

УДК 531.8

**ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЗАЛЕЖНОЮ ВІД  
ТЕМПЕРАТУРИ МОДЕЛЮ ПРОЦЕСУ ФЕРМЕНТАЦІЇ**

**Я.Є. МАЦЬОНГ, Я.Г. САВУЛА, М.В. ЩЕРБАТИЙ**

Розглянуто математичну модель процесу бродіння виноградного сусла з урахуванням залежності параметрів від температури. Встановлено аналітичну форму залежності параметрів моделі від температури (експоненціальну та лінійну). Розглянуто задачі ідентифікації параметрів та оптимального керування. Наведено числові результати розв'язування задач оптимального керування (задача на швидкодію) та ідентифікації параметрів при бродінні сусла сорту Ркацителі.

**ВСТУП**

Математична модель процесу бродіння виноградного сусла, яка дає можливість прогнозувати цей процес при різних умовах (температурі, тиску вуглекислого газу, кислотності і т.ін.), є невід'ємною складовою частиною системи контролю за процесом. Незважаючи на те, що існують вже розроблені та визнані моделі процесу, питання моделювання спиртового бродіння у винному суслі залишається актуальним і на сьогоднішній день [1, 2]. Вважається, що основний параметр, який повинен регулюватися в процесі бродіння — це температура [3]. Мета даної роботи:

- встановлення аналітичної форми залежності параметрів математичної моделі процесу бродіння від температури, що дозволяє спрогнозувати поведінку системи в інших температурних режимах та оптимізувати процес;
- постановка та розв'язування задач ідентифікації параметрів, а також оптимального керування (максимізації продуктивності процесу).

**ОПИС МОДЕЛІ**

Вважатимемо, що процес бродіння відбувається в анаеробних умовах реактора періодичної дії (на протязі всього процесу не здійснюється доливання/відливання речовин, які беруть участь у процесі бродіння, за винятком відведення вуглекислого газу) з ідеальним перемішуванням (бродильне середовище однорідне).

У математичній моделі процесу бродіння виноградного сусла враховувався вплив температури на кінетику процесу. У загальному вигляді розроб-

лювана математична модель є задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь відносно концентрацій дріжджів  $X$ , субстрату  $S$  та продуктів метаболізму  $P_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n$  — кількість продуктів метаболізму, які враховуються в моделі ( $P_1$  — спирт,  $P_2$  — гліцерин,  $P_3$  — лактат) [4].

$$X'(t) = \mu(P_1, S, u)X, \quad (1)$$

$$P_i'(t) = \alpha_i X'(t) + \beta_i X(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$S'(t) = -(1/Y_{X/S})X'(t) - \sum_{i=1}^n (1/Y_{P_i/S})P_i'(t) - \xi X, \quad (3)$$

$$X(0) = X_0, \quad P_i(0) = P_{i0}, \quad S(0) = S_0, \quad t = [0, t_e], \quad (4)$$

де  $\mu$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\xi$ ,  $Y_{X/S}$ ,  $Y_{P_i/S}$ ,  $i = \overline{1, n}$  — параметри моделі у вигляді функцій від температури;  $u = u(t) \in U$ ,  $U \in R^m$ ,  $U$  — деяка обмежена замкнена область допустимих значень керувань;  $p = (p_1, p_2, \dots, p_L) \in U_p$  —  $L$ -вимірний параметр,  $U_p \in R^L$ .

Рівняння (1) описує швидкість росту дріжджів, яка характеризується питомою швидкістю росту мікроорганізмів, тобто залежністю, що враховує ефекти насичення субстратом (глюкозою, фруктозою) та неконкурентного інгібування росту дріжджів продуктом (етанолом)

$$\mu = \frac{\mu_m S}{(S + K_S)(1 + P_1 / K_R)}, \quad (5)$$

де  $K_S$  і  $K_R$  — відповідно константи насичення та інгібування (залежні від температури). Константа насичення  $K_S$  чисельно дорівнює концентрації цукру в середовищі, при якій питома швидкість росту клітин дорівнює половині максимальної питомої швидкості. Константа  $K_R$  чисельно дорівнює концентрації етанолу, при якій швидкість росту сповільнюється вдвічі.

Співвідношення (5) є відомою формулою Моно-Ієрусалимського [5]. Доведено, що інгібування росту дріжджових клітин етанолом не змінює константу насичення по субстраті  $K_S$ , тобто спирт у випадку виноградного бродіння є типовим неконкурентним інгібітором [6].

Рівняння (2) описує швидкість утворення етанолу та інших продуктів метаболізму дріжджів, що залежить від швидкості росту клітин (перший доданок) і від синтезу продуктів метаболізму клітинами, які знаходяться у стаціонарній фазі свого розвитку (другий доданок).

Рівняння (3) описує швидкість споживання дріжджами цукру у процесі росту біомаси (1-й доданок), утворення етанолу та інших продуктів метаболізму, які враховуються у моделі (2-й доданок) і підтримки життєдіяльності клітин (3-й доданок). У цьому рівнянні  $Y_{X/S}$  і  $Y_{P_i/S}$  — економічні коефіцієнти, що показують, яка частина спожитого клітинами цукру переходить відповідно у біомасу та продукти метаболізму дріжджів.

## ВИБІР ТЕМПЕРАТУРНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ

Питанню впливу температури на ріст дріжджів присвячені багаточисельні експериментальні дослідження [8, 9]. У результаті експериментів [8] на температурному проміжку  $8 - 30^\circ\text{C}$  встановлено лінійну залежність від температури питомої швидкості росту дріжджів  $\mu_m = 0,011T - 0,085$ , де  $T (^\circ\text{C})$  — температура, але отримане рівняння справедливе лише для конкретних умов досліду. Більшість моделей росту мікроорганізму базується на експоненціальній залежності на основі рівняння Арреніуса [1,2,7].

У даній роботі запропоновано вважати залежними від температури всі параметри моделі. Розглянемо два види залежностей параметрів від температури — експоненціальну та лінійну. У випадку експоненціальної залежності параметри моделі вибираємо у вигляді [2]

$$\begin{aligned}
 K_S &= K_{0S} \exp\left(-\frac{E_{aS}}{RT} \frac{T - T_{0S}}{T_{0S}}\right), \quad K_{P_i} = K_{0P_i} \exp\left(-\frac{E_{aP_i}}{RT} \frac{T - T_{0P_i}}{T_{0P_i}}\right), \\
 \mu_m &= A_\mu \exp\left(\frac{E_{a\mu}}{RT} \frac{T - T_{0\mu}}{T_{0\mu}}\right) - B_\mu \exp\left(\frac{E_{b\mu}}{RT} \frac{T - T_{0\mu}}{T_{0\mu}}\right), \quad (6) \\
 \alpha_i &= A_{\alpha_i} \exp\left(\frac{E_{a\alpha_i}}{RT} \frac{T - T_{0\alpha_i}}{T_{0\alpha_i}}\right) - B_{\alpha_i} \exp\left(\frac{E_{b\alpha_i}}{RT} \frac{T - T_{0\beta_i}}{T_{0\beta_i}}\right), \quad i = \overline{1, n}, \\
 \xi &= \xi_0 \exp\left(-\frac{E_{a\xi}}{RT} \frac{T - T_{0\xi}}{T_{0\xi}}\right); \quad \frac{1}{Y_{X/S}} = \frac{1}{Y_{X/S}^{(0)}} + A_{XS} \exp\left(-\frac{E_{aXS}}{RT} \frac{T - T_{0XS}}{T_{0XS}}\right), \\
 \frac{1}{Y_{P_i/S}} &= \frac{1}{Y_{P_i/S}^{(0)}} + A_{YP_i} \exp\left(-\frac{E_{aYP_i}}{RT} \frac{T - T_{0YP_i}}{T_{0YP_i}}\right), \quad i = \overline{1, n},
 \end{aligned}$$

де  $T, K$  — температура бродіння.

У випадку лінійної залежності параметрів від температури використовуємо такі співвідношення:

$$p_k = -A_{Pk} + B_{Pk}(T - T_{0Pk}), \quad k = \overline{1, n+4},$$

де  $p = (\mu_m, K_S, K_{P_1}, \xi, a_1, \dots, a_n)^T$ ,

$$p_k = 1/C_{Pk} - A_{Pk} + B_{Pk}(T - T_{0Pk}), \quad k = \overline{(n+4)+1, (n+4+1)+(n+1)}, \quad (7)$$

де  $p = (Y_{X/S}, Y_{P_1/S}, \dots, Y_{P_n/S})^T$ .

## ЗАДАЧА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ

**Постановка задачі.** Побудована модель (1)–(5), (6) або (1)–(5), (7) містить ряд параметрів, незалежних від температури. Для визначення характерних особливостей досліджуваного процесу бродіння необхідно ідентифікувати

параметри моделі, яка описує реальний процес. Тобто потрібно підібрати параметри таким чином, щоб вони якнайкраще узгоджувалися з даними спостережень за певним критерієм.

Як критерій оцінки знайдених параметрів використовуємо функціонал виду

$$\Phi(p) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^K c_i (y_{ijk} - y_{ijk}^{(e)})^2, \quad (8)$$

де  $c_i$  — вагові множники;  $y_{ijk}^{(e)}$  — експериментальне значення концентрації  $i$ -ї речовини ( $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $r = n + 2$ ) в момент часу  $t_j$  ( $j = 1, \dots, M$ ) для  $k$ -го значення температури бродіння ( $k = 1, \dots, K$ );  $y_{ijk}$  — відповідне значення концентрації, отримане за допомогою математичної моделі.

На межі змінних параметрів  $p$  накладаються двосторонні обмеження

$$p \in \tilde{P}, \quad \tilde{P} = \{p \in R^L, p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, i = 1, \dots, L\}.$$

Таким чином, задача ідентифікації параметрів моделі (1)–(5), (6) або (1)–(5), (7) полягає в знаходженні  $p_* \in \tilde{P}$  із умови мінімуму функціоналу (8) [10].

$$\Phi(p_*) = \min_{p \in \tilde{P}} \Phi(p).$$

Задачу ідентифікації параметрів розв'язуємо шляхом зведення до задачі нелінійного математичного програмування, яку розв'язуємо методом зовнішніх штрафних функцій у поєднанні з методом спряжених градієнтів [10].

**Результати числових досліджень у випадку врахування утворення спирту та гліцерину.** Вірно вибрана і достатньо точна математична модель є надійним інструментом для оптимізації технологічного процесу. Проте, будь-яка модель «має право на життя» лише за умови перевірки її на адекватність шляхом узгодження з результатами експерименту.

На основі експериментальних даних, отриманих в умовах мікровиноробства в інституті винограду і вина «Магарач», розв'язано задачу ідентифікації параметрів для суслу з винограду сорту Ркацителі (бродіння на дріжджах 1–527).

При ідентифікації параметрів були використані дані концентрацій дріжджів, субстрату, спирту та гліцерину за 16 моментів часу на проміжку 0...216 годин при температурі бродіння 17 та 26°C і наповненості ємкості субстратом приблизно на 2/3. Наявність двох наборів спостережень на температурному діапазоні 9...10°C дозволяє знайти параметри моделі, які будуть адекватно описувати процес, принаймні, в межах даного температурного проміжку.

Дані спостережень отримані при таких концентраціях дріжджів, продуктів метаболізму та субстрату в початковий момент часу:  $X_0 = 2,1 \cdot 10^6$  клітин/мл;  $P_{10} = 0$ ;  $P_{20} = 0,388$  мг/мл;  $S_0 = 202$  мг/мл при  $T_C = 17^\circ\text{C}$  та  $X_0 = 1,95 \cdot 10^6$  клітин/мл;  $P_{10} = 0$ ;  $P_{20} = 0,388$  мг/мл;  $S_0 = 202$  мг/мл при  $T_C = 26^\circ\text{C}$ .

У моделі (1)–(5), (6) незалежні від температури параметри приймали значення:  $\beta_i = 0$ ;  $T_{0\mu} = T_\beta = T_{0\alpha_i} = T_{0\beta_i} = T_{0\xi} = 300 \text{ K}$ ;  $T_{0S} = T_{0P_1} = T_{0XS} = T_{0YP_1} = 293,3 \text{ K}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n = 2$ ;  $R = 2,0 \cdot 10^{-3}$ ;  $T_K = T_C + 273,15$ ;  $c_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Параметри моделі, які підлягають ідентифікації, утворюють вектор  $p = (A_\mu, E_{a\mu}, B_\mu, E_{b\mu}, K_{0S}, E_{aS}, K_{0P_1}, E_{aP_1}, A_{\alpha_1}, E_{a\alpha_1}, B_{\alpha_1}, E_{b\alpha_1}, Y_{X/S}^{(0)}, A_{X/S}, E_{aXS}, Y_{P_1/S}^{(0)}, A_{P_1/S}, E_{aP_1S}, A_{\alpha_2}, E_{0\alpha_2}, B_{\alpha_2}, E_{b\alpha_2}, Y_{P_2/S}^{(0)}, A_{P_2/S}, E_{aP_2S}, \varsigma_0, E_{a\xi})^T$ . Як початкові наближення параметрів моделі використано літературні дані  $p_0 = 0,246; 14,2; 0,000574; 121; 127; -11; 27; -11; 4,2; 4,5; 3,1; 4; 90; 0,0001; 5,9; 0,51; 0,004; 5; 1,21; 4,42; 1; 5,5; 0,4; 4,5; 2; 0,0005; 10)^T$  [1, 8, 11].

У результаті розв'язування задачі ідентифікації отримано такі значення параметрів моделі:  $p_* = (0,2570; 15,91; 0,000204; 123,98; 222,07; -19,7; 25,44; -15,34; 4,37; 4,82; 3,23; 4; 98,33; 0,000634; 5,02; 0,7; 0,005; 5; 1,318; 4,47; 1,18; 5,49; 0,406; 4,45; 2; 0,000605; 10)^T$ .

На рис. 1, *a-g* наведено графіки зміни з часом розподілу концентрацій дріжджів, субстрату та продуктів метаболізму (етанолу та гліцерину) для процесу бродіння виноградного суслу з винограду сорту Ркацителі (бродіння на культурі дріжджів 1 – 527) при експоненціальній (задача I) та лінійній (задача II) залежності параметрів, а також відповідні експериментальні значення при температурі 17 та 26°C. На цьому температурному проміжку при використанні як лінійної, так і експоненціальної залежностей отримуємо добре узгодження теоретичних залежностей з експериментальними даними.

У моделі (1)–(5), (7) незалежні від температури параметри приймали такі значення:  $\beta_i = 0$ ;  $T_{0Pk} = 273,5 \text{ K}$ ,  $k = 1, (n + 4 + 1) + (n + 1)$ ;  $n = 2$ ,  $T_K = T_C + 273,15$ ,  $c_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Параметри моделі, які підлягають ідентифікації, утворюють вектор  $p = (A_{\mu_m}, B_{\mu_m}, A_{K_s}, B_{K_s}, A_{K_{P_1}}, B_{K_{P_1}}, A_{\alpha_1}, B_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, B_{\alpha_2}, A_\xi, B_\xi, C_{\gamma_{X/S}}, A_{\gamma_{X/S}}, B_{\gamma_{X/S}}, C_{\gamma_{P_1/S}}, A_{\gamma_{P_1/S}}, B_{\gamma_{P_1/S}}, C_{\gamma_{P_2/S}}, A_{\gamma_{P_2/S}}, B_{\gamma_{P_2/S}})^T$ . Отримано значення параметрів моделі:  $p_* = (-0,0672; 0,0097; -207,4068; 20,5648; -32,1682; 3,1124; -0,0147; 0,612; -0,00097; 0,0052; 0,0; 0,0; 1,0427; -0,6889; 0,03108; 0,5793; -0,6809; 0,00162; 0,3618; -0,5045; 0,0275)^T$ .

На рис. 2 показано графік залежності максимальної швидкості росту мікроорганізмів від температури при лінійній та експоненціальній залежностях.

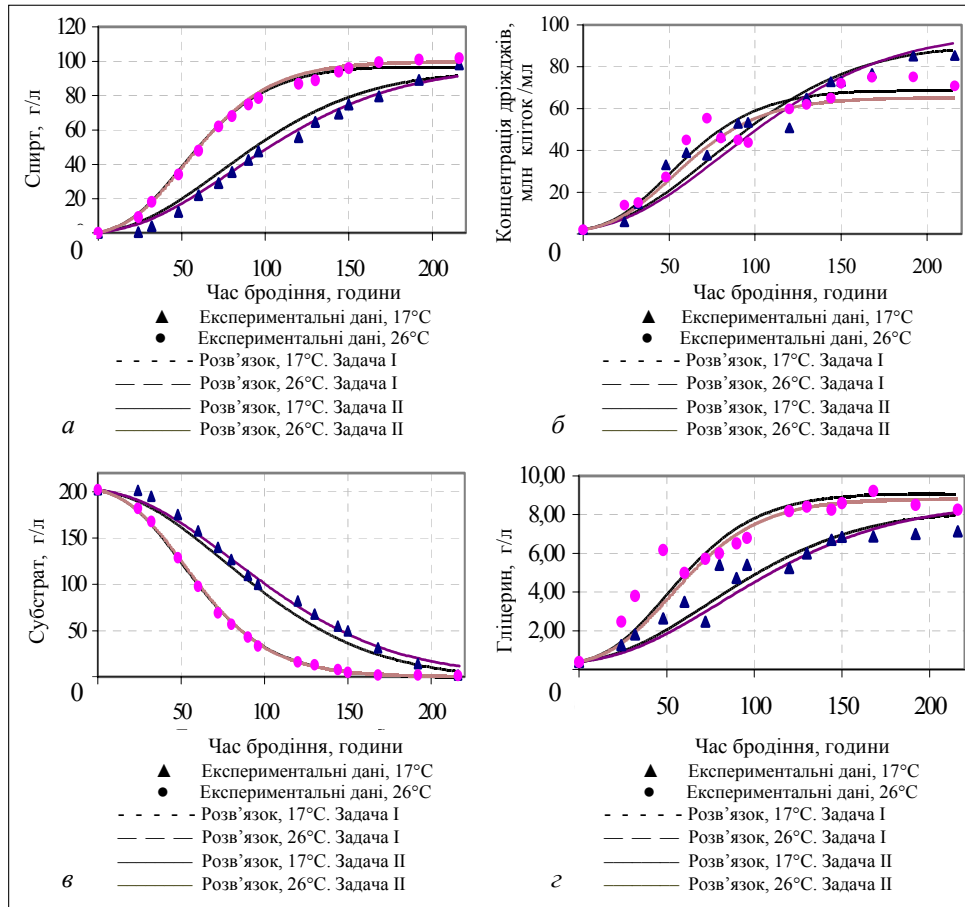


Рис. 1. Динаміка зміни концентрацій спирту (а), дріжджів (б), субстрату (в), гліцерину (г)

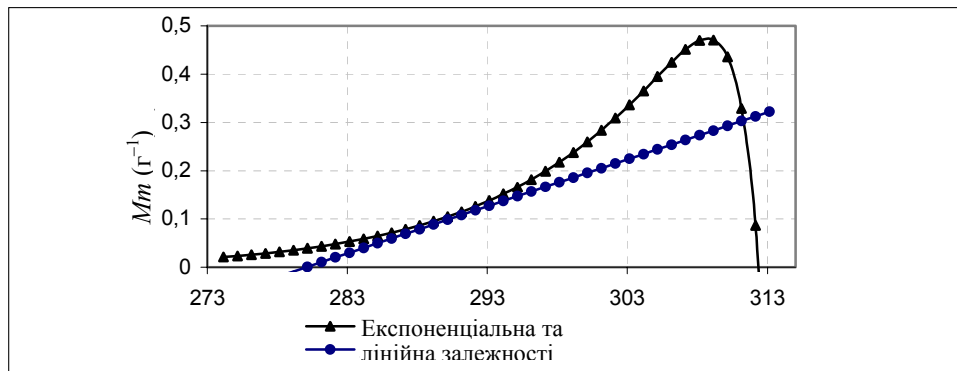


Рис. 2. Зміна  $\mu_m$  від температури

Температурні залежності  $\mu_m$  добре узгоджуються з відомими фактами про те, що при температурах бродильного сусла вище 30°C (303 K) починається масове відмирання клітин, а при 37...40°C (310...313 K) бродіння зупиняється. На температурному проміжку 8...26°C значення параметра  $\mu_m$  для експоненціальної та лінійної залежностей є досить

близькими. Тому на даному діапазоні можна використовувати як експоненціальну, так і лінійну залежність  $\mu_m$  від температури.

### ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Задача (1)–(5), (6) та (1)–(5), (7) є математичною моделлю процесу бродіння, яка за заданих керувань  $u \in U$  та параметрів  $p \in U_p$ , знайдених у результаті розв’язування задачі ідентифікації, дає змогу однозначно визначити поведінку (стан) системи.

У ролі керування вибираємо температуру процесу ферментації  $u(t) = [T(t)]$ . Функцію  $u(t)$  апроксимуємо кусково-лінійною або кусково-постійною функцією, побудованою по вузлових значеннях  $b = (b_1, \dots, b_m)^T = (T(t_1), \dots, T(t_m))$ , розміщених на проміжку  $[0, t_e]$ . На компоненти вектора  $b$  накладаємо двосторонні обмеження

$$b_j^- \leq b_j \leq b_j^+, \quad j = 1, \dots, m.$$

Розглянемо функціонали

$$\tilde{\varphi}_1(u, y) = Q = [P_1(t_e) - P_1(0)] / \tau, \quad (9)$$

де  $\tau$  — час процесу бродіння;  $Q$  — продуктивність процесу.

$$\tilde{\varphi}_2(u, y) = P_1(t_e) - P_e, \quad (10)$$

де  $P_e$  — задане значення.

Задача отримання максимальної продуктивності полягає у знаходженні вектора  $b^* \in U$ , який надає максимуму функціоналу (9).

$$\varphi_0(b^*) = \max_{b \in U} (\varphi_1(b)), \quad (11)$$

$$U = \{b : b_j^- \leq b_j \leq b_j^+, \quad j = 1, \dots, m\}.$$

Задачу оптимального керування розв’язуємо шляхом зведення до задачі нелінійного математичного програмування [10].

Якщо в (9) концентрації  $P_1(t_e)$  та  $P_1(0)$  задані, то задача отримання максимального  $Q$  зводиться до задачі на швидкодію — задачі мінімізації інтервалу керування  $[0, t_e]$ , тобто мінімізації  $t_e$ , яку розв’язуємо шляхом зведення до задачі з фіксованим інтервалом керування.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь у загальному вигляді.

$$y'(t) = f(t, y, u, p), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, t_e].$$

Якщо довжина інтервалу керування  $[t_0, t_e]$  не фіксована і  $t_e$  є ресурсом керування поряд з функцією керування  $u(t)$ , то зручно зробити заміну змінних  $\tau = t/t_e$  (особливо з точки зору організації обчислень). Отримуємо за-

дачу на фіксованому інтервалі часу  $t_0/t_e \leq \tau \leq 1$  з параметром керування  $t_e$  для системи

$$y'(\tau) = t_e f(\tau, y, u, p), \quad y(t_0/t_e) = y_0, \quad \tau \in [t_0/t_e, 1].$$

Задача (11) зводиться до задачі мінімізації параметру керування  $t_e$ : знайти такий вектор  $b^* \in U$ , який надає мінімуму функціоналу

$$\varphi_0(b^*) = \min_{b \in U} (t_e), \quad (12)$$

$$U = \{b : b_j^- \leq b_j \leq b_j^+, \quad j = 1, \dots, m\}$$

при умові

$$\varphi_2(b) = P_1(t_e) - P_e = 0. \quad (13)$$

Зауважимо, що параметр керування  $t_e$  виступає ресурсом керування поряд із температурою.

**Числові результати.** У моделі (1)–(5), (6) робимо заміну змінних  $\tau = t/216$ , покладаємо  $b_j^- = (288, 15; \dots; 288, 15)^T$ ;  $b_j^+ = (310, 15; \dots; 310, 15)^T$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;  $P_e = 93,7$  та розв'язуємо задачу (12), (13). Знайдено розв'язок  $t_e = 96,5$ . Обмеження (13) задовольняється з точністю  $\varphi_2(b) = P_1(t_e) - P_e = 0,001$ .

На рис. 3 зображено криву зміни температури  $T(t)$  в залежності від часу для оптимального процесу. На рис. 4. наведено графіки зміни концентрацій спирту з часом для початкового (при сталій температурі  $17^\circ\text{C}$ ) та оптимального процесів.

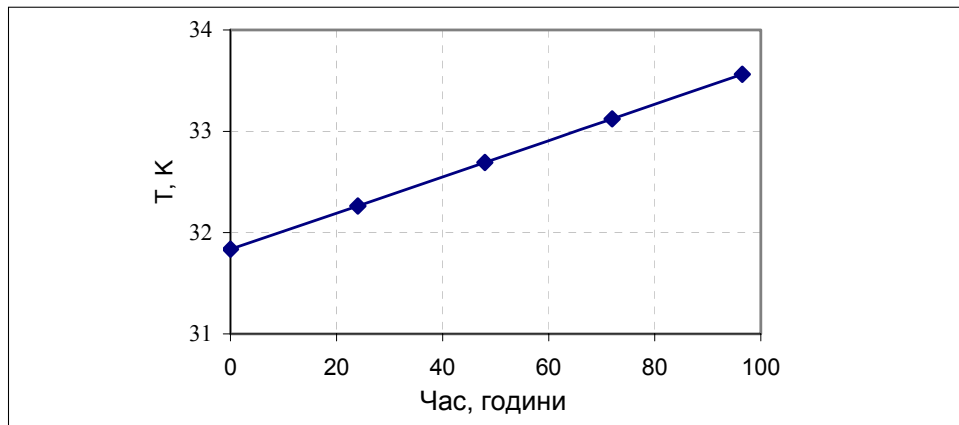


Рис. 3. Крива зміни температури  $T(t)$  з часом для оптимального процесу

Для порівняння на рис. 5 показані криві  $Q$  для початкового та оптимального процесів, на рис. 6 — порівняння продуктивності  $Q$  в залежності від часу для цих же процесів.

Отримані результати показують ефективність застосування керування за температурою. Є сенс глибше вивчати залежності констант моделей періодичних процесів від температури, оскільки існує можливість значного підвищення продуктивності мікробіологічних процесів.



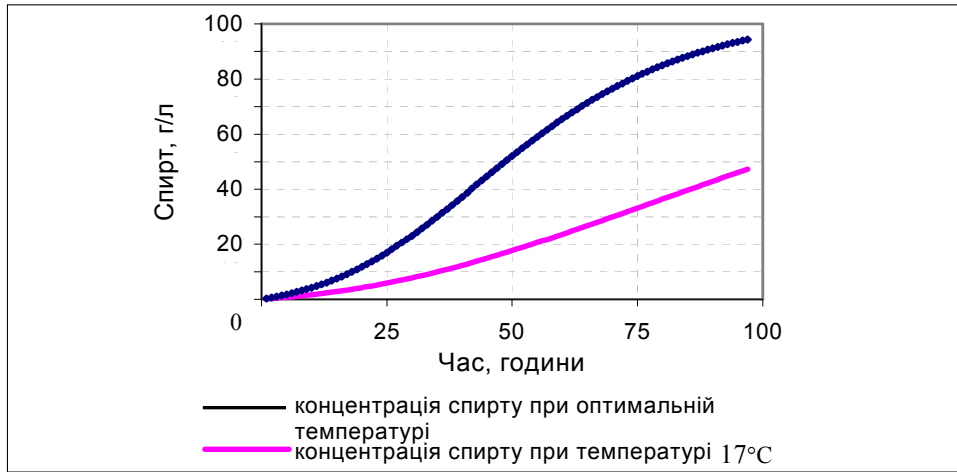


Рис. 4. Графіки зміни концентрацій спирту з часом початкового та оптимального процесів

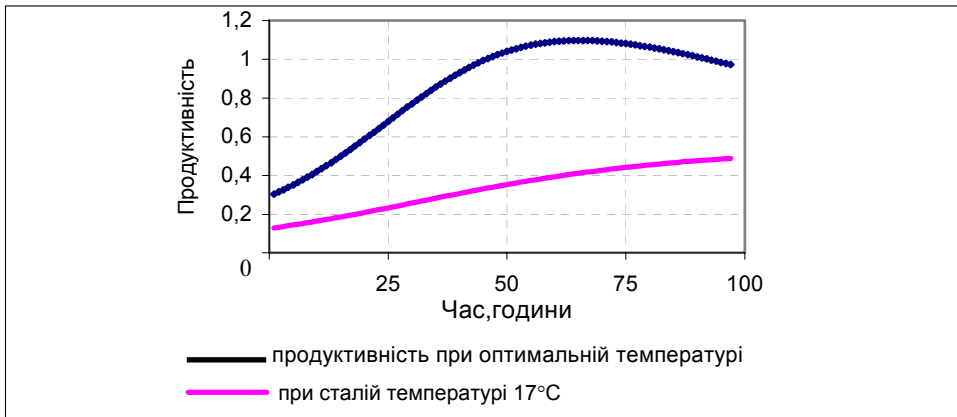


Рис. 5. Криві порівняння Q з часом для початкового та оптимального процесів

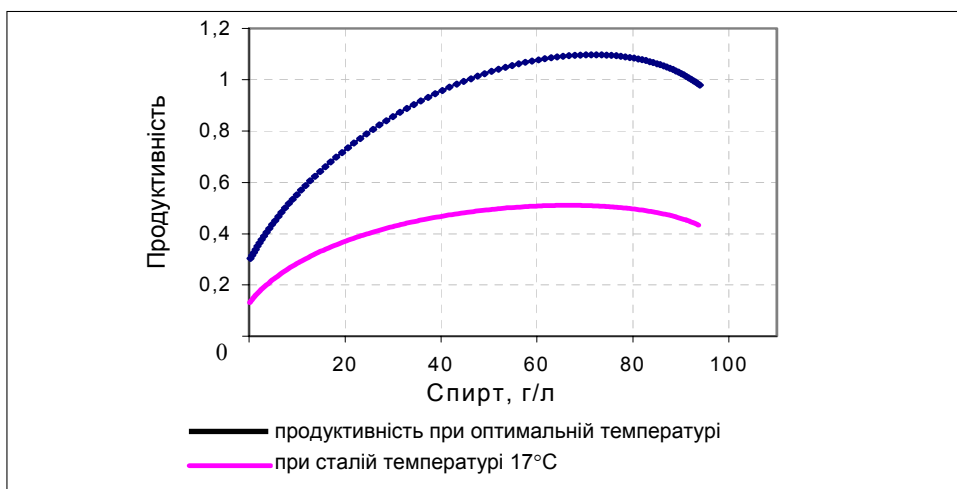


Рис. 6. Криві порівняння продуктивності для початкового та оптимального процесів

## ВИСНОВКИ

У результаті розв'язування задачі ідентифікації параметрів на основі даних спостережень отримано значення параметрів моделі для експоненціальної та лінійної залежностей параметрів від температури. Здійснено постановку задачі оптимального керування. З використанням отриманих параметрів моделі розв'язано задачу оптимального керування — задачу максимізації продуктивності процесу (задачу на швидкодію). Показано, що для конкретної моделі, застосовуючи керування по температурі, можна отримати значне збільшення продуктивності. У випадках, коли технологічно важко організувати керування температурою, варто вибирати оптимальне значення температури, орієнтуючись на кінцеве значення концентрації продукту.

Розглянуту модель можна застосовувати не лише для моделювання процесу бродіння винного сусла, а й для будь-якого мікробіологічного процесу, де відбувається переробка субстрату та утворюються продукти метаболізму.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Caro I., Perez L., Cantero D.* Development of a Kinetic Model for the Alcoholic Fermentation of Must // *Biotechnol. Bioeng.* — 1991. — **38**. — P. 742–748.
2. *Marin M.R.* Alcoholic Fermentation Modelling: Current State and Perspectives // *Am. J. Enol. Vitic.* — 1999. — **50**, № 2. — P. 166–178.
3. *Валуйко Г.Г.* Технология виноградных вин. — Симферополь: Таврида, 2002. — 624 с.
4. *Савула Я.Г., Щербатий М.В.* Математичне моделювання процесів бродіння виноградного сусла // *Вестн. Херсонського гос. техн. ун-та.* — 2003. — Вып. 3 (19). — С. 377–380.
5. *Иерусалимский Н.Д., Неронова Н.М.* Количественные закономерности между продуктами обмена и скоростью роста микроорганизмов // *Докл. АН СССР. Сер. Биол.* — 1965. — **161**, № 6. — С. 1437–1440.
6. *Guthke K., Knorre W.A.* Bistability in a model microbial product formation // *Zeit. Allg. Mikrobiol.* — 1980. — **20**, № 7. — P. 441–447.
7. *Бейли Дж., Оллис Д.* Основы биохимической инженерии. В 2-х ч. Ч. 1. — М.: Мир, 1989. — 590 с.
8. *Разуваев В.С.* Исследование кинетики и оптимизации процесса спиртового брожения виноградного сусла. Автореф. дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук. — Краснодар, 1977. — 20 с.
9. *Позмоганова И.Н., Пожарницкая Л.М., Холер В.А.* Тепловыделение в процессе окисления парафина дрожжами *Candida tropicalis* при разных температурах // *Прикладная биохимия и микробиология.* — 1967. — **3**, № 4. — С. 496–498.
10. *Щербатий М.В., Мацьонг Я.Є.* Оптимальне керування та ідентифікація параметрів в системах звичайних диференціальних рівнянь // *Вісн. Львівського ун-ту. Серія прикл. мат. та інформ.* — 2003. — Вип. 7. — С. 224–233.
11. *Яровенко В.Л., Ровинский Л.А.* Математическое моделирование и оптимизация микробиологических процессов спиртового производства. — М.: Пищевая промышленность, 1978. — 248 с.

Надійшла 26.07.2005