10. *Andersson M., Passare M.* Complex Kergin interpolation // Ibid. – 1991. – **64**. – P. 214–225.
11. *Filipsson L.* Kergin interpolation in Banach spaces // Ibid. – 2004. – **127**. – P. 108–123.
12. *Kergin P.* A natural interpolation of C^k function // Ibid. – 1980. – **29**. – P. 278–293.
13. *Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Демків І. І.* Функціональні поліноми Ерміта в просторі $Q[0,1]$ // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 21–25.
14. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Москва: Наука, 1966. – 534 с.
15. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – Москва: Мир, 1979. – 588 с.

Інститут математики НАН України, Київ
Національний університет "Львівська політехніка"
Надійшло до редакції 14.05.2007

УДК 531.36

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Мартынюк, Л. Н. Чернецкая**

К теории практической устойчивости по трем мерам

We first formulate the general conditions of practical stability with respect to three measures. We apply the matrix-valued Lyapunov function and the comparison principle.

1. Постановка задачи. Рассматривается система с конечным числом степеней свободы, которая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Вектор-функция f предполагается достаточно гладкой, гарантирующей глобальное существование решений задачи (1). Заметим, что здесь не предполагается, что $f(t,0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и, следовательно, $x = 0$ не является решением системы (1).

Далее рассматриваются следующие классы функций:

$$K = \{a \in C([\alpha, +\infty), \mathbb{R}_+),\ a(r) \text{ строго возрастает и } a(r) \to +\infty \text{ при } r \to +\infty\};$$

$$CK = \{\sigma \in C(\mathbb{R}_+ \times [\alpha, +\infty), \mathbb{R}_+),\ \sigma(t,r) \in K \text{ для каждого } t \in \mathbb{R}_+\};$$

$$\mathcal{M} = \Big\{\rho \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+) \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(t,x) = 0 \text{ при любом } t \in \mathbb{R}_+\Big\}.$$

Следуя [1, 2], напомним определения практической устойчивости относительно двух мер.

Определение 1. Система (1) при заданных оценках величин (λ, A, B, T) называется:

1) (ρ_0, ρ)-практически устойчивой, если при заданных $0 < \lambda < A$ из условия $\rho_0(t_0, x_0) < \lambda$ следует $\rho(t, x(t)) < A$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и любого решения $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ системы (1);

2) равномерно (ρ_0, ρ)-практически устойчивой, если условия определения 1.1 выполняются при всех $t_0 \in \mathbb{R}_+$;

3) (ρ_0, ρ)-практически квазиустойчивой, если для заданных $(\lambda, B, T) > 0$ и некоторого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ из условия $\rho_0(t_0, x_0) < \lambda$ следует $\rho(t, x(t)) < B$ $(B < A)$ при всех $t \geqslant t_0 + T$;

4) равномерно (ρ_0, ρ)-практически квазиустойчивой, если условия определения 1.3 выполняются при любом $t_0 \in \mathbb{R}_+$;

5) строго (ρ_0, ρ)-практически устойчивой, если все условия определений 1.1 и 1.3 выполняются одновременно;

6) строго равномерно (ρ_0, ρ)-практически устойчивой, если все условия определений 1.2 и 1.4 выполняются одновременно;

7) (ρ_0, ρ)-эквипритягивающей в целом, если для любых $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $T = T(t_0, \alpha, \varepsilon) > 0$ такое, что из условия $\rho_0(t_0, x_0) < \alpha$ следует, что $\rho(t, x(t)) < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0 + T$;

8) равномерно (ρ_0, ρ)-притягивающей в целом, если в определении 1.7 величина T не зависит от $t_0 \in \mathbb{R}_+$;

9) асимптотически (ρ_0, ρ)-практически устойчивой, если при $\alpha = \lambda$ и $\varepsilon = A$ все условия определений 1.1 и 1.7 выполняются одновременно;

10) асимптотически равномерно (ρ_0, ρ)-практически устойчивой, если при $\alpha = \lambda$ все условия определений 1.2, 1.8 выполняются одновременно.

Замечание 1. При конкретном выборе мер ρ_0 и ρ, применяемых в определениях 1.1–1.10, можно получить многие известные понятия практической устойчивости. Например, при $\rho_0(t, x) = \rho(t, x) = \|x\|$ имеем обычные определения практической устойчивости [1]; при $\rho_0(t, x) = \|x\|$ и $\rho(t, x) = \|x\|_s$, $1 \leqslant s < n$, получаем определения практической устойчивости относительно части переменных [1].

Определение 2. Систему (1) будем называть практически полиустойчивой, если ее решения имеют одновременно свойства, описанные в одном из определений 1.1–1.10 относительно мер (ρ_0, ρ_1) и (ρ_0, ρ_2).

Целью данной работы является получение условий практической полиустойчивости движения.

2. Матричнозначная функция Ляпунова и принцип сравнения. Для системы (1) построим двухиндексную систему функций [3]

$$U(t, x) = [u_{ij}(t, x)], \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где $u_{ii} \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ и $u_{ij} \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ при $i \neq j$. На основе функции (2) построим векторную функцию

$$L(t, x, \theta) = AU(t, x)\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}^3_+, \tag{3}$$

где A — 3×3 постоянная матрица и $U\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{3\times 3}$. Вектор-функция (3) вместе с правой верхней производной Дини $D^+L(t, x, \theta)$ вдоль решений системы (1) позволяет установить принцип сравнения [2, 3] в такой формулировке.

Теорема 1. *Пусть $L(t, x, \theta) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^3_+, \mathbb{R}^3)$ и $L(t, x, \theta)$ локально липшицева по x при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Предположим, что существует вектор-функция $g \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $g(t, u)$ квазимонотонная и неубывающая по u такая, что*

$$D^+L(t, x, \theta) \leqslant g(t, L(t, x, \theta)), \qquad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Пусть $r_M(t) = r_M(t; t_0, u_0)$ максимальное решение системы

$$\frac{du}{dt} = g(t, u), \qquad u(t_0) = u_0, \tag{5}$$

существует на интервале $J = [t_0, t_0 + \beta)$, $0 \leqslant \beta < +\infty$. *Тогда вдоль любого решения* $x(t)$ *системы* (1), *существующего на* J, *выполняется оценка*

$$L(t, x(t), \theta) \leqslant r_M(t) \qquad \text{при всех} \qquad t \in J, \tag{6}$$

как только

$$L(t_0, x_0, \theta) \leqslant u_0. \tag{7}$$

Оценка (6) *выполняется в* $\mathbb{R}^3$ *покомпонентно.*

Доказательство оценки (6) имеется во многих работах (см. [3] и приведенную там библиогр.).

3. Условия практической устойчивости относительно трех мер. Прежде чем перейти к формулировке основного результата, сделаем некоторые предположения относительно компонент $L_0(t, x, \theta)$, $L_1(t, x, \theta)$, $L_2(t, x, \theta)$ векторной функции (3) и мер ρ_0, ρ_1, $\rho_2 \in \mathcal{M}$.

А$_1$. Для заданных мер $\rho_0, \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}$ существуют функции сравнения $\varphi_1, \varphi_2 \in CK$-классу такие, что $\rho_1(t, x(t)) \leqslant \varphi_1(t, \rho_0(t, x(t)))$, $\rho_2(t, x(t)) \leqslant \varphi_2(t, \rho_0(t, x(t)))$ при всех $t \geqslant t_0$ и $\rho_0(t, x(t)) < \lambda$.

А$_2$. Компонента $L_0(t, x, \theta) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^3_+, \mathbb{R}_+)$, $L_0(t, x, \theta)$ локально липшицева по x и существуют функции $a_0(t, x) \in CK$ и $g_0(t, u) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, R)$ такие, что:

(а) $L_0(t, x, \theta) \leqslant a_0(t, \rho_0(t, x))$ при всех $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}(\rho_0, \lambda)$;

(б) $D^+ L_0(t, x, \theta)|_{(1)} \leqslant g_0(t, L_0(t, x, \theta))$ на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

А$_3$. Компонента $L_1(t, x, \theta) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}^c(\rho_1, \lambda) \bigcap \mathcal{S}(\rho_1, A), \mathbb{R}_+)$, $L_1(t, x, \theta)$ локально липшицева по x и существуют функции a_1, $b_1 \in K$-классу и $g_1(t, w) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, R)$ такие, что:

(а) $b_1(\rho_1(t, x)) \leqslant L_1(t, x, \theta) \leqslant a_1(\rho_1(t, x)) + L_0(t, x, \theta)$;

(б) $D^+(L_1(t, x, \theta) + L_0(t, x, \theta))|_{(1)} \leqslant g_1(t, L_1(t, x, \theta) + L_0(t, x, \theta))$ на $\mathcal{S}^c(\rho_1, A) \bigcap \mathcal{S}^c(\rho_1, \lambda)$, где $\mathcal{S}^c(\rho_1, A)$ и $\mathcal{S}^c(\rho_1, \lambda)$ — дополнения множеств $\mathcal{S}(\rho_1, A)$ и $\mathcal{S}(\rho_1, \lambda)$ соответственно.

А$_4$. Компонента $L_2(t, x, \theta) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}(\rho_2, A) \bigcap \mathcal{S}^c(\rho_2, a(\lambda)) \bigcap \mathcal{S}(\rho_1, a(\lambda)), \mathbb{R}_+)$, $0 < a(\lambda) < A$, $L_2(t, x, \theta)$ локально липшицева по x и существуют функции $a_2, b_2 \in K$-классу и $g_2(t, v) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, R)$ такие, что:

(а) $b_2(\rho_2(t, x)) \leqslant L_2(t, x, \theta) \leqslant a_2(\rho_1(t, x) + \rho_2(t, x)) + L_0(t, x, \theta)$ на $\mathcal{S}(\rho_2, A) \bigcap \mathcal{S}^c(\rho_2, a(\lambda)) \bigcap \mathcal{S}(\rho_1, a(\lambda))$;

(б) $D^+(L_2(t, x, \theta) + L_0(t, x, \theta))|_{(1)} \leqslant g_2(t, L_2(t, x, \theta) + L_0(t, x, \theta))$ на множестве $\mathcal{S}(\rho_2, A) \bigcap \mathcal{S}^c(\rho_2, a(\lambda)) \bigcap \mathcal{S}(\rho_1, a(\lambda))$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что для системы уравнений* (1) *построена* 3×3 *матричнозначная функция* (2) *и:*

1) выполняются условия A_1–A_4;

2) при заданных оценках величин $(\lambda, A) > 0$, $0 < \lambda < A$, *выполняются неравенства:*

а) $a_1(A) + 3a_0(t_0, \lambda) < b_1(A)$;

б) $a_2(2A) + 3a_0(t_0, \lambda) < b_2(A)$;

в) $\varphi_1(t_0, \lambda) < A$ *и* $\varphi_2(t_0, \lambda) < A$ *для некоторого* $t_0 \in \mathbb{R}_+$;

3) нулевое решение уравнения

$$\frac{du}{dt} = g_0(t, u), \qquad u(t_0, = u_0,) \tag{8}$$

практически устойчиво и уравнений

$$\frac{dw}{dt} = g_1(t,w), \qquad w(t_0) = w_0, \tag{9}$$

$$\frac{dv}{dt} = g_2(t,v), \qquad v(t_0) = v_0 \tag{10}$$

равномерно практически устойчиво.

Тогда система (1) *практически устойчива относительно мер* (ρ_0, ρ_1) *и* (ρ_0, ρ_2).

Доказательство. Утверждение теоремы 2 доказывается стандартным для метода сравнения подходом (см. [1, 4]) с использованием теоремы 1 для компонент L_0, L_1, L_2 вектор-функции (3). Покажем вначале, что система (1) (ρ_0, ρ_1)-практически устойчива.

Из предположения A_2 (б) и условия *3* теоремы 2 следует, что нулевое решение уравнения (8) практически устойчиво относительно величин $(a_0(t_0,\lambda), 3/2a_0(t_0,\lambda))$. Поэтому для любого решения $u(t)$ уравнения (8) имеет место оценка

$$u(t;t_0,u_0) < \frac{3}{2}a_0(t_0,\lambda) \qquad \text{при всех} \qquad t \geqslant t_0 \tag{11}$$

для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}_+$, как только $u_0 < a_0(t_0,\lambda)$. Пусть решение $x(t) = x(t;t_0,x_0)$ системы (1) выходит из области $\rho_0(t_0,x_0) < \lambda$. Из предположения A_1 и условия *2*, *в* теоремы 2 следует, что $\rho_1(t_0,x_0) \leqslant \varphi_1(t_0,\lambda) \equiv \beta_1 < A$. Обозначим $\lambda^* = \max(\beta_1,\lambda)$. Если система (2) не является (ρ_0,ρ_1)-практически устойчивой, тогда найдутся значения t_1 и t_2 такие, что $t_2 > t_1 > t_0$, при которых

$$\begin{aligned} &\rho_1(t_1,x(t_1)) = \lambda^*, \qquad \rho_1(t_2,x(t_2)) = A, \\ &\lambda^* \leqslant \rho_1(t,x(t)) \leqslant A \qquad \text{при} \qquad t \in [t_1,t_2] \end{aligned} \tag{12}$$

при любых (t_0,x_0), для которых $\rho_0(t_0,x_0) \leqslant \lambda$. Из теоремы 1 при выполнении условия A_2 для компоненты $L_0(t,x,\theta)$ следует оценка

$$L_0(t,x(t),\theta) \leqslant r_{0M}(t) \qquad \text{при всех} \qquad t \in [t_0,t_1], \tag{13}$$

где $r_{0M}(t)$ является максимальным решением уравнения (8) с начальным условием $u_0 < {}$ $< a_0(t_0,\lambda)$. Из оценок (11) и (13) следует, что

$$L_0(t,x(t)\theta) \leqslant \frac{3}{2}a_0(t_0,\lambda) \qquad \text{при всех} \qquad t \in [t_0,t_1]. \tag{14}$$

Так как решение уравнения (9) равномерно практически устойчиво относительно величин $(a_1(A) + 3a_0(t_0,\lambda), b_1(a))$, то из условия $0 < w_0 < a_1(A) + 3a_0(t_0,\lambda)$ следует, что

$$w(t;t_0,w_0) < b_1(A) \qquad \text{при всех} \qquad t \geqslant t_0 \tag{15}$$

при любом $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Согласно предположениям A_2(а) и A_3(а) имеем

$$\begin{aligned} L_1(t_1,x(t_1),\theta) + L_0(t_1,x(t_1),\theta) &\leqslant a_1(\rho_1(t_1,x(t_1))) + 2L_0(t_1,x(t_1),\theta) \leqslant \\ &\leqslant a_1(\lambda^*) + 2\left(\frac{3}{2}a_0(t_0,\lambda)\right) \leqslant a_1(A) + 3a_0(t_0,\lambda). \end{aligned} \tag{16}$$

Из предположения A_3(б) и уравнения (9) с начальным условием $w_0 < a_1(A) + 3a_0(t_0, \lambda)$ получаем оценку

$$L_1(t, , x(t)\theta) + L_0(t, x(t), \theta) \leqslant r_{1M}(t), \tag{17}$$

где $r_{1M}(t)$ — максимальное решение уравнения (9). Из неравенств (15), (17) и предположений A_2(а), A_3(а) для момента $t = t_2$ имеем

$$b_1(A) \leqslant L_1(t_2, x(t_2), \theta) + L_0(t_2, x(t_2), \theta) < b_1(A),$$

что является противоречием. Этим доказана (ρ_0, ρ_1)–практическая устойчивость системы (1).

Далее докажем, что система (1) (ρ_0, ρ_2)-практически устойчива. Как и выше, предположим, что $\rho_0(t_0, x_0) < \lambda$, и согласно предположению A_1 имеем $\rho_2(t_0, x_0) \leqslant \varphi_2(t_0, \lambda) \equiv \beta_2 < A$.

Выберем величину $\alpha(\lambda)$ так, что $\max(\lambda, \beta_2) < \alpha(\lambda) < A$. Так как система (1) (ρ_0, ρ_1)-практически устойчива, то для заданных $(\lambda, \alpha(\lambda))$ имеем $\rho_1(t, x(t)) < \alpha(\lambda)$ при $t > t_0$, как только $\rho_0(t_0, x_0) < \lambda$. Пусть система (1) не является (ρ_0, ρ_2)-практически устойчивой. В этом случае найдутся значения t_2 и t_1 такие, что $t_2 > t_1 > t_0$ и

$$\begin{gathered} \rho_2(t_1, x(t_1)) = \alpha(\lambda), \qquad \rho_2(t_2, x(t_2)) = A, \\ \alpha(\lambda) \leqslant \rho_2(t, x(t)) \leqslant A \qquad \text{при} \qquad t \in [t_1, t_2], \end{gathered} \tag{18}$$

как только $\rho_0(t_0, x_0) \leqslant \lambda$.

Так как нулевое решение уравнения (10) равномерно практически устойчиво относительно величин $(a_2(2\alpha(\lambda)) + 3a_0(t_0, \lambda), b_2(A))$, то для любого решения $v(t)$ уравнения (10) верна оценка

$$v(t; t_0, v_0) < b_2(A) \qquad \text{при всех} \qquad t \geqslant t_0, \tag{19}$$

как только $v_0 < a_2(2\alpha(\lambda)) + 3a_0(t_0, \lambda)$ при любом $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Так как $L_0(t, x(t)\theta) \leqslant 3/2a_0(t_0, \lambda)$ на $[t_0, t_1]$, то согласно предположению A_4(а) имеем

$$L_2(t_1, x(t_1), \theta) + L_0(t_1, x(t_1), \theta) \leqslant a_2(2\alpha(\lambda)) + 3a_0(t_0, \lambda). \tag{20}$$

Из теоремы 1 и предположения A_4(б) имеем оценку

$$L_2(t, x(t), \theta) + L_0(t, x(t), \theta) \leqslant r_{2M}(t) \qquad \text{при} \qquad t \in [t_1, t_2], \tag{21}$$

где $r_{2M}(t)$ — максимальное решение уравнения (10). Согласно условию *2, б* теоремы 2 и неравенствам (19), (20) для $t = t_2$ имеем

$$b_2(A) \leqslant L_2(t_2, x(t_2), \theta) + L_0(t_2, x(t_2), \theta) < b_2(A),$$

что является противоречием.

Этим доказано, что система (1) (ρ_0, ρ_2)-практически устойчива. Следовательно, согласно определению 2 система (1) является практически полиустойчивой.

Таким образом, при некоторой модификации предположений A_1–A_4 нетрудно получить условия других типов практической устойчивости относительно трех мер. В работе [4] для исследования устойчивости относительно двух мер применяются возмущенные функции

Ляпунова [2]. В статье [5] описано новое направление в методе матричных функций Ляпунова, суть которого состоит в том, что отдельные компоненты векторной функции (3) сопровождают соответствующие динамические свойства решений исследуемой системы. Упомянутый подход применен здесь для исследования задачи о практической полиустойчивости движения.

1. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Practical stability of nonlinear systems. – Singapore: World Scientific, 1990. – 207 p.
2. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Stability analysis of nonlinear systems. – New York: Marcel Dekker, 1989. – 315 p.
3. *Martynyuk A. A.* Stability by Liapunov's matrix function method with applications. – New York: Marcel Dekker, 1998. – 276 p.
4. *Stutson D., Vatsala A. S.* Generalized practical stability results by perturbing Lyapunov functions // J. Appl. Math. Stoch. Anal. – 1996. – **9**. – P. 69–75.
5. *Мартынюк А. А.* Новое направление в методе матричных функций Ляпунова // Докл. АН СССР. – 1991. – **319**. – С. 554–557.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.12.2006

УДК 517.5

В. В. Савчук

Наближення деяких класів голоморфних функцій середніми Фейєра

(Представлено членом-кореспондентом НАН України $\boxed{\text{О. І. Степанцем}}$)

For the classes $\mathscr{L}_p^\alpha$ and $\mathscr{D}_p^\beta$ of functions f holomorphic in a unit disk for which, respectively, $\sup\limits_{0\leqslant r<1}(1-r^2)^{1-\alpha}M_p(f')(r)\leqslant 1$ and $2\int\limits_0^1 M_p^p(f')(r)(1-r^2)^\beta r dr\leqslant 1$, we determine the exact estimates of upper bounds of deviations of the Fejer means of Taylor series in the Hardy spaces H_p. We establish a relation between the classes $\mathscr{L}_p^\alpha$ and $\mathscr{D}_p^\beta$.

Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ і $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ — множина усіх функцій, голоморфних у крузі $\mathbb{D}$. Для функції $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ і числа r, $0 \leqslant r < 1$, покладемо

$$M_p(f)(r) := \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p dt\right)^{1/p}, \qquad 0 < p < \infty,$$

і

$$M_\infty(f)(r) := \max_{|z|=r}|f(z)|.$$