УДК 517.9

НАБЛИЖЕНІ ЕКСТРЕМАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ВКЛЮЧЕНЬ СУБДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

В.В. ЯСІНСЬКИЙ, О.А. КАПУСТЯН

Розглядається задача знаходження наближеного оптимального керування у формі оберненого зв'язку для еволюційного включення субдиференціального типу, яке зазнає збурень виду $\varepsilon F(y)$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, F — многозначне відображення. За умови, що при $\varepsilon = 0$ задача допускає синтез $u[t, y]$, доведено: формула $u[t, y]$ реалізує наближений синтез вихідної задачі при малих $\varepsilon > 0$.

ВСТУП

Розглядається задача оптимального керування для одного класу еволюційних включень субдиференціального типу. Теорія екстремальних розв'язків еволюційних включень у нескінченновимірних просторах є сучасним напрямом у теорії оптимізації, яка активно розвивається завдяки системному підходу, розробленому в роботах [1–3]. Використовуючи [1–3], загальні результати про розв'язність та властивості розв'язків нескінченновимірних еволюційних включень з [4–6], а також конструктивні методи точного та наближеного синтезу в лінійно-квадратичних нескінченновимірних задачах [7, 8], в статті розв'язана задача наближеного синтезу для еволюційного включення з правою многозначною частиною виду $\varepsilon F(y)$ при малих $\varepsilon > 0$ за умови, що при $\varepsilon = 0$ має місце точний синтез. Отримані результати застосовано до оптимізаційної моделі збереження колективних знань, запропонованої в [9].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ОСНОВНІ УМОВИ

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір, $\|.\|$ і $(\cdot,\cdot)$ — норма і скалярний добуток в H, $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ — власна, опукла, напівнеперервна знизу функція, $cl_H(D(\varphi)) = H$, $\partial\varphi$ — її субдиференціал, $F : H \to 2^H$ — многозначне відображення, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Для заданих $p \in L^1(0, T; H)$, $g \in H$ розглядається задача оптимального керування

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y) + \varepsilon F(y) + p(t) + g \cdot u(t), \ t \in (0, T), \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \tag{1}$$

$$u(\cdot)\in U\subset L^2(0,T) \text{ — замкнена, опукла,} \qquad (2)$$

$$J(y,u)\to \inf\,. \qquad (3)$$

Нехай $\{\hat{y}_\varepsilon,\hat{u}_\varepsilon\}$ — оптимальний процес в (1)–(3), $\hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y}_\varepsilon,\hat{u}_\varepsilon)$ — значення задачі. Нехай при $\varepsilon=0$ задача (1)–(3) допускає синтез $u=u[t,y]$, на якому реалізується значення $\hat{J}_0$ цієї задачі.

Основною метою роботи є доведення твердження, що формула $u[t,y]$ дає наближений синтез вихідної задачі (1)–(3) при малих $\varepsilon>0$, тобто для будь-якого розв'язку $\tilde{y}_\varepsilon(\cdot)$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}\in -\partial\varphi(y)+\varepsilon F(y)+p(t)+g\cdot u[t,y],\ t\in(0,T), \\ y(0)=y_0 \end{cases} \qquad (4)$$

справедлива гранична рівність

$$\left|J(\tilde{y}_\varepsilon,u[t,\tilde{y}_\varepsilon])-\hat{J}_\varepsilon\right|\to 0,\ \varepsilon\to 0\,.$$

Сформулюємо основні умови, накладені на параметри задачі.

1) $\forall R>0$ множина $M_R=\{u\in H\,|\,\|u\|\le R,\ \varphi(u)\le R\}$ — компакт в H;

2) $F:H\to C_v(H)$, де $C_v(H)$ — сукупність всіх непорожніх, обмежених, замкнених, опуклих підмножин H;

3) F — напівнеперервна зверху в тому сенсі, що $\forall\varepsilon>0$, $\forall u_0\in H$, $\exists\delta>0$:

$$\forall u\in O_\varepsilon(u_0)\,,\ F(u)\subset O_\varepsilon(F(u_0))\,,$$

де $O_\varepsilon(A)=\{u\in H\,|\inf\limits_{z\in A}\|u-z\|<\varepsilon\}$ — ε-окіл множини $A\subset H$;

4) $\exists C_1,C_2\ge 0,\ \forall u\in H\ \ \|F(u)\|_+ := \sup\limits_{z\in F(u)}\|z\|\le C_1+C_2\|\varphi\|$;

5) функціонал J — напівнеперервний знизу на $C([0,T];H)\times L^2_w(0,T)$;

6) функціонал J — неперервний на $C([0,T];H)\times L^2(0,T)$;

7) $\exists\,\gamma>0,\ \exists C_3\ge 0,\ \forall\, y\in C([0,T];H),\ \forall\, u\in U$:

$$J(y,u)\ge -C+\gamma\int_0^T |u(t)|^2\,dt\,;$$

8) задача (1)–(3) при $\varepsilon=0$ має єдиний розв'язок $\{\hat{y},\hat{u}\}$, причому $\hat{u}$ — це форма оберненого зв'язку, тобто $\hat{u}(t)=u[t,\hat{y}(t)]$, де функція $u:[0,T]\times H\to R$ вимірна по першій змінній і неперервна;

9) $\forall\, y\in H,\ \forall\, t\in[0,T],\ \exists\alpha(\cdot),\ \beta(\cdot)\in L^2(0,T)\ \ |u[t,y]|\le\alpha(t)+\beta(t)\|y\|$.

Умови 1) – 4) потрібні для розв'язності (1) при кожному фіксованому $u\in U$ [6], умови 5) – 7) — для розв'язності (1)–(3), а 8), 9) продиктовані, з одного боку, виглядом і властивостями синтезованого керування в лінійно-квадратичних задачах за наявності обмежень на керування [7, 8], а з іншого — необхідністю доводити розв'язність задачі (4) [6].

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Доведення основного твердження розіб'ємо на декілька кроків, кожен з яких представляє самостійний інтерес.

Лема 1. За умов 1)–7) $\forall \varepsilon > 0$ задача (1)–(3) має, принаймні, один розв'язок.

Доведення. Оскільки $\forall u(\cdot) \in U$, $g \cdot u \in L^2(0,T;H)$, $p(\cdot) \in L^1(0,T;H)$, то з роботи [5] маємо, що $\forall \varepsilon > 0$, $\forall u(\cdot) \in U$ існує $y(\cdot) \in C([0,T];H)$ — інтегральний розв'язок (1).

Нехай $\{y_n, u_n\}$ — мінімізуюча послідовність в (1)–(3) при фіксованому ε. Тоді $\hat{J}_\varepsilon = \lim_{n\to\infty} J(y_n, u_n)$, а з оцінки 7) випливає, що $\{u_n\}$ — обмежена в $L^2(0,T)$. Тому по деякій підпослідовності $u_n \to \tilde{u}$ слабо в $L^2(0,T)$, причому $\tilde{u} \in U$.

Нехай $y_n(\cdot)$ — інтегральний розв'язок (1) з керуванням $u_n(\cdot)$. Тоді $\exists f_n \in L^1(0,T;H)$, $f_n(t) \in F(y_n(t))$ майже скрізь така, що $y_n(\cdot)$ — інтегральний розв'язок задачі

$$\begin{cases} \dfrac{dy_n}{dt} \in -\partial\varphi(y_n(t)) + \varepsilon f_n(t) + p(t) + g \cdot u_n(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{5}$$

Покладемо $l_n := \varepsilon f_n + p + g \cdot u_n \in L^1(0,T;H)$, а для розв'язку $y_n(\cdot)$ задачі (5) введемо позначення $y_n(\cdot) = I(y_0) l_n(\cdot)$. Тоді з роботи [4] маємо, що $\forall t \in [0,T]$ справедлива оцінка

$$\|y_n(t)\| \le C + \int_0^t \|l_n(s)\| ds, \tag{6}$$

де константа $C \ge 0$ не залежить від u і ε. Отже, з умови 4) отримаємо

$$\begin{aligned} \|y_n(t)\| &\le C + \varepsilon \int_0^t \|f_n(s)\| ds + \int_0^t \|p(s)\| ds + \|g\| \int_0^t |u_n(s)| ds \le \\ &\le C + \varepsilon \int_0^t \left(C_1 + C_2 \|y_n(s)\|\right) ds + \int_0^t \|p(s)\| ds + \|g\| \int_0^t |u_n(s)| ds, \end{aligned} \tag{7}$$

і за лемою Гронуолла одержимо, що $\{y_n(\cdot)\}$ — обмежена в $C([0,T];H)$.

Для подальшого доведення скористаємося відомим результатом.

Лема 2 [5]. Якщо $\{l_n(\cdot)\} \subset L^1(0,T;H)$ — рівномірно інтегрована, тобто $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall \Omega \subset (0,T)$, $\mu(\Omega) < \delta$, $\forall n \ge 1$, $\int_\Omega \|f_n(t)\| dt < \varepsilon$, то по деякій підпослідовності $I(y_0)l_n(\cdot) \to y(\cdot)$ в $C([0,T];H)$, і якщо $l_n \to l$ слабо в $L^1(0,T;H)$, то $y(\cdot) = I(y_0)l(\cdot)$.

Продовжимо доведення леми 1. Оскільки з 4) маємо $\|f_n(t)\| \le C_1 + + C_2\|y_n(t)\|$, то легко бачити, що $\{l_n\}$ рівномірно інтегрована, причому по підпослідовності $l_n \to \widetilde{l} = \varepsilon \widetilde{f} + p + g \cdot \widetilde{u}$ слабо в $L^1(0,T;H)$. Тоді по підпослідовності $y_n(\cdot) \to \widetilde{y}(\cdot)$ в $C([0,T];H)$, де $\widetilde{y}(\cdot) = I(y_0)\widetilde{l}(\cdot)$ і $\widetilde{f}(t) \in F(\widetilde{y}(t))$ майже скрізь. Отже, $\{\widetilde{y}(\cdot), \widetilde{u}(\cdot)\}$ — допустимий процес у задачі (1)–(3) і з умови 5) отримаємо $\hat{J}_\varepsilon = \lim\limits_{n\to\infty} J(y_n, u_n) \ge J(\widetilde{y}, \widetilde{u})$, тобто $\{\widetilde{y}, \widetilde{u}\}$ — розв'язок (1)–(3). Лему доведено.

Лема 3. За умов 1)–7) для будь-якого розв'язку $\{\hat{y}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon\}$ задачі (1)–(3) маємо

$$\hat{J}_\varepsilon \to \hat{J}_0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{8}$$

$$\hat{y}_\varepsilon \to \hat{y} \text{ в } C([0,T];H), \quad \hat{u}_\varepsilon \to \hat{u} \text{ слабо в } L^2(0,T), \tag{9}$$

де $\{\hat{y}, \hat{u}\}$ — єдиний оптимальний процес в (1)–(3) при $\varepsilon = 0$; $\hat{J}_0 = J(\hat{y}, \hat{u})$ — відповідне значення задачі.

Доведення. Нехай $\{\hat{y}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon\}$ — оптимальний процес в (1)–(3). Тоді

$$\hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon) \ge -C + \gamma \int_0^T |\hat{u}_\varepsilon(t)|^2 \, dt,$$

і для фіксованого $u \in U$ відповідного допустимого процесу $\{y_\varepsilon, u\}$ маємо

$$\hat{J}_\varepsilon \le J(y_\varepsilon, u).$$

Отже,

$$\gamma \int_0^T |\hat{u}_\varepsilon(t)|^2 \, dt \le J(y_\varepsilon, u) + C.$$

З оцінки (7) і за лемою Гроноулла отримаємо, що $\{y_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon>0}$ — обмежена в $C([0,T];H)$. Тоді в силу умови 6) числа $J(y_\varepsilon, u)$ обмежені рівномірно по $\varepsilon > 0$, а, отже, $\{\hat{u}_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon\ne 0}$ — обмежена в $L^2(0,T)$.

Розглянемо довільну послідовність $\varepsilon_n \to 0$. По підпослідовності $\hat{u}_{\varepsilon_n}(\cdot) \to \hat{u}(\cdot)$ слабо в $L^2(0,T)$, причому $\hat{u} \in U$. Тоді аналогічно до міркувань леми 1, оскільки послідовність $\{\hat{y}_{\varepsilon_n}(\cdot)\}$ задовольняє оцінку (7), маємо, що $\hat{l}_{\varepsilon_n} = \varepsilon_n \hat{f}_n + p + g \cdot \hat{u}_{\varepsilon_n}$, $\hat{f}_n(t) \in F(\hat{y}_{\varepsilon_n}(t))$ є рівномірно інтегрованою, причому по підпослідовності $\hat{l}_{\varepsilon_n} \to \hat{l} = p + g \cdot \hat{u}$ слабо в $L^1(0,T;H)$. Отже, $\hat{y}_{\varepsilon_n}(\cdot) \to \hat{y}(\cdot)$ в $C([0,T];H)$, де $\hat{y}(\cdot) = I(y_0)\hat{l}(\cdot)$. Тоді в силу 5)

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \hat{J}_{\varepsilon_n} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \hat{J}(\hat{y}_{\varepsilon_n}, \hat{u}_{\varepsilon_n}) \ge J(\hat{y}, \hat{u}).$$

З іншого боку, $\forall u \in U$ для відповідного допустимого процесу $\{y_\varepsilon, u\}$ запишемо

$$\hat{J}_{\varepsilon_n} \le J(y_{\varepsilon_n}, u).$$

Для послідовності $\{y_{\varepsilon_n}\}$ застосовано попередні міркування, згідно з якими $y_{\varepsilon_n}(\cdot) \to y(\cdot)$ в $C([0,T];H)$, де $y(\cdot) = I(y_0)l(\cdot)$, $l(\cdot) = p + gu$. Тоді в силу 6)

$$\lim_{n\to\infty} J(y_{\varepsilon_n}, u) = J(y,u).$$

Відомо [4], що при $\varepsilon = 0$ і фіксованому $u \in U$ задача (1) має єдиний інтегральний розв'язок $y(\cdot) = I(y_0)l(\cdot)$. Тоді з нерівності

$$J(\hat{y},\hat{u}) \le \varliminf_{n\to\infty} \hat{J}_{\varepsilon_n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \hat{J}_{\varepsilon_n} \le \lim_{n\to\infty} J(y_{\varepsilon_n}, u) = J(y,u) \tag{10}$$

і довільності $u \in U$ одержимо, що $\{\hat{y},\hat{u}\}$ — оптимальний процес в (1)–(3) при $\varepsilon = 0$. З (10) при $y = \hat{y}$, $u = \hat{u}$ запишемо

$$\hat{J}_0 = J(\hat{y},\hat{u}) = \lim_{n\to\infty} \hat{J}_{\varepsilon_n},$$

і по $\varepsilon_n \to 0$ мають місце граничні рівності (9).

Нехай тепер, від супротивного, $\exists \delta > 0$ таке, що для деякої послідовності $\varepsilon_n \to 0$ виконується нерівність

$$\forall n \ge 1 \quad \left|\hat{J}_{\varepsilon_n} - \hat{J}_0\right| \ge \delta.$$

Тоді, повторюючи попередні міркування, можемо виділити підпослідовність $\varepsilon_{n_k} \to 0$ таку, що $\hat{J}_{\varepsilon_{n_k}} \to \hat{J}_0$. Це і доводить: (8), (9) мають місце при $\varepsilon \to 0$. Лему доведено.

Теорема. Нехай виконуються умови 1) – 9). Тоді формула $u[t,y]$ реалізує наближений синтез вихідної задачі (1)–(3) при малих $\varepsilon > 0$.

Доведення. Нехай $u[t,y]$ — формула оптимального керування задачі (1) – (3) при $\varepsilon = 0$ у формі оберненого зв'язку. Розглянемо задачу (4). Покладемо $F_1(t,y) = p(t) + gu[t,y]$. Тоді $F_1(t,\cdot)$ — неперервне; $\forall y \in H$: $F_1(\cdot,y)$ — вимірне; $\|F_1(t,y)\| \le p(t) + \alpha(t)\|g\| + \beta(t)\|g\|\|y\| = \alpha_1(t) + \beta_1(t)\|y\|$, де $\alpha_1(\cdot), \beta_1(\cdot) \in L^1(0,T)$.

Тепер легко показати [6], що $\forall \varepsilon > 0$ відображення $\varepsilon F + F_1$ задовольняє умови глобальної розв'язності з роботи [5], тобто $\forall \varepsilon > 0$ існує $\tilde{y}_\varepsilon(\cdot) \in C([0,T];H)$ — інтегральний розв'язок (4). Позначимо $\tilde{u}_\varepsilon(t) = u[t, \tilde{y}_\varepsilon(t)]$. Оскільки за лемою 3 $\hat{J}_\varepsilon \to \hat{J}_0$, $\varepsilon \to 0$, то теорему буде доведено, якщо показати, що

$$J(\tilde{y}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon) \to \hat{J}_0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Нехай послідовність $\varepsilon_n \to 0$ довільна. Позначимо $\widetilde{y}_n = \widetilde{y}_{\varepsilon_n}(\cdot)$, $\widetilde{u}_n = \widetilde{u}_{\varepsilon_n}(\cdot)$. Тоді $\exists \widetilde{f}_n \in L^1(0,T;H)$, $\widetilde{f}_n(t) \in F(\widetilde{y}_n(t))$ майже скрізь така, що $\widetilde{y}_n(\cdot) = I(y_0)\widetilde{l}_n(\cdot)$, де $\widetilde{l}_n = \varepsilon_n \widetilde{f}_n + p + g \cdot \widetilde{u}_n$.

З оцінки (7), нерівності $|\widetilde{u}_n(t)| \le \alpha(t) + \beta(t)\|\widetilde{y}_n(t)\|$ і за лемою Гроноулла отримаємо, що $\{\widetilde{y}_n(\cdot)\}$ обмежена в $C([0,T];H)$. Тоді $\exists C(\cdot) \in L^2(0,T)$: $\forall n > 0$ $|\widetilde{u}_n(t)| \le C(t)$ майже скрізь. Це означає, що по підпослідовності $\widetilde{u}_n(\cdot) \to \widetilde{u}(\cdot)$ слабо в $L^2(0,T)$, $\{\widetilde{l}_n\}$ рівномірно інтегрована. Отже, по підпослідовності $\widetilde{y}_n(\cdot) \to \widetilde{y}(\cdot)$ в $C([0,T];H)$, де $\widetilde{y}(\cdot) = I(y_0)\widetilde{l}(\cdot)$, $\widetilde{l}(\cdot) = p + g\widetilde{u}$.

Оскільки в силу 8) $\widetilde{u}_n(t) = u[t, \widetilde{y}_n(t)] \to u[t, \widetilde{y}(t)]$ майже скрізь, то $\widetilde{u}(t) = u[t, \widetilde{y}(t)]$ і за теоремою Лебега $\widetilde{u}_n(\cdot) \to \widetilde{u}(\cdot)$ в $L^2(0,T)$. Таким чином, $\widetilde{y}(\cdot)$ — розв'язок задачі

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y) + p(t) + g \cdot u[t,y], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{11}$$

Проте за умовою 8) задача (11) має єдиний розв'язок $\hat{y}(\cdot)$, де $\{\hat{y}, u[t,\hat{y}]\}$ — оптимальний процес в задачі (1)–(3) при $\varepsilon = 0$. Таким чином, $\widetilde{y} \equiv \hat{y}$, $\widetilde{u} \equiv \hat{u} = u[t,\hat{y}]$ і $\hat{J}_0 = J(\hat{y},\hat{u})$. Тоді в силу умови 6)

$$J(\widetilde{y}_n, \widetilde{u}_n) \to \hat{J}_0 = J(\hat{y},\hat{u}), \quad n \to \infty.$$

В силу єдиності розв'язку задачі (11) аналогічно лемі 3 показується, що має місце гранична рівність

$$J(\widetilde{y}_\varepsilon, \widetilde{u}_\varepsilon) \to \hat{J}_0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Отже, для процесу $\{\widetilde{y}_\varepsilon, \widetilde{u}_\varepsilon\}$ і оптимального процесу $\{\hat{y}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon\}$ задачі (1)–(3) мають місце граничні рівності

$$J(\widetilde{y}_\varepsilon, \widetilde{u}_\varepsilon) - J(\hat{y}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\widetilde{y}_\varepsilon - \hat{y}_\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \text{ в } C([0,T];H),$$

$$\widetilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \text{ слабо в } L^2(0,T).$$

Теорему доведено.

ЗАСТОСУВАННЯ

Грунтуючись на загальній схемі роботи [9], для спостережуваного рівня знань $y(x,t)$ деякої освітньої системи ставиться задача про мінімальне відхилення від еталонного рівня z за рахунок керуючого параметра u, вважаючи, що реакція системи визначається в межах інтервалу $[\varepsilon\chi(y) + p(x), \varepsilon\theta(y) + p(x)]$.

Тоді одержуємо задачу оптимального керування

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} \in -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) + \varepsilon F(y(x,t)) + p(x,t) + g(x)\cdot u(t),\ (x,t)\in(0,l)\times(0,T), \\ \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \\ y(x,0) = y_0(x), \end{cases} \tag{12}$$

де $F(y) = [\chi(y), \theta(y)]$;

$$u(\cdot) \in U = \left\{ v \in L^2(0,T) \,\middle|\, |v(t)| \le \xi \text{ майже скрізь} \right\};$$

$$J(y,u) = \left(\int_0^l q(x)\big(y(x,T) - z(x)\big)dx \right)^2 + \gamma \int_0^T u^2(t)dt \to \inf .$$

Легко показати, що задача (12) при $\mu \in L^\infty(0,l)$, $\mu(x) \ge \mu_0 > 0$ м. с., $\chi(\cdot)$ напівнеперервна знизу; $\theta(\cdot)$ — напівнеперервна зверху; $|\chi(y)| + |\theta(y)| \le \le C_1 + C_2|y|$; $p,g,q,z \in L^2(0,l)$, є частинним випадком задачі (1)–(3) з $H = L^2(0,l)$, і виконуються умови 1)–7).

При $\varepsilon = 0$ задача (12) редукується до одномірної задачі відносно змінної $a(t) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i e^{\lambda_i^2(t-T)} y_i(t)$, де $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ — власні числа відповідної спектральної задачі; y_i — коефіцієнти Фур'є розв'язку $y(x,t)$ за власними функціями $X_i(x)$ цієї задачі [7, 8]. Тоді за умови, що функція

$$b(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{\lambda_i^2(t-T)} q_i\, g_i$$

є додатною і монотонно зростаючою на $[0,T]$, методом динамічного програмування Беллмана можна показати, що формула

$$u[t,y] = \begin{cases} -\dfrac{\big(R(t), y(t)\big) - \beta + \int_t^T p(s)ds + \xi\int_\tau^T b(s)ds}{\gamma + \int_t^T \big(b(s)\big)^2 ds} b(t), \quad t \in [0,\tau], \\ \xi, \quad t \in [\tau, T], \end{cases} \tag{13}$$

де $R(t) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i e^{\lambda_i^2(t-T)} X_i(t)$, $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} q_i z_i$, $p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{\lambda_i^2(t-T)} q_i p_i$, а τ — єдиний розв'язок рівняння

$$\frac{\left(R(t), y(t)\right) - \beta + \int\limits_t^T p(s)ds + \xi \int\limits_\tau^T b(s)ds}{\gamma + \int\limits_t^T \left(b(s)\right)^2 ds} b(t) = -\xi, \quad t \in [0, \tau],$$

визначає синтез задачі (12) при $\varepsilon = 0$.

Легко бачити, що формула (13) задовольняє умови 8), 9), отже, згідно з теоремою, вона реалізує наближений синтез в задачі (12) при малих $\varepsilon > 0$.

ВИСНОВКИ

На основі формули точного синтезу для незбуреної ($\varepsilon = 0$) задачі оптимального керування для еволюційного включення субдиференціального типу обґрунтовано наближений синтез вихідної задачі, яка збурюється многозначним доданком виду $\varepsilon F(y)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Иваненко В.И., Мельник В.С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — Киев: Наук. думка, 1988. — 287 с.
2. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — Киев: Наук. думка, 1999. — 630 с.
3. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. — Киев: Наук. думка, 2004. — 588 с.
4. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. — Leyden: Noordhoff, 1976. — 360 p.
5. *Толстоногов А.А.* О решениях эволюционных включений // Сибирский матем. журн. — 1992. — **33**, № 3. — С. 165–175.
6. *Global* attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness / O.V. Kapustyan, V.S. Mel'nik, J. Valero, V.V. Yasinsky. — Kyiv: Nauk. dumka, 2008. — 215 p.
7. *Капустян В.Е.* Оптимальная стабилизация ограниченным сосредоточенным управлением решений параболической краевой задачи // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 6. — С. 58–67.
8. *Сукретна А.В., Капустян О.А.* Наближений усереднений синтез задачі оптимального керування для параболічного рівняння // Укр. матем. журн. — 2004. — **56**, № 10. — С. 1384–1394.
9. *Математична* модель процесу формування та збереження колективних знань / В.В. Ясінський, О.В. Капустян, Х. Валеро // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2009. — № 2. — С. 67–77.

Надійшла 10.09.2009