 (\sigma(y_{i+1, j+1} - 2y_{i+1, j} + y_{i+1, j-1}) + \\ + (1 - 2\sigma)(x_{i, j+1} - 2x_{i, j} + x_{i, j-1}) + \sigma(x_{i-1, j+1} - 2y_{i-1, j} + y_{i-1, j-1})) = 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{0, j} = 0, \quad y_{m+1, j} = -H, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ g_3(y_{i, 0}) = \varphi_i, \quad i = \overline{0, m+1}, \\ g_1(y_{i, n+1}) = \varphi_i, \quad i = \overline{0, m}, \\ \varphi_{m1} = \tilde{\varphi}^*, \\ y_{i, n+1} - f^*(x_{i, n+1}) = 0, \quad i = \overline{m1, m2}, \\ g_2(y_{i, n+1}) = \varphi_i, \quad i = \overline{m2, m+1}, \\ \varphi_{m2} = \tilde{\varphi}^*; \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1, j} - x_{0, j} = 0, \quad x_{m, j} - x_{m+1, j} = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ (x_{i, 0} - x_{i, 1})(x_{i-1, 0} - x_{i, 0}) + \\ + (y_{i, 0} - y_{i, 1})(y_{i-1, 0} - y_{i, 0}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \\ (x_{i, n} - x_{i, n+1})(x_{i-1, n+1} - x_{i, n+1}) + \\ + (y_{i, n} - y_{i, n+1})(y_{i-1, n+1} - y_{i, n+1}) = 0, \quad i = \overline{0, m1}, \\ f'^*_x(x_{i, n+1}, y_{i, n+1})(y_{i, n} - y_{i, n+1}) - \\ - f'^*_y(x_{i, n+1}, y_{i, n+1})(x_{i, n} - x_{i, n+1}) = 0, \quad i = \overline{m1, m2}, \\ (x_{i, n} - x_{i, n+1})(x_{i-1, n+1} - x_{i, n+1}) + \\ + (y_{i, n} - y_{i, n+1})(y_{i-1, n+1} - y_{i, n+1}) = 0, \quad i = \overline{m2, m+1}, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \gamma_{i,j}; \tag{9}$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j})^2}},$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$; $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$; $0 < m_1 < m_2 < m$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$; $\sigma \in [0; 0,5]$ — ваговий коефіцієнт.

АЛГОРИТМ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розв'язок відповідної до (3), (4) різницевої задачі у цьому випадку побудуємо за такою методологією [1–6].

Задаємо кількості m та n вузлів розбиття сіткової області G_ω ; параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі; початкові наближення ряду величин: координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{m+1,j}^{(0)}$, $y_{m+1,j}^{(0)}$, $x_{i,n+1}^{(0)}$, $y_{i,n+1}^{(0)}$, $x_{i,0}^{(0)}$, $y_{i,0}^{(0)}$ (так, щоб виконувались рівності (7)); початкові наближення внутрішніх вузлів $x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$, наприклад, як середні арифметичні чотирьох координат відповідних граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)} = \frac{1}{4}(x_{i,0}^{(0)} + x_{i,n+1}^{(0)} + x_{m+1,j}^{(0)} + x_{0,j}^{(0)})$, $y_{i,j}^{(0)} = \frac{1}{4}(y_{i,0}^{(0)} + y_{i,n+1}^{(0)} + y_{m+1,j}^{(0)} + y_{0,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Задання початкового наближення конформного інваріанта γ проведемо за формулою (9), в якій використаємо щойно задані початкові значення координат внутрішніх вузлів, тобто $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$. Далі проведемо уточнення внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$ ($k = 0, 1, \dots$ — номер кроку ітерації) за допомогою ітераційного методу Зейделя [7] за формулами, отриманими шляхом розв'язання (6) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу та на основі ідей методу блочної ітерації [8] використаємо лише перший ітераційний крок); величини γ за формулою (9) та витрати Q за формулою $Q = \frac{1}{\gamma} \frac{n+1}{m+1}$; координат граничних вузлів, наприклад, шляхом розв'язання системи нелінійних рівнянь (7), (8). Потім перевіримо виконання умов закінчення обчислювального процесу

$$\begin{aligned} \max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \mathcal{G}_z} \left(\left| x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)} \right|, \left| y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)} \right| \right) < \varepsilon, \\ \left| Q^{(k+1)} - Q^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad \left| D^{(k+1)} - D^{(k)} \right| < \varepsilon, \end{aligned} \tag{10}$$

де $D = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i+1,j})^2 + (y_{i,j+1}-y_{i+1,j})^2}}$ — усереднене значення відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області G_z^γ .

Якщо умови (10) не справджуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів і т.д. У протилежному випадку обчислюємо нев'язку конформності отриманої сітки за формулою $\varepsilon_* = |1 - D|$. Її величина характеризує відхилення отриманих криволінійних чотирикутників від відповідних прямокутників (оскільки відношення довжин діагоналей у прямокутнику дорівнює одиниці, а існування прямих кутів забезпечується умовами ортогональності).

У випадку, якщо не виконується, наприклад, лише одна з умов (10), то узгоджуємо співвідношення між точністю ε_* та заданою кількістю кроків розбиття m, n (в першу чергу, шляхом збільшення останніх). Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку ε_*), то збільшуємо параметри розбиття m і n та розв'язуємо різницеву задачу (6)–(9) знову. Оптимальність співвідношення між m і n досягається аналогічно до [3–7] шляхом оптимізації аналогів функціоналів типу Рімана.

Провівши розрахунки за описаним алгоритмом при $AB = \{z : y = 0, -4 \leq x \leq 0\}$, $D_0C_0 = \{z : y = -H, 3 \leq x \leq 6\}$, $FP = \{z : y - x^4 / 2000 + 6 = 0, -10,466 \leq x \leq 10,466\}$, $g_s(y) = -y$, $s = \overline{1 \dots 3}$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = H$, глибині залягання водозабору $H = 1$, розбитті $m \times n = 30 \times 20$ області G_z , точності наближення $\varepsilon = 10^{-5}$, коефіцієнті провідності середовища $\kappa = 1$ м/добу, за $k = 4558$ кроків отримано гідродинамічну сітку руху (рис. 2.), знайдено повну фільтраційну витрату $Q = 0,556$ м³/добу за максимальної нев'язки $\varepsilon_* = 1,4E-3$, встановлено положення вільних кривих BB_* , B^*C , AD .

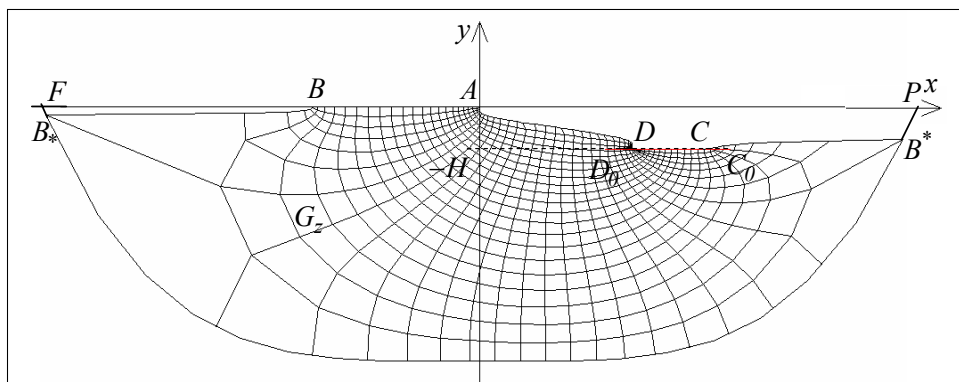


Рис. 2. Динамічна сітка в області фільтрації G_z

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АЛГОРИТМ ВИБОРУ

Розглянемо різні випадки формування течії в однозв'язній криволінійній області $G_z (z = x + iy, \partial G_z = ABB_*NMB^*CC_0D_0D)$, де $FN = \{z : x = -l_F, -H_g \leq y \leq 0\}$, $PM = \{z : x = l_P, -H_g \leq y \leq 0\}$, $NM = \{z : y = -H_g, -l_F \leq x \leq l_P\}$ в залежності від параметрів, які характеризують розміри та взаєморозміщення об'єктів AB та D_0C_0 (рис. 3–10), а саме: від висоти залягання водозабору H при фіксованих l_2 та l_3 .

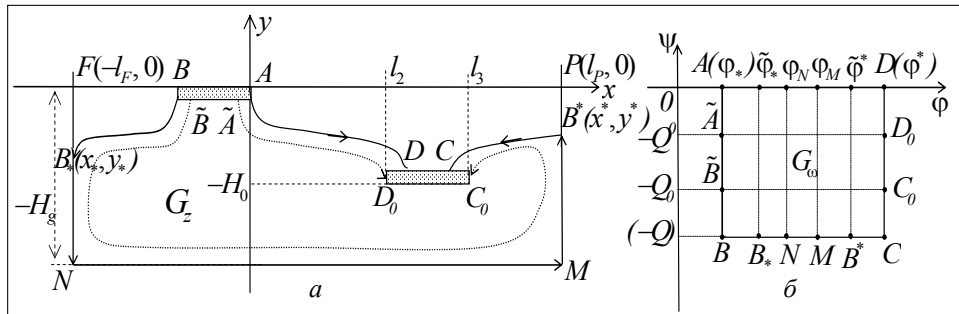


Рис. 3. Схема області фільтрації для випадку $0 < H = H_0 < H_1$

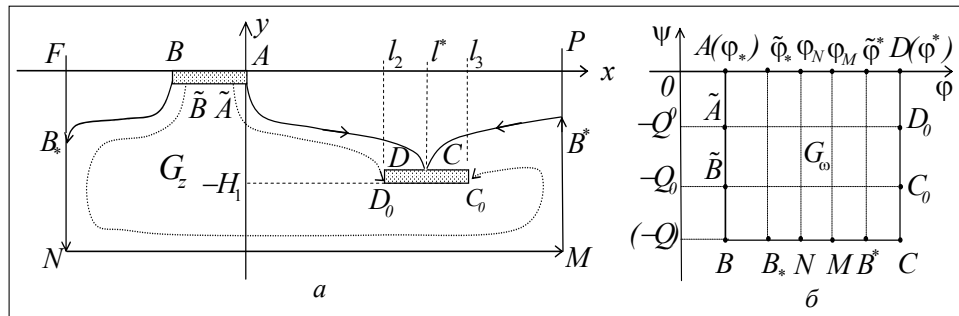


Рис. 4. Схема області фільтрації для випадку $H = H_1$

Рис. 3 — один із так званих «проміжних» випадків [9], коли глибина залягання водозабору є не надто великою, а меншою деякого її критичного (шуканого) значення H_1 ($0 < H = H_0 < H_1$). Тут φ_N, φ_M — значення потенціалу в кутових точках N та M ; Q^0, Q_0 — невідомі величини перетоків від $A\tilde{A}$ до DD_0 та від $\tilde{B}B$ до C_0C відповідно. Рис. 4 — один із так званих «ключових» випадків [9] «повного затоплення» D_0C_0 за умов мінімальної глибини водозабору $H = H_1$. Рис. 5 — один із наступних проміжних випадків ($H_1 < H = H_2 < H_3$), який характеризується наявністю кривої розділу течії $\tilde{D}D = \tilde{C}C$ ($\tilde{D} = \tilde{C}$), а рис. 6 — ключовий із них, що характеризується умовою $\tilde{l} = l_P$. Початок спільної лінії розділу течії лежить на границі області $\tilde{D} = \tilde{C} = B^*$, $H = H_3$. Випадок, показаний на рис. 7, також ключовий, для якого характерним є те, що $D = C = C_0$ (H_5 позначено відповідне значення

висоти H). Рис. 8, 9 — проміжні випадки формування течії за умови $y^* < -H$. Рис. 10 — ключовий випадок, коли водозбір лежить на границі області G_z ($H = H_g$). Зауважимо, що граничний перехід від відповідного проміжного випадку до даного ключового ($H \rightarrow H_g$) є нерівномірним, а саме має місце відомий парадокс типу Герсеванова [10].

Для розрахунку фільтраційного процесу в області, зображеній на рис. 3, внесемо в описаний вище алгоритм, а саме в формули (7) і (8), такі зміни:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{0,j} = 0, \quad y_{m+1,j} = -H, & j = \overline{0, n+1}, \\ g_3(y_{i,0}) = \varphi_i, & i = \overline{0, m+1}, \\ g_1(y_{i,n+1}) = \varphi_i, & i = \overline{0, m1}, \\ \varphi_{m1} = \tilde{\varphi}^*, & \\ x_{i,n+1} = -l_F, & i = \overline{m1, m2}, \\ y_{i,n+1} = -H_g, & i = \overline{m2, m3}, \\ x_{i,n+1} = l_P, & i = \overline{m3, m4}, \\ g_2(y_{i,n+1}) = \varphi_i, & i = \overline{m4, m+1}, \\ \varphi_{m4} = \tilde{\varphi}^*; & \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_{1,j} - x_{0,j} = 0, \quad x_{m,j} - x_{m+1,j} = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ (x_{i,0} - x_{i,1})(x_{i-1,0} - x_{i,0}) + (y_{i,0} - y_{i,1})(y_{i-1,0} - y_{i,0}) = 0, & i = \overline{0, m+1}, \\ (x_{i,n} - x_{i,n+1})(x_{i-1,n+1} - x_{i,n+1}) + \\ + (y_{i,n} - y_{i,n+1})(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1}) = 0, & i = \overline{0, m1}, i = \overline{m4, m+1}, \\ y_{i,n} - y_{i,n+1} = 0, & i = \overline{m1, m2}, i = \overline{m3, m4}, \\ x_{i,n} - x_{i,n+1} = 0, & i = \overline{m2, m3}. \end{array} \right.$$

Збільшуючи поступово висоту H і проводячи розрахунки за описаним алгоритмом, доки $x_{m+1,0} = x_{m+1,n+1}$, прийдемо до одного із ключових випадків (див. рис. 4). Зафіксуємо при цьому відповідну висоту $H = H_1$.

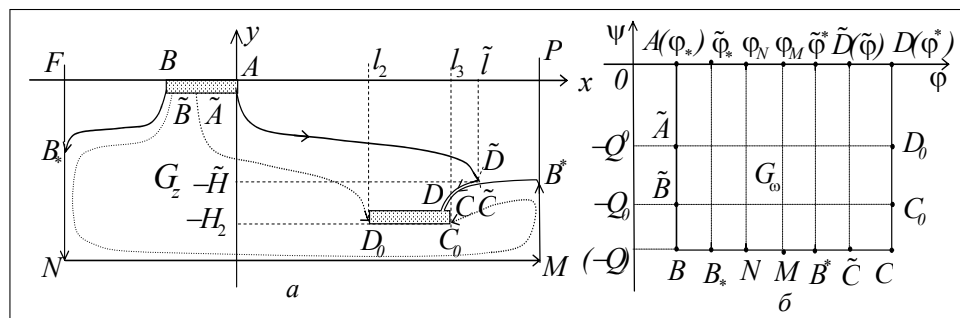


Рис. 5. Схема області фільтрації для випадку $H_1 < H = H_2 < H_3$

Для випадку, коли $H_1 < H = H_2 < H_3$, формули (7) і (8) матимуть вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{0,j} = 0, \quad y_{m+1,j} = -H, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ g_3(y_{i,0}) = \varphi_i, \quad i = \overline{0, m5}, \\ g_1(y_{i,n+1}) = \varphi_i, \quad i = \overline{0, m1}, \\ \varphi_{m1} = \tilde{\varphi}^*, \quad x_{i,n+1} = -l_F, \quad i = \overline{m1, m2}, \\ y_{i,n+1} = -H_g, \quad i = \overline{m2, m3}, \\ x_{i,n+1} = l_P, \quad i = \overline{m3, m4}, \\ g_2(y_{i,n+1}) = \varphi_i, \quad i = \overline{m4, m5}, \\ \varphi_{m4} = \tilde{\varphi}^* \\ x_{i,0} = x_{i,n+1}, \quad y_{i,0} = y_{i,n+1}, \quad i = \overline{m5, m+1}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,j} - x_{0,j} = 0, \quad x_{m,j} - x_{m+1,j} = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ (x_{i,0} - x_{i,1})(x_{i-1,0} - x_{i,0}) + \\ + (y_{i,0} - y_{i,1})(y_{i-1,0} - y_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \\ (x_{i,n} - x_{i,n+1})(x_{i-1,n+1} - x_{i,n+1}) + \\ + (y_{i,n} - y_{i,n+1})(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1}) = 0, \quad i = \overline{0, m1}, i = \overline{m4, m+1}, \\ y_{i,n} - y_{i,n+1} = 0, \quad i = \overline{m1, m2}, i = \overline{m3, m4}, \\ x_{i,n} - x_{i,n+1} = 0, \quad i = \overline{m2, m3}. \end{array} \right.$$

При подальшому поступовому збільшенні висоти H залягання водозабору прийдемо до ключових випадків, що характеризуються відповідними умовами $x_{m5,0} = x_{m5,n+1} = l_P, \quad y_{i,0} = y_{i,n+1} = \tilde{\varphi}^*, \quad H = H_3$ (див. рис. 6) та $x_{m+1,0} = x_{m+1,n+1} = l_3, \quad H = H_5$ (див. рис. 7).

Для розрахунку фільтраційного процесу (рис. 8) замість (7) і (8) запишемо

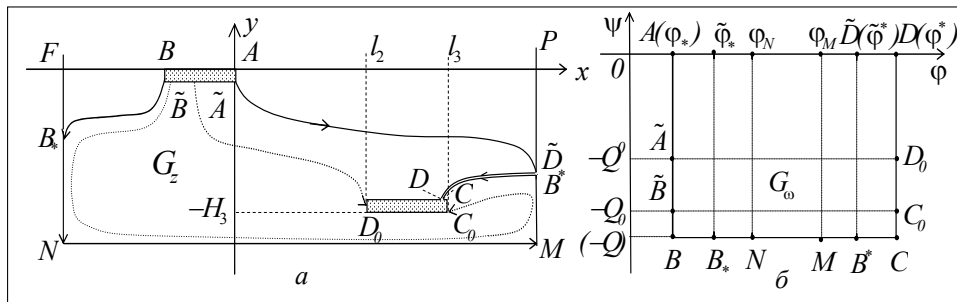


Рис. 6. Схема області фільтрації для випадку $H = H_3$

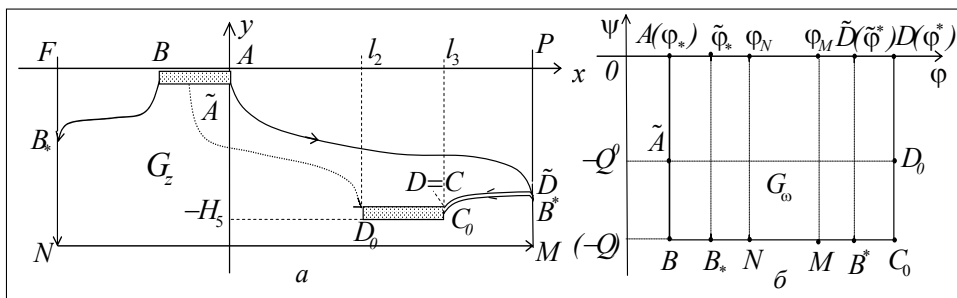


Рис. 7. Схема області фільтрації для випадку $H = H_5$

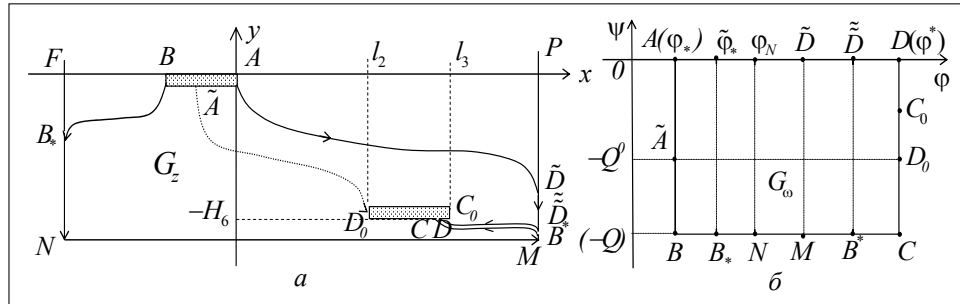


Рис. 8. Схема області фільтрації для випадку $H_5 < H = H_6 < H_7$

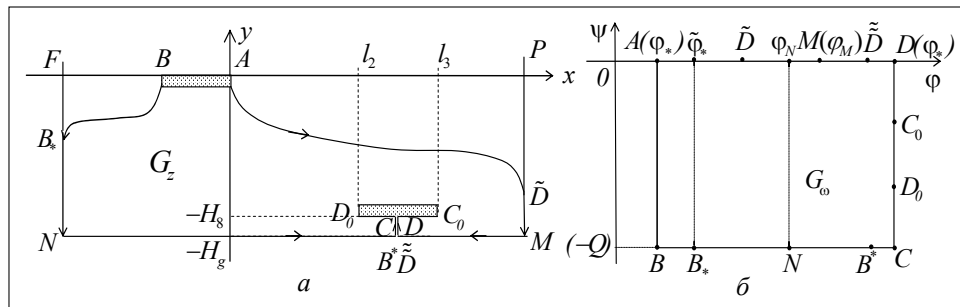


Рис. 9. Схема області фільтрації для випадку $H_7 < H = H_8 < H_g$

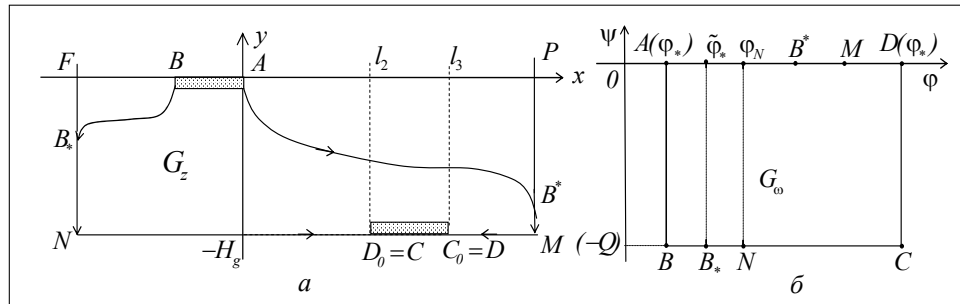


Рис. 10. Схема області фільтрації для випадку $H = H_g$

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{0,j} = 0, \quad y_{m+1,j} = -H, & j = \overline{0, n+1}, \\ g_3(y_{i,0}) = \varphi_i, & i = \overline{0, m3}, \\ x_{i,0} = l_P, & i = \overline{m3, m4}, \\ g_1(y_{i,n+1}) = \varphi_i, & i = \overline{0, m1}, \\ \varphi_{m1} = \tilde{\varphi}_*, & \\ x_{i,n+1} = -l_F, & i = \overline{m1, m2}, \\ y_{i,n+1} = -H_g, & i = \overline{m2, m3}, \\ x_{i,n+1} = l_P, & i = \overline{m3, m4}, \\ x_{i,0} = x_{i,n+1}, \quad y_{i,0} = y_{i,n+1}, & i = \overline{m4, m+1}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,j} - x_{0,j} = 0, \quad x_{m,j} - x_{m+1,j} = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ (x_{i,0} - x_{i,1})(x_{i-1,0} - x_{i,0}) + \\ + (y_{i,0} - y_{i,1})(y_{i-1,0} - y_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m3}, i = \overline{m4, m+1}, \\ y_{i,1} - y_{i,0} = 0, \quad i = \overline{m3, m4}, \\ (x_{i,n} - x_{i,n+1})(x_{i-1,n+1} - x_{i,n+1}) + \\ + (y_{i,n} - y_{i,n+1})(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1}) = 0, \quad i = \overline{0, m1}, i = \overline{m4, m+1}, \\ y_{i,n} - y_{i,n+1} = 0, \quad i = \overline{m1, m2}, i = \overline{m3, m4}, \\ x_{i,n} - x_{i,n+1} = 0, \quad i = \overline{m2, m3}. \end{array} \right.$$

При цьому серед таких випадків ключове (граничне) значення висоти H ($H = H_6$) знаходиться з умови $y_{m4,0} = y_{m4,n+1} = -H_g$.

Для випадків, які характеризуються умовами ($x^* < l_p, y^* < -H$), замість (7) і (8) матимемо

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{0,j} = 0, \quad y_{m+1,j} = -H, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ g_3(y_{i,0}) = \varphi_i, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ x_{i,0} = l_p, \quad i = \overline{m-1, m2}, \\ y_{i,0} = -H_g, \quad i = \overline{m2, m3}, \\ g_1(y_{i,n+1}) = \varphi_i, \quad i = \overline{0, m1}, \\ \varphi_{m1} = \tilde{\varphi}_*, \\ x_{i,n+1} = -l_F, \quad i = \overline{m1, m2}, \\ y_{i,n+1} = -H_g, \quad i = \overline{m2, m3}, \\ x_{i,0} = x_{i,n+1}, \quad y_{i,0} = y_{i,n+1}, \quad i = \overline{m3, m+1}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,j} - x_{0,j} = 0, \quad x_{m,j} - x_{m+1,j} = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ (x_{i,0} - x_{i,1})(x_{i-1,0} - x_{i,0}) + \\ + (y_{i,0} - y_{i,1})(y_{i-1,0} - y_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, i = \overline{m3, m+1}, \\ y_{i,1} - y_{i,0} = 0, \quad i = \overline{m-1, m2}, \\ x_{i,1} - x_{i,0} = 0, \quad i = \overline{m2, m3}, \\ (x_{i,n} - x_{i,n+1})(x_{i-1,n+1} - x_{i,n+1}) + \\ + (y_{i,n} - y_{i,n+1})(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1}) = 0, \quad i = \overline{0, m1}, i = \overline{m3, m+1}, \\ y_{i,n} - y_{i,n+1} = 0, \quad i = \overline{m1, m2}, \\ x_{i,n} - x_{i,n+1} = 0, \quad i = \overline{m2, m3}. \end{array} \right.$$

Зокрема у випадку, коли водозабір лежить на границі області (рис. 10), що має місце при $H = H_g$, системи рівнянь (7) і (8) у алгоритмі матимуть вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{0,j} = 0, \quad y_{m+1,j} = -H, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ g_3(y_{i,0}) = \varphi_i, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ x_{i,0} = l_P, \quad i = \overline{m-1, m2}, \\ y_{i,0} = -H_g, \quad i = \overline{m2, m+1}, \\ g_1(y_{i,n+1}) = \varphi_i, \quad i = \overline{0, m1}, \\ \varphi_{m1} = \tilde{\varphi}^*, \\ x_{i,n+1} = -l_F, \quad i = \overline{m1, m2}, \\ y_{i,n+1} = -H_g, \quad i = \overline{m2, m+1}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,j} - x_{0,j} = 0, \quad x_{m,j} - x_{m+1,j} = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ (x_{i,0} - x_{i,1})(x_{i-1,0} - x_{i,0}) + (y_{i,0} - y_{i,1})(y_{i-1,0} - y_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ y_{i,1} - y_{i,0} = 0, \quad i = \overline{m-1, m2}, \\ x_{i,1} - x_{i,0} = 0, \quad i = \overline{m2, m+1}, \\ (x_{i,n} - x_{i,n+1})(x_{i-1,n+1} - x_{i,n+1}) + \\ + (y_{i,n} - y_{i,n+1})(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1}) = 0, \quad i = \overline{0, m1}, \\ y_{i,n} - y_{i,n+1} = 0, \quad i = \overline{m1, m2}, \\ x_{i,n} - x_{i,n+1} = 0, \quad i = \overline{m2, m+1}. \end{array} \right.$$

ВИСНОВКИ

Розроблено системний опис характерних випадків формування течії та узагальнений алгоритм розв'язання відповідного комплексу крайових задач. Алгоритми розв'язання задач (як проміжних, так і ключових) у конкретних випадках формування течії ґрунтуються на ідеї почергової параметризації граничних і внутрішніх вузлів динамічної сітки, параметрів конформності та потенціалу керування. При цьому алгоритм вибору, на відміну від [9] (де автори йшли від ключових задач), ґрунтується на розв'язанні конкретних типів проміжних задач, а розв'язки ключових знаходяться шляхом відповідних граничних переходів.

У перспективі — узагальнення побудованого алгоритму стосовно розв'язування відповідних крайових задач для неоднорідних анізотропних середовищ за умов зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бомба А.Я., Кауштан С.С. Моделювання зворотного впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації // Вісн. Тернопільського держ. технічн. ун-ту. — 2004. — 9, № 1. — С. 123–129.
2. Бомба А.Я., Пригорницький Д.О., Скопечький В.В. Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення з післядією // Доп. НАН України. — 2004. — № 3. — С. 62–68.

3. *Бомба А.Я., Гаврилюк В.І., Капитан С.С.* Застосування методу «фіктивних областей» та методології квазіконформних відображень до моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтових греблях // Волинський матем. вісн.: Прикладна математика. — 2005. — Вип. 12. — № 3. — С. 28–38.
4. *Гаврилюк В.І.* Чисельне розв’язання модельних крайових задач на квазіконформні відображення в областях з вільними межами та однорідними включеннями // Волинський матем. вісн.: Прикладна математика. — 2007. — Вип. 4. — № 13. — С. 65–76.
5. *Бомба А.Я., Гаврилюк В.І., Скопецкий В.В.* Метод «фиктивных областей» и квазиконформных отображений решения нелинейных краевых задач со свободными границами и включениями // Компьютерная математика. — 2007. — № 1. — С. 91–101.
6. *Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецкий В.В.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. — Київ: Наук. думка, 2007. — 308 с.
7. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
8. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. — Киев: Наук. думка, 1980. — 334 с.
9. *Пригорницький Д.О.* Нелінійні обернення модельних крайових задач на конформні відображення для тризв’язних областей // Волинський матем. вісн.: Прикладна математика. — 2004. — Вип. 2. — С. 196–211.
10. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977. — 664 с.

Надійшла 05.10.2008