УДК 519.86

ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКІВ ДЕФОЛТУ ТА РЕАЛЬНИХ ОПЦІОНІВ

М.С. ГОНЧАР, Л.С. ТЕРЕНТ'ЄВА

Запропоновано новий метод оцінювання ризиків дефолту та реальних опціонів, який полягає в тому, що інвестор як джерело фінансування за наявності певної інформації про роботу фірми оцінює можливість її дефолту.

ВСТУП

Проблема оцінювання ризиків дефолту фірми є актуальною для будь-якого інвестора. Важливим є питання побудови адекватної реальності математичної моделі еволюції ринкової вартості фірми, яка б не давала міжчасових арбітражних можливостей, тобто можливостей набути додатного капіталу, починаючи з нульового.

Перша модель еволюції вартості ризикових активів була запропонована Л. Башельє у 1900р. Її очевидним недоліком є можливість ціни ризикового активу набувати від'ємних значень. Потім П. Самуельсон запропонував модель еволюції вартості ризикового активу, яку названо геометричним броунівським рухом

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\},$$

де μ — коефіцієнт росту; σ — коефіцієнт мінливості або волатильність; W_t — стандартний процес Вінера. Д. Кокс, Р. Росс і М. Рубінштейн [6] запропонували дискретну модель еволюції ціни ризикового активу та довели теорему про повноту ринку цінних паперів у такій моделі. Модель еволюції ризикового активу Самуельсона є граничним випадком моделі Кокса–Росса–Рубінштейна. Для введених моделей характерна відсутність міжчасових арбітражних можливостей, що важливо для практичних застосувань. Д. Гаррісон і С. Пліска [7] сформулювали теорему про умови відсутності міжчасових арбітражних можливостей.

Всі моделі еволюції вартості ризикових активів мають задовольняти умови відсутності арбітражних можливостей. У згаданих вище моделях процес еволюції ризикового активу породжує єдину ризик-нейтральну ймовірнісну міру, що дозволяє теоретично оцінити можливість фірми збанкрутувати за наявності зовнішнього фінансування. Параметри процесів у цих моделях, оцінені за історичними даними, не ґарантують правильної еволюції ризикових активів у майбутньому. Такі процеси еволюції вартості активів є основою найбільш популярних і розвинених концепцій оцінювання ризиків дефолту (наприклад, Р. Мертона [1], Т. Білецького і М. Рутковського [2]). В них також не враховано роль інвестора як джерела фінансування та можливі стратегії розвитку фірми.

Ця робота започатковує нову концепцію опису еволюції вартості фірми, у якій не використовуються історичні дані і враховується факт можливої оцінки кредитором стабільності роботи фірми через поняття внутрішньої доходності та (оцінювані кредитором) фінансові потоки від майбутньої діяльності фірми. Концепція спирається на розроблену М.С. Гончаром [3] теорію певного класу випадкових процесів. Засадничою позицією створюваного методу оцінювання ризиків дефолту є ефективність еволюції вартості фірми, що полягає у відсутності міжчасового арбітражу. На описаний нижче клас випадкових процесів для еволюції вартості фірми накладено умови, за яких вартість фірми еволюціонує ефективно [3,с.746].

Означення 1. Нехай $A_0, \ldots, A_N$ — фінансові надходження від діяльності фірми, які відбуваються через певні рівні проміжки часу τ (наприклад, місяці або роки), який ми вибираємо за одиницю вимірювання часу; $A_i \geq 0$, $i = \overline{0, N}$, N — кількість періодів τ. Якщо r — ставка відсотку на депозит за неперервного нарахування відсотків, яка відповідає періоду τ, то під внутрішньою доходністю фірми в момент часу *t* розуміємо невід'ємний випадковий процес $x_t(\omega)$ такий, що з ймовірністю 1 справедлива рівність

$$e^{-rt} V_t(\omega) = \sum_{i=0}^{N} \frac{A_i}{[1 + x(t)]^i}, \qquad (1)$$

де $V_t(\omega)$ — ринкова вартість фірми в момент часу *t*. З (1) випливає, що для моделювання ринкової вартості фірми достатньо задати випадковий процес внутрішньої доходності $x(t)$.

Будемо вважати, що оцінку внутрішньої доходності фірми здійснює інвестор, який оцінює її кредитоспроможність, тобто спроможність повернути кредит у майбутньому.

Означення 2. Нехай еволюція внутрішньої доходності фірми задана на деякому ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathrm{F}, P\}$. Інформація інвестора про внутрішню доходність фірми є повною у випадку, коли процес, який описує еволюцію внутрішньої доходності, такий, що відповідна йому еволюція вартості фірми ефективна.

Повнота інформації про внутрішню доходність фірми дає можливість оцінювати ризики та реальні опціони відносно ризик-нейтрального середовища.

Концептуально реальний опціон є тактичним або стратегічним рішенням, яке може бути прийнято в певний час у майбутньому відповідно до ринкових змін. Базовими активами за реальними опціонами є реальні активи: заводи, машини, виробничі інвестиції і т.ін. Трудність оцінювання реальних опціонів та ризиків дефолту полягає в тому, що еволюція базових активів невідома на відміну від фінансових опціонів. Оцінка реального опціону є оцінкою реальних можливостей фірми, а отже, може бути здійснена за наявності інформації про такі можливості, наприклад, про введення у майбутньому додаткових потужностей (скасування збиткового виробництва). У моделі, яка створюється в даній роботі, можливі надходження від задіяння певних активів у майбутньому безпосередньо описуються коефіцієнтами A_i. Отже, маючи інформацію про основні параметри роботи фірми, оцінювання конкретного реального опціону дозволяє максимально убезпечити інвестора від втрати капіталу.

МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ ВНУТРІШНЬОЇ ДОХОДНОСТІ

Внутрішня доходність є основним критерієм оцінки інвестором ризикованості роботи фірми. Виходячи з того, що збільшення часового горизонту призводить до збільшення невизначеності, природньо припускати, що $x_t(\omega)$ — зростаючий процес обмеженої варіації. Нижче будуємо ймовірнісний простір, в якому відбувається випадкова еволюція x_t таким чином, що інформація інвестора про внутрішню доходність фірми є повною.

Побудова ймовірнісного простору для еволюції внутрішньої доходності ґрунтується на припущенні, що проміжок часу $[a,b)$, на якому спостерігається еволюція ціни фірми, можна розбити на деякі проміжки $[a_i^\alpha,\, a_{i+1}^\alpha)$, $i=\overline{1,\, k(\alpha)}$, монотонно зростаючою послідовністю точок $\{a_i^\alpha\}_{i=1}^{k(\alpha)+1}$, яка не має точок згущення ($\bigcup_{i=1}^{k(\alpha)} [a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha) = [a,b)$) так, що у кожному із проміжків з ймовірністю 1 відбувається зміна внутрішньої доходності. Такому розбиттю приписується сім'я функцій розподілу, які і є ймовірнісними характеристиками вартості фірми.

Розглянемо детальніше підхід до побудови процесу, що описує еволюцію внутрішньої доходності. Вважаємо цікавим для інвестора проміжок часу функціонування фірми, в якому можливі зміни у структурі виробництва, і складається він з N періодів (наприклад, місяців або років). Припускаємо, що зміни внутрішньої доходності фірми відбуваються у кожному періоді, а отже, наше розбиття має вигляд $[i,i+1)$, $i=\overline{0,N-1}$.

Якщо вартість фірми на проміжку часу $[i,i+1)$ може набувати значень у множині $[0,c_i)$, $c_i<\infty$, то умовна функція розподілу $F^0_{[i,i+1)}(p_i \,|\, \{p\}_{i-1})$ — ймовірність того, що вартість фірми не перевищуватиме $p_i\in[0,c_i)$ за умови, що в проміжках часу $[k,k+1)$, $k=\overline{0,i-1}$, вона була рівною $p_k\in[0,c_k)$, де введено позначення $\{p\}_{i-1}=\{p_0,\dots,p_{i-1}\}$. Пов'язуємо можливі реалізації вартості фірми з проміжком часу, в якому ці реалізації відбуваються. Покладемо $p_k=c_k(\omega_k-k)=\tau_k(\omega_k)$, $k=\overline{0,i}$, $\omega_k\in[k,k+1)$, $k=\overline{0,N-1}$, та введемо ототожнення

$$F_i(\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1}) = F^0_{[i,i+1)}(p_i \,|\, \{p\}_{i-1})\Big|_{p_k=\tau_k(\omega_k),\ \ k=\overline{0,i}}\,.$$

Кожний можливий набір функцій розподілу називатимемо сценарієм реалізації вартості фірми.

Ймовірнісний простір, в якому відбувається випадкова еволюція x_t, будуємо таким чином.

Для розбиття $[i,i+1)$, $i=\overline{0,N-1}$ розглянемо сім'ю просторів елементарних подій $\Omega_i=[0,N)$, $i=\overline{0,N-1}$.

На кожному просторі Ω_i задамо σ-алгебру подій F_i^0 — множину підмножин множини $\Omega_i = [0, N)$, яка породжується інтервалами $(c, d) \subset \subset [i, i+1)$. Потік σ-алгебр $\mathsf{F}_i^{0,t}$, $t \in [0, N)$, $\mathsf{F}_i^{0,t} \subseteq \mathsf{F}_i^0$, запишемо

$$\mathsf{F}_i^{0,t} = \begin{cases} \{\varnothing, [0, N)\}, & 0 \le t \le i, \\ B([i,t]), & i < t < i+1, \\ \bigcup\limits_{t \in [i, i+1)} B([i,t]) = \mathsf{F}_i^0, & i+1 \le t \le N, \end{cases}$$

де $B([i,t])$ — σ-алгебра підмножин множини $[0, N)$, які породжені підмножинами $(c, d) \subset [i, t]$, а $\bigcup\limits_{t \in [i, i+1)} B([i,t])$ — мінімальна σ-алгебра, що містить об'єднання σ-алгебр $B([i,t])$; $\{\Omega, \mathsf{F}^0\}$ — прямий добуток вимірних просторів $\{\Omega_i, \mathsf{F}_i^0\}$, $i = \overline{0, N-1}$; $\mathsf{F}_i^0 = \prod\limits_{i=0}^{N-1} \mathsf{F}_i^{0,t}$ — потік σ-алгебр на $\{\Omega, \mathsf{F}^0\}$.

На кожному вимірному просторі $\{\Omega_i, \mathsf{F}_i^0\}$ визначаємо сім'ю умовних функцій розподілу $F_i^0\{\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1}\}$, яка за кожного фіксованого $\{\omega\}_{i-1} \in \Omega^{i-1} = \prod\limits_{s=0}^{i-1} \Omega_s$ є неперервною справа неспадною функцією змінної $\omega_i \in [0, N)$.

$$F_i(\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1}) = \begin{cases} 0, & 0 \le \omega_i \le i, \\ \phi_i(\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1}), & i < \omega_i < i+1, \quad \{\omega\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}, \\ 1, & i+1 \le \omega_i < N, \end{cases}$$

де $\{\omega\}_{i-1} = \{\omega_0, ..., \omega_{i-1}\}$.

Функція $\phi_i(\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1})$ задовольняє умови $0 \le \phi_i < 1$, $\phi_i(i \mid \{\omega\}_{i-1}) = 0$, $i = \overline{0, N-1}$ і є неперервною справа неспадною функцією змінної ω_i на $[i, i+1)$ за кожного фіксованого $\{\omega\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}$ та вимірною з вимірного простору $\left\{ \Omega^{i-1}, \overline{\mathsf{F}}_{i-1}^0 \right\}$ у вимірний простір $\{[0,1], B([0,1])\}$ за кожного фіксованого ω_i, де $\overline{\mathsf{F}}_{i-1}^0 = \prod\limits_{s=1}^{i-1} \mathsf{F}_s^0$.

Нехай $F_i(d\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1})$ — міра, побудована за функцією розподілу $F_i(\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1})$ на σ-алгебрі F_i^0 за кожного фіксованого $\{\omega\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}$. $F_i(d\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1})$ зосереджена на підмножині $[i, i+1) \subset \Omega_i$.

Задамо міру на вимірному просторі $\{\Omega, \mathsf{F}^0\}$, визначивши її на множинах виду $A_0 \times ... \times A_{N-1}$, $A_i \in \mathsf{F}_i^0$, формулою

$$P(A_0 \times ... \times A_{N-1}) = \int\limits_{A_0} ... \int\limits_{A_{N-1}} F_0(d\omega_0) F_1(d\omega_1 \mid \{\omega\}_0) \times ... \times F_{N-1}(d\omega_{N-1} \mid \{\omega\}_{N-2}).$$

Так означена функція множин може бути продовжена до деякої міри P на $\mathcal{F}^0$ завдяки теоремі Іонеску–Тулча [4].

Отже, розглядатимемо ймовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}^0, P\}$ і потік σ-алгебр $\mathcal{F}_t^0 \subseteq \mathcal{F}^0$ на ньому, ймовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ і потік σ-алгебр $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, де $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}_t$ — поповнення відповідно $\mathcal{F}^0$ і $\mathcal{F}_t^0$ множинами нульової міри відносно міри P.

ЗАДАЧА ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКУ ДЕФОЛТУ

Спираючись на теорію, розроблену М.С. Гончаром [3], розгянемо широкий клас випадкових процесів, що описують еволюцію внутрішньої доходності фірми, і таких, в яких інформація інвестора про внутрішню доходність є повною.

Дефолт — це неможливість боржника сплатити за зобов'язаннями. Така ситуація виникає, коли вартість фірми падає нижче деякого рівня, який визначається типом та обсягами зовнішнього фінансування. Оцінку ризику дефолту фірми будуватимемо, використовуючи підхід Мертона. В рамках цього підходу вважаємо, що дефолт може відбутися лише у момент погашення боргового зобов'язання T. Нижче будуємо оцінку дефолту у ризик-нейтральному середовищі. Ця величина є усередненням за ризик-нейтральною мірою функції ризику, тобто відхиленням вартості фірми від боргового зобов'язання.

Для оцінки ризику дефолту використовуємо функцію ризику $\alpha(x)$, запропоновану Р. Мертоном.

$$\alpha(x) = \min(x, U_0) = U_0 - (U_0 - x)^+, \tag{2}$$

де U_0 — зовнішнє інвестування; $y^+ = \max(y, 0) \quad \forall y \in R$.

За даної концепції реальний опціон можемо розглядати як угоду, у відповідності з якою у разі задіяння додаткових можливостей власник опціону дістане частину доходів від діяльності фірми. Це буде тоді, коли вартість фірми підніметься вище деякого значення U_0. Платіжна функція такого реального опціону є частиною вартості фірми і має вигляд

$$f(x) = f\left(x - U_0\right),$$

де $f(0) = 0$, $f(x) \le 1 \quad \forall\, x \ge 0$.

Основним об'єктом нашого дослідження є ринкова вартість фірми, яка в момент часу t задається формулою

$$V_t = e^{rt} \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{\left[1 + x(t)\right]^n}, \tag{3}$$

де A_n, $n = \overline{0, N}$ — фінансовий потік від діяльності фірми; x_t — внутрішня доходність фірми, представлена випадковим процесом на $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, що є узгодженим з потоком $\mathcal{F}_t^0$ локальним несинґулярним мартинґалом

$$x_t = \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{[i,i+1)}(t) x_t^i(\omega_i),$$

$$x_t^i(\omega_i) = g_i(\{\omega\}_i)\chi_{[i,t)}(\omega_i) + \psi_i(\{\omega\}_{i-1}, t)\chi_{(t,i+1)}(\omega_i),$$

$$\psi_i(\{\omega\}_{i-1}, t) = \frac{1}{1 - F_i(t \mid \{\omega\}_{i-1})} \int_{(t,i+1)} g_i(\{\omega\}_i) F_i(d\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1}),$$

де $g_i(\{\omega\}_i)$ — вимірне відображення $\{\Omega^i, \mathcal{F}_i^0\} \to \{R^1, B(R^1)\}$; $\psi_i(\{\omega\}_{i-1}, t)$ — вимірне відображення $\{\Omega^{i-1}, \mathcal{F}_{i-1}^0\} \to \{R^1, B(R^1)\}$ за кожного фіксованого $t \in [i, i+1)$, $i = \overline{1, N-1}$.

Також вважаємо, що випадковий процес x_t, який описує еволюцію внутрішньої доходності фірми, належить класу K^0 [3, с. 708].

Еволюція неризикового активу задається формулою

$$B(t) = B_0 e^{rt}, \tag{4}$$

де $0 < r < 1$; B_0 — початковий вклад на банківський рахунок. Нехай діяльність фірми фінансується ззовні до моменту часу $T > 0$, $T \in [l, l+1)$, $l \le N-1$ шляхом випуску в момент часу $t = 0$ боргового зобов'язання — облігації з нульовим купоном номіналом вартістю $U_0 > 0$ $(V_0 > U_0 e^{-rT})$. Функція ризику (2) матиме вигляд

$$\alpha(V_T) = U_0 - \left(U_0 - e^{rT} \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{[i,i+1)}(T) \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{(1 + x_T^i(\{\omega\}_i))^n} \right)^+. \tag{5}$$

ФОРМУЛА ОЦІНКИ РИЗИКУ ДЕФОЛТУ

Зважаючи на специфіку процесу, що описує внутрішню доходність, для оцінювання дефолту та побудови геджувального динамічного портфелю скористаємося результатами роботи [3, гл.12], зокрема теоремами 12.6.1 та 12.6.2.

Теорема. Припустимо, що

$$x_t = \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{[i,i+1)}(t) x_t^i(\omega_i),$$

$$x_t^i(\omega_i) = g_i(\{\omega\}_i)\chi_{[i,t)}(\omega_i) + \frac{1}{1 - F_i(t \mid \{\omega\}_{i-1})} \int_{(t,i+1)} g_i(\{\omega\}_i) F_i(d\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1})$$

— локальний несинґулярний мартинґал на $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, який задовольняє умови

$$0 \le x_t \le M, \; 0 < M < \infty,$$

$$g_i(\{\omega\}_i) \ge 0, \; \{\omega\}_i \in \Omega^i, \; i = \overline{0, N-1},$$

$$\int\limits_{[i,i+1)} \left|\rho_i^0\left(s \mid \{\omega\}_{i-1}\right)\right| \frac{F_i(ds \mid \{\omega\}_{i-1})}{1 - F_i(s_- \mid \{\omega\}_{i-1})} < \infty ,$$

де

$$\rho_i^0\left(s \mid \{\omega\}_{i-1}\right) = g_i(\{\omega\}_{i-1}, s) - \frac{1}{1 - F_i(s \mid \{\omega\}_{i-1})} \int\limits_{(s,i+1)} g_i(\{\omega\}_i) F_i(d\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1}) .$$

Для випадкового процесу

$$V_t = \sum_{i=1}^{N-1} \chi_{[i,i+1)}(t) f(x_t^i(\{\omega\}_i)) , \tag{6}$$

що описує еволюцію вартості фірми, де функція $f(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq M$ є строго монотонною і така, що

$$\sup_{0 \leq x \leq M} \left|f'(x)\right| = f_1 < \infty , \quad \inf_{0 \leq x \leq M} \left|f'(x)\right| = f_2 > 0 ,$$

$$\sup_i \sup_{\{\omega\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}} \sup_{s \in [i,i+1)} \frac{\Delta F_i(s \mid \{\omega\}_{i-1})}{1 - F_i(s_- \mid \{\omega\}_{i-1})} < \frac{f_2}{f_1} ,$$

$$\int\limits_{[i,i+1)} f(g_i(\{\omega\}_{i-1}, t)) \exp\{-\gamma^i(\{\omega\}_{i-1}, t_-)\} \gamma^i(\{\omega\}_{i-1}, dt) < \infty ,$$

$$\{\omega\}_{i-1} \in \Omega^{i-1} , \; i = \overline{0, N-1} ,$$

$$\gamma^i(\{\omega\}_{i-1}, t) = \int\limits_{[i,t]} \frac{f'(T_i(\tau \mid \{\omega\}_{i-1})) F_i(d\tau \mid \{\omega\}_{i-1})}{U_i(\{\omega\}_{i-1}, \tau)[1 - F_i(\tau_- \mid \{\omega\}_{i-1})]} ,$$

$$U_i(\{\omega\}_{i-1}, \tau) = \int_0^1 f'\left(g_i(\{\omega\}_{i-1}, \tau) + z[T_i(\tau \mid \{\omega\}_{i-1}) - g_i(\{\omega\}_{i-1}, \tau)]\right) dz ,$$

$$T_i(t \mid \{\omega\}_{i-1}) = \frac{1}{1 - F_i(t \mid \{\omega\}_{i-1})} \int\limits_{(t,i+1)} g_i(\{\omega\}_i) F_i(d\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1}) ,$$

існує мартинґальна міра P_1 на $\left\{\Omega, \mathcal{F}^0\right\}$, породжена сім'єю функцій розподілу $F_i^1(\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1})$, $i = \overline{0, N-1}$, і модифікація $\overline{V_t}$ процесу V_t така, що $\overline{V_t}$ — локальний несинґулярний мартинґал на ймовірнісному просторі $\left\{\Omega, \mathcal{F}_1, P_1\right\}$ відносно потоку σ-алгебр $\mathcal{F}_t^1$, де σ-алгебри $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_t^1$ — поповнення σ-алгебр відповідно $\mathcal{F}_0$ і $\mathcal{F}_t^0$ відносно міри P_1.

Далі, нехай $N\left(\{\omega\}_{N-1}\right)$ — невід'ємна випадкова величина на $\left\{\Omega, \mathcal{F}, P\right\}$, яка задовольняє такі умови:

1) $N_i(\{\omega\}_i) < \infty$, $\{\omega\}_i \in \Omega^i$, $i = \overline{0, N-1}$;

2) справедливі нерівності

$$\int\limits_{[i,i+1)} \left|\zeta_i(s \mid \{\omega\}_{i-1})\right| \frac{F_i^1(ds \mid \{\omega\}_{i-1})}{1 - F_i^1(s_- \mid \{\omega\}_{i-1})} < \infty ,$$

$$\{\omega\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}, \; i = \overline{0, N-1},$$

$$\zeta_i(s \mid \{\omega\}_{i-1}) = N_i(\{\omega\}_{i-1}, s) - \frac{1}{1 - F_i^1(s \mid \{\omega\}_{i-1})} \int_{(s,i+1)} N_i(\{\omega\}_i) F_i^1(d\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1}),$$

$$N_i(\{\omega\}_i) = \int_{\Omega_{i+1}} \dots \int_{\Omega_{N-1}} \alpha(V_T(\{\omega\}_i, \{\omega\}_{[i+1,N-1]})) F_{i+1}^1(d\omega_{i+1} \mid \{\omega\}_i) \times \dots$$

$$\dots \times F_{N-1}^1(d\omega_{N-1} \mid \{\omega\}_{N-2}).$$

За цих умов для реґулярного мартинґала $E^1\left\{N(\{\omega\}_{N-1}) \mid \mathsf{F}_t^1\right\}$ на ймовірнісному просторі $\left\{\Omega, \mathsf{F}_1, P_1\right\}$ справедливе подання

$$E^1\{N(\{\omega\}_{N-1}) \mid \mathsf{F}_t^1\} = E^1 N(\{\omega\}_{N-1}) + \int_{[0,t]} \xi(s \mid \omega)\, d\overline{V_s}, \; t \in [0, N), \qquad (7)$$

де

$$\xi(s \mid \omega) = \sum_{i=1}^{N-1} \chi_{[i,i+1)}(s) \frac{\zeta_i(s \mid \{\omega\}_{i-1})}{\zeta_i^0(s \mid \{\omega\}_{i-1})},$$

$$\zeta_i^0(s \mid \{\omega\}_{i-1}) = f(g_i(\{\omega\}_{i-1}, s)) -$$

$$- \frac{1}{1 - F_i^1(s \mid \{\omega\}_{i-1})} \int_{(s,i+1)} f(g_i(\{\omega\}_i)) F_i^1(d\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1}).$$

Доведення. Теорема є модифікацією теореми 12.6.1 [3,с.728] на випадок, коли несинґулярний мартинґал x_t є рівномірно обмеженим з ймовірністю 1 за реалізації з ймовірністю 1 сценарію, що визначається розбиттям $[i, i+1)$, $i = \overline{0, N-1}$, і побудованим вище відносно такого розбиття повним ймовірнісним простором $\{\Omega, \mathsf{F}, P\}$. Тоді за виконання умов теореми існує мартинґальна міра P_1 на $\{\Omega, \mathsf{F}^0\}$, породжена сім'єю функцій розподілу $F_i^1(\omega_i \mid \{\omega\}_{i-1})$, $i = \overline{0, N-1}$, і модифікація $\overline{V_t}$ процесу V_t така, що є локальним несинґулярним мартинґалом на ймовірнісному просторі $\left\{\Omega, \mathsf{F}_1, P_1\right\}$ відносно потоку σ-алгебр F_t^1, де σ-алгебри F_1 і F_t^1 — поповнення σ-алгебр відповідно F_0 і F_t^0 відносно міри P_1. Якщо невід'ємна випадкова величина $N(\{\omega\}_{N-1})$ на $\left\{\Omega, \mathsf{F}, P\right\}$ задовольняє умови теореми, то для реґулярного мартинґала $E^1\{N(\{\omega\}_{N-1}) \mid \mathsf{F}_t^1\}$ на $\{\Omega, \mathsf{F}_1, P_1\}$ справедливий розклад (7). Відмінність теореми від 12.6.1 [3,с.728] лише в тому, що ми розглядаємо вужчий клас рівномірно обмежених процесів x_t, для яких аналогічні умови теореми 12.6.1 виконуються. Таким чином, доведення теореми є аналогічним доведенню теореми 12.6.1 [3, с.728].

Для випадкового процесу V_t, який описує еволюцію вартості фірми, функція $f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{e^{rt} A_n}{(1+x)^n}$ задовольняє умови теореми.

Таким чином, на $\{\Omega, \mathsf{F}^0\}$ можна побудувати ризик-нейтральну міру P_1 і модифікацію $\overline{V_t}$, що є локальним несинґулярним мартинґалом на $\{\Omega, \mathsf{F}_1, P_1\}$.

Функція ризику $\alpha(x)$, яка задається формулою (5), задовольняє умови теореми 12.6.2 [3, с.752], еволюція вартості фірми описується формулою (6), еволюція ціни неризикового активу — формулою (4), а тому оцінкою дефолту у відповідності до підходу Мертона є величина

$$X_0^* = e^{-rT} E^1 \alpha(V_T) .$$

Динамічний портфель для повернення боргу в обсязі U_0 задається формулою

$$X_t^* = e^{r(t-T)} E^1 \left\{ \alpha(V_T) | \mathsf{F}_t^1 \right\}.$$

ВИСНОВКИ

У роботі закладено основи нового методу оцінки ризиків дефолту та реальних опціонів. На перший план виноситься роль інвестора як джерела фінансування. Інвестор за наявності певної інформації про стабільність фірми та можливість уведення в дію додаткових потужностей у майбутньому оцінює можливість дефолту фірми. Побудовано ймовірнісний простір та описано широкий клас процесів для еволюції внутрішньої доходності фірми таких, що інформація інвестора про внутрішню доходність є повною. Знайдено оцінку дефолту фірми, що фінансується ззовні до деякого часу T шляхом випуску в нульовий момент часу облігації з нульовим купоном. Оцінку зроблено з використанням підходу Мертона за припущення, що дефолт може відбутися лише у термінальний момент часу T. Також побудовано геджувальний динамічний портфель у ризик-нейтральному середовищі.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Merton R.* Theory of rational option pricing // Bell Journal of Economics and management Science. — 1973. — **4**. — P. 141–183.
2. *Bielecki T., Rutkowski M.* Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002. — 500 p.
3. *Гончар М.С.* Фондовий ринок і економічний ріст. — Київ: Обереги, 2001. — 826 с.
4. *Халмош П.* Теория меры. — М.: Изд. иностр. лит., 1953. — 350 с.
5. *Guo X.* Information and option pricings // Quantative finance. — Springer, 2001. — **1**. — P. 12–15.
6. *Cox J., Ross R.A., Rubinstein M.* Option pricing: a simplified approach // Journal of Financial Economics. — 1976 — **7**. — P. 229–263.
7. *Harrison J.M., Pliska S.R.* Martingales, stochastic integrals and continuous trading // Stoch. Processes and Appl. — 1981. — **11**, № 3. — P. 215–260.

Надійшла 10.10.2007