УДК 519.6:658.5

# ГАРАНТИРОВАННЫЙ СИНТЕЗ СКАЛЯРНОГО КРИТЕРИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

**С.А. СМИРНОВ, И.С. ГОНТАРЕНКО**

Построен обобщенный критерий для задачи многокритериальной оптимизации при интервальном оценивании весовых коэффициентов частных критериев. Найдена наиболее неблагоприятная точечная оценка, необходимая для выбора гарантированного решения. Описана геометрическая структура поверхности безразличия в критериальном пространстве.

Основным способом решения задач многокритериальной оптимизации является метод агрегирования [1]. Это справедливо и для паретовского анализа: каждый критерий естественным образом определяет бинарное отношение предпочтения, а затем как результат агрегирования построенных бинарных отношений определяется понятие доминирования по Парето. Среди других важных приложений метода агрегирования предпочтений отметим задачи коллективного выбора [2].

В простейшем (и наиболее распространенном) варианте агрегирования критериев при векторной оптимизации — методе линейной свертки — используются весовые коэффициенты, происхождение которых не вполне формализуемо [3]. Их значения получаются в результате специальных экспертных процедур, либо процедур типа «data mining» с участием ЛПР. С этим связаны как достоинства, так и недостатки метода. Конечно, подобные процедуры содержат элемент произвола, но они результативны и нередко помогают найти вполне удовлетворительные решения многокритериальных задач, недоопределенных с математической точки зрения.

Рассмотрим два обстоятельства, ограничивающих возможности корректного использования метода линейной свертки. А именно, мы не имеем права утверждать априори, что глобальная функция полезности (представляемая агрегированным критерием) задает именно линейную зависимость от исходных критериев. Однако результаты теории полезности [4] позволяют построить из исходного множества критериев «локальные функции полезности» и обосновать линейную зависимость от них глобальной функции полезности. Таким образом, несмотря на определенные ограничения, метод линейной свертки является достаточно универсальным, результативным и, как следствие, широко распространенным.

Второе ограничение правомерности использования этого метода связано с отмеченным выше эвристическим характером процедур оценивания весовых коэффициентов. Назначение этих процедур — как можно более точно численно выразить неформальные, качественные представления экспертов (либо ЛПР). Понятно, что такие процедуры принципиально не могут быть полностью алгоритмизированы и всегда будут иметь человекомашинный характер. Нередко они имеют форму диалога, итеративного процесса между аналитиком и ЛПР [5], структурно напоминающего беседу терапевта с пациентом. Методика организации и проведения такого рода процедур специально разрабатывалась и считается вполне надежной. Проведено множество психологических экспериментов, в которых сравнивались различные методы (не только чисто эвристические, но и с аксиоматическим обоснованием) назначения весов критериев. К сожалению, они показывают различные результаты [6], что непосредственно сказывается на качестве решения и доверии к нему. Использование в известных процедурах точечных оценок, на наш взгляд, и приводит к указанной несогласованности. Кроме того, оно не всегда в полной мере отвечает как субъективным возможностям ЛПР, так и объективным особенностям предметной области.

В данной работе развивается интервальный подход, использование которого позволяет уменьшить жесткость (повысить адаптивность) процедуры оценивания весовых коэффициентов. Интервальные оценки представляются более адекватными сути дела, поскольку резкое уменьшение степени неопределенности при решении подобных задач трудно удовлетворительно мотивировать, а последствия его могут быть весьма значительными. В то же время для эксперта (ЛПР) интервальное оценивание психологически более приемлемо — снижается риск возникновения почти неизбежных ошибок при субъективном точечном оценивании.

Однако при этом вместо одного агрегированного критерия возникает класс критериев, и решение задачи выбора наилучшей альтернативы состоит из двух этапов. На первом — решается задача выбора значений весовых коэффициентов из интервала, указанного экспертом, т.е. выбора одного из множества обобщенных критериев. На втором — происходит собственно принятие решения путем максимизации полученного критерия. Выбор одного из множества критериев предполагает учет дополнительных соображений, позволяющих зафиксировать значения весов. Различия в способах решения этой задачи связаны, как правило, со спецификой требований, предъявляемых к результату. Так использование рассматриваемого в данной работе гарантированного подхода оправдано в случае, когда допускается (или неустранима) неточность оценок, даваемых экспертом, и при этом требуется минимизировать риск ошибки в принятии решения. Заметим, что в случае доверия к интервальному оцениванию и принятия рискованной стратегии «азартного игрока» имеет смысл вместо минимаксного подхода использовать макси-максный, т.е. на каждом из двух этапов решать задачу максимизации критерия.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается критериальное пространство размерности $n$, в котором веса каждого из критериев $f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega)$, где $\omega \in \Omega$ — альтернативы, представлены интервальными оценками $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Требуется построить обобщенный критерий, минимизирующий риск ошибки, связанный с неточностью оценивания экспертом или ЛПР весовых коэффициентов критериев.

**Этап 1.** Выбор весовых коэффициентов обобщенного критерия.

Построим разбиение критериального пространства на $n$! конусов, каждый из которых задается упорядочением вида $f_{j1}(\omega) < f_{j2}(\omega) < \ldots < f_{jn}(\omega)$. Для каждой из внутренних точек произвольного конуса будет, очевидно, выполняться $e_1, e_2 < \ldots < e_n$, где $e_j = f_{j_i}(\omega)$. Рассмотрим для заданного упорядочения решение задачи

$$\sum_{i=1}^{n} e_i x_i \to \min\text{, где } 0 \le e_i \le 1, \tag{1}$$

$$0 \le \underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i \le 1. \tag{2}$$

Требуется отыскать такое решение $x^*$ задачи (1), (2), для которого

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = 1. \tag{3}$$

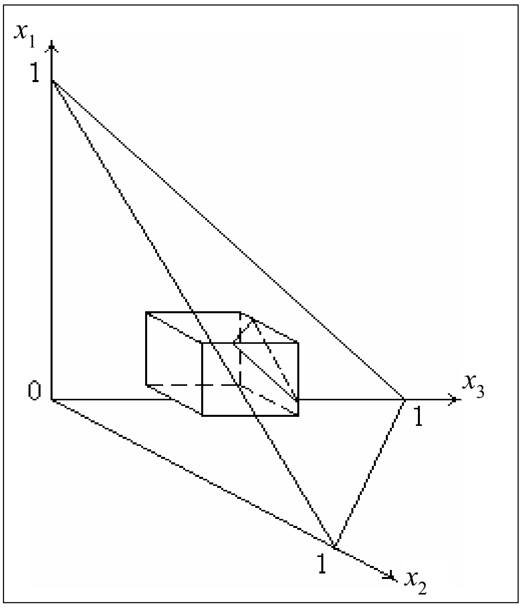


*Рис. 1.* Общий вид сечения, задаваемого ограничениями (2), (3) при $n = 3$

Последнее условие означает, что решением могут быть точки сечения прямоугольного гиперпараллелепипеда, задаваемого ограничениями (2), гиперплоскостью (3). В силу выпуклости области, задаваемой ограничениями, ее сечение гиперплоскостью — выпуклый многогранник (рис. 1). Каждая вершина многогранного сечения задается как точка пересечения гиперплоскости с ребром параллелепипеда (вершиной сечения не может быть внутренняя точка грани). Предложенная характеризация вершин инвариантна, т.е. не зависит от размерности критериального пространства.

Требуется отыскать такую вершину сечения, в которой линейная функция $\sum_{i=1}^{n} e_i x_i$ принимает минимальное значение (вообще говоря, решение не единственно). Вершины сечения, как было отмечено выше, либо лежат на ребрах параллелепипеда, либо совпадают с его вершинами. В первом случае координаты вершины — набор из $n-1$ следующих в некотором порядке верхних и нижних значений и одной компоненты $x_k$ вида $\underline{x}_k \le \tilde{x}_k \le \overline{x}_k$: $\overline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots \underline{x}_{k-2}, \overline{x}_{k-1}, \tilde{x}_k, \underline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_n$, а во втором — подобная компонента отсутствует: $\overline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots \overline{x}_k, \underline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_n$.

Таким образом, задача сводится к следующему:

а) отысканию единственной свободной компоненты (если решением является точка на ребре);

б) установлению порядка следования верхних и нижних ограничений для остальных компонент.

В том случае, когда искомым решением оказывается вершина параллелепипеда, достаточно выполнить подзадачу б).

Для некоторого упорядочения коэффициентов $e_1 < e_2 < \ldots < e_n$ выполняется

**Утверждение.** Линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} e_i x_i$ , где

$$0 < e_1, e_2 < \ldots < e_n \ ,$$

$$0 \le \underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i \le 1 ,$$

принимает максимальное значение $x^*$ : $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = 1$ в точке сечения с координатами

$$\left(\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_{k-1}, \widetilde{x}_k, \overline{x}_{k+1}, ..., \overline{x}_n\right)$$

и минимальное значение в точке вида

$$\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_{k-1}, \widetilde{x}_k, \underline{x}_{k+1}, ..., \underline{x}_n\right) .$$

**Доказательство.** Предположим (для задачи нахождения минимального значения), что существует точка сечения с меньшим, чем у $x^*$ значением критерия.

Рассмотрим сначала пары вершин сечения $x^* \to x^{**}$, все координаты которых, кроме двух, одинаковы (рис. 2).

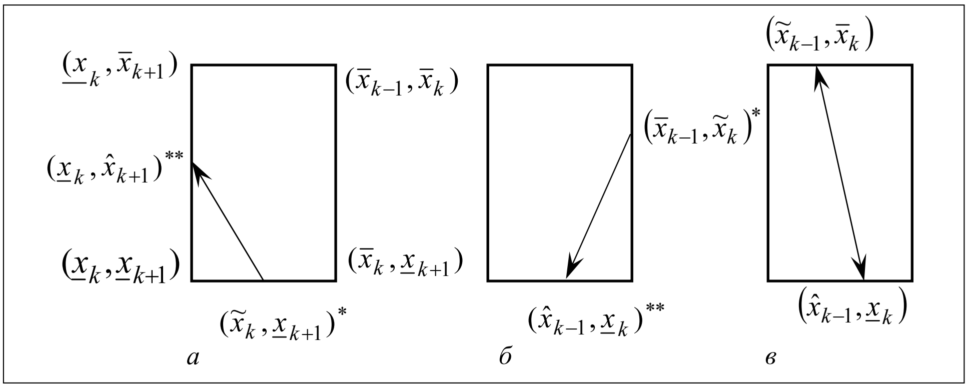


*Рис. 2*. Возможные переходы $x^* \to x^{**}$

Для рис. 2, *а*

$$\Delta\left(f(x^*)x^* - f(x^{**})x^{**}\right) = \left(e_k \widetilde{x}_k + e_{k+1}\underline{x}_{k+1}\right) - \left(e_k \underline{x}_k + e_{k+1}\hat{x}_{k+1}\right) =$$

$$= e_k\left(\widetilde{x}_k - \underline{x}_k\right) + e_{k+1}\left(\underline{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}\right).$$

Для сохранения равенства $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^{**} = 1$ необходимо, чтобы выполнялось

$$\tilde{x}_k - \underline{x}_k = -\left(\underline{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}\right).$$

Тогда $\Delta\left(f(x^*)x^* - f(x^{**})x^{**}\right) = \left(\underline{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}\right)\left(e_k - e_{k+1}\right) > 0$.

Следовательно, при переходе $x^* \to x^{**}$ значение критерия возрастает.

Для рис. 2, *б*

$$\Delta\left(x^* - x^{**}\right) = \left(e_{k-1}\bar{x}_{k-1} + e_k\tilde{x}_k\right) - \left(e_{k-1}\hat{x}_{k-1} + e_k\underline{x}_k\right) =$$
$$= e_{k-1}\left(\bar{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1}\right) + e_k\left(\tilde{x}_k - \underline{x}_k\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^{**} = 1, \text{ поэтому } \bar{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1} = \tilde{x}_k - \underline{x}_k .$$

$$\Delta\left(f(x^*)x^* - f(x^{**})x^{**}\right) = \left(\bar{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1}\right)\left(e_k + e_{k-1}\right) > 0 .$$

Следовательно, при переходе $x^* \to x^{**}$ значение критерия возрастает.

Для рис. 2, *в*

$$\Delta(\downarrow) = \left(e_{k-1}\tilde{x}_{k-1} + e_k\bar{x}_k\right) - \left(e_{k-1}\hat{x}_{k-1} + e_k\underline{x}_k\right) = e_{k-1}\left(\tilde{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1}\right) + e_k\left(\bar{x}_k - \underline{x}_k\right),$$

$$\tilde{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1} = \bar{x}_k - \underline{x}_k .$$

Следовательно, при переходе $x^* \to x^{**}$ значение критерия возрастает.

Итак, при переходе из точки предполагаемого минимума $x^*$ в любую из соседних таких, что удовлетворяли бы ограничениям (2), (3), значение целевой функции (1) возрастает. Следовательно, ни одна из точек локальной окрестности $x^*$ не улучшает решения, $\sum_{i=1}^{n} e_i x_i^*$ .

Необходимо также учитывать, что в силу ограничений $\underline{x}_i \le x_i \le \bar{x}_i$ рассматриваемые равенства разностей $\bar{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1} = \underline{x}_k - \tilde{x}_k$, $\bar{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1} = \tilde{x}_k - \underline{x}_k$, $\tilde{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1} = \bar{x}_k - \underline{x}_k$ могут и не выполняться. Это означает, что в сечении отсутствует соответствующая вершина. Хотя точка с рассматриваемыми координатами и принадлежит параллелепипеду, сумма ее координат из-за накладываемых ограничений не равна нулю. Таким образом, точка $x^*$ является точкой локального минимума.

На основании выпуклости многогранника (2), (3) и линейности целевой функции (1) можно также утверждать, что $x^*$ является и точкой глобального минимума.

Отметим, что при рассмотрении строгого упорядочения $f_{j1}(\omega) < f_{j2}(\omega) < \ldots < f_{jn}(\omega)$ для разбиения критериального пространства на конусы было найдено решение для произвольных внутренних точек каждого из них. В случае равенства $f_{j1}(\omega) = f_{j2}(\omega)$ получаем границы конусов, и значения критерия определяем по непрерывности. При этом, поскольку внутри каждого конуса веса определяются однозначно, обобщенный критерий в целом имеет кусочно-линейный характер, а соответствующая поверхность безразличия многокритериальной задачи является многогранной поверхностью.

Однако для продолжения решения по непрерывности в точках границы рассматриваются внутренние точки двух конусов, в которых найденные решения различны. Убедимся в корректности определения обобщенного критерия в смысле его однозначности. Рассмотрим границу двух конусов $e_k = e_{k+1}$, а также две возможные формы записи коэффициентов.

1. Внутренним точкам одного из двух граничащих конусов соответствует порядок коэффициентов $\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i, \underline{x}_{i+1}, \ldots, \underline{x}_k, \underline{x}_{k+1}, \ldots, \underline{x}_n\right)$, а точкам другого — $\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i, \underline{x}_{i+1}, \ldots, \underline{x}_{k+1}, \underline{x}_k, \ldots, \underline{x}_n\right)$, т.е. индекс $i$ весового коэффициента $\tilde{x}_i$ не совпадает ни с $k$ ни с $k+1$. В этом случае значения обеих линейных сверток в точках границы совпадают, поскольку коэффициенты отличаются лишь одной транспозицией, а соответствующие ей компоненты вектора критериальных оценок равны ($e_k = e_{k+1}$). Проведенное для $i < k$ рассуждение очевидным образом переносится на случай $i > k$.

2. Индекс $i$ весового коэффициента $\tilde{x}_i$ совпадает с $k$ или с $k+1$. Рассмотрим для определенности $\tilde{x}_k$. При переходе из первого конуса с упорядочением $\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k-1}, \tilde{x}_k, \underline{x}_{k+1}, \ldots, \underline{x}_n\right)$ во второй, граничный с ним, единственно возможным будет упорядочение $\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k, \tilde{x}_{k+1}, \underline{x}_{k+2}, \ldots, \underline{x}_n\right)$. Переходы вида $\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i, \underline{x}_{i+1}, \ldots, \underline{x}_k, \underline{x}_{k+1}, \ldots, \underline{x}_n\right)$ или $\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \ldots \right.$ $\left.\ldots, \bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i, \underline{x}_{i+1}, \ldots, \underline{x}_n\right)$ нереализуемы. Таким образом, при переходе границы конусов сумма пары указанных весовых коэффициентов остается неизменной. Значит, предельные значения при переходе в точки границы из внутренних точек каждого из конусов совпадают.

Случай границ, разделяющих более чем два конуса, очевидно, сводится к рассмотренному.

Таким образом, при переходе от одного конуса к другому, что отвечает соответствующему изменению упорядочения компонент векторной оценки (например, от $e_1 < e_2 < e_3$ к $e_3 < e_2 < e_1$, как показано на рис. 3), естественным образом обеспечивается непрерывность обобщенного критерия.

Процедура построения решения.

1. Начинаем с вершины $x^0 = \underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$. Для нее проверяем $\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n = 1$. Если условие выполнено, то $x^0$ и есть решение. Если равенство не выполнено, составляем сумму $S^1 = \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n$, для которой проверяем $\underline{x}_1 \le 1 - S^1 \le \bar{x}_1$. В случае выполнения неравенства существует $\tilde{x}_1 = 1 - S^1$ такое, что $\tilde{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n = 1$, и полученная точка $x^1 = \tilde{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ $\ldots, \underline{x}_n$ является решением. В противном случае переходим в точку $x^2 = \bar{x}_1, \tilde{x}_2, \underline{x}_3, \ldots, \underline{x}_n$, для которой повторяем процедуру.

. . .

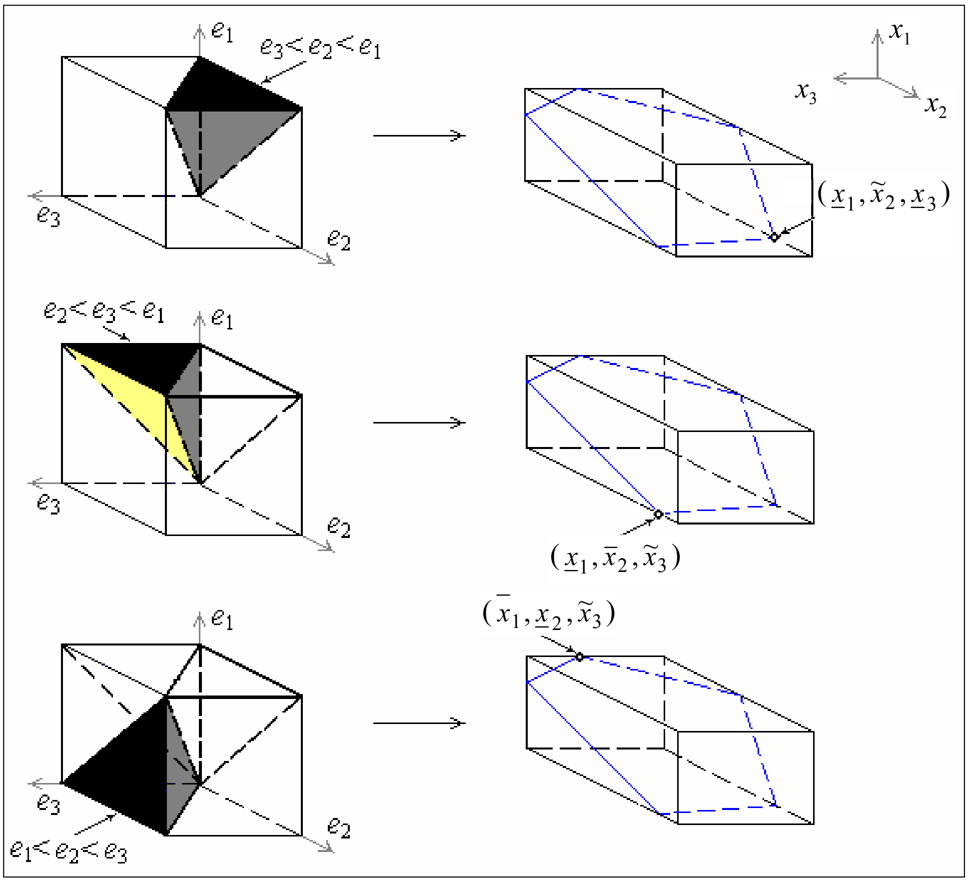


*Рис. 3.* Структура решения задачи для упорядочения $e_1 < e_2 < e_3$, которому соответствует конус $x_1 > x_2 > x_3$

*i*. Для вершины $x^i = \bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i, \underline{x}_{i+1}, ..., \underline{x}_n$ строим сумму

$$S^i = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + ... + \bar{x}_{i-1} + \underline{x}_{i+1} + ... + \underline{x}_n .$$

Если $\underline{x}_i \le 1 - S^i \le \bar{x}_i, \Rightarrow \exists \tilde{x}_i = 1 - S^i : \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + ... + \bar{x}_{i-1} + \tilde{x}_i + \underline{x}_{i+1} + ... + \underline{x}_n = 1$, то вершина $x^i$ является решением. Иначе выполняем шаг $i+1$.

**Этап 2.** Решение задачи оптимизации построенного критерия.

Построенный на первом этапе критерий представляет собой непрерывную, определенную в любой точке критериального пространства функцию вида

$$L(\mathbf{e}) = \bar{x}_1 e_1 + \bar{x}_2 e_2 + ... + \bar{x}_{k-1} e_{k-1} + \tilde{x}_k e_k + \underline{x}_{k+1} e_{k+1} + ... + \underline{x}_n e_n ,$$

где номер и значение компоненты $\tilde{x}_k$ определяются для внутренних точек каждого из конусов, задаваемых упорядочением $f_{j1}(\omega) < f_{j2}(\omega) < ... ... < f_{jn}(\omega)$, согласно описанной процедуре. Таким образом, задача принятия решений на множестве альтернатив с векторными оценками и заданными интервально весовыми коэффициентами критериев сводится к отысканию максимума линейной свертки $L^* : L^* = \max_{\mathbf{e}} (L(\mathbf{e}))$ в критериальном пространстве.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Описанная процедура построения весовых коэффициентов, очевидно, не является оптимальной с точки зрения вычислительной сложности. Для нахождения решения требуется совершить последовательный просмотр в среднем $n/2$ компонент вектора оценок. Улучшить этот показатель до логарифмического можно путем организации прохода по методу двоичного поиска. При этом количество шагов улучшенной процедуры составляет в среднем $\mathrm{O}(\log(n))$.

Следует отметить, что предлагаемый метод решения рассматриваемой задачи не является единственным, поскольку кроме наиболее популярного симплекс-метода существуют достаточно эффективные градиентные процедуры. Однако все известные для класса задач линейного программирования с ограничениями вида (2), (3) методы решения — численные и, как следствие, не дают никакой информации об общей структуре решения. В отличие от них предлагаемый метод учитывает специфику рассматриваемой постановки, заключающуюся в том, что задача (1) – (3) является вспомогательной, и ее решение для дальнейшего использования должно быть получено в аналитической форме, поскольку далее необходимо решать задачу оптимизации построенного обобщенного критерия.

Отметим также, что использование интервальных оценок и гарантированного подхода позволяет надеяться на минимизацию влияния ошибок оценивания субъективного характера и на существенное улучшение надежности результатов принятия решения.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.* Введение в системный анализ.: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. шк. — 1989. — 367 с.
2. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. — М.: Мир. — 1991. — 464 с.
3. *Подиновский В.В.* Количественная важность критериев // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 5. — С. 110–123.
4. *Фишберн П.С.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978. — 358 с.
5. *Кини Р.Л.* Размещение энергетических объектов: выбор решений. — М.: Энергоиздат, 1983. — 504 с.
6. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах: Учебник. — М.: Логос, 2000. — 296 с.
7. *Мушик Э., Мюллер П.* Методы принятия технических решений. — М.: Мир. — 1990. — 208 с.
8. *Самойленко Ю.И., Хорозов О.А., Смирнов С.А.* Алгебраические методы оптимизации терминальных функционалов квантово-механических систем / Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН Украины. — Препр. — Киев, 1988. — 16 с.


*Поступила 15.04.2005*