ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2008

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 510.6

А. П. Пынько

Производные правила секвенциальных исчислений для конечнозначных логик с определителем равенства

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Летичевским)

The derivable rules of axiomatic extensions of sequent calculi with structural rules for the prepositional finitely valued logics with an equality determinant are analyzed with the use of methods of logic programming.

Используя методы логического программирования, мы предлагаем процедуры поиска вывода производных правил секвенциальных исчислений работы [1] со структурными правилами.

Будем следовать терминологии, обозначениям и установкам, принятым в работе [1]. Зафиксируем $F \subseteq G \subseteq \Im(\mathrm{Fm}_{L'}(W))$ и $H \subseteq \mathrm{Seq}_G^{(k,l)}$.

Определение 1. $\mathcal{C}(F, G, H)$ — секвенциальное L-исчисление ранга (k, l), состоящее из аксиом и правил исчисления $\mathcal{C}$ и следующих структурных правил:

для всех $\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Seq}_G^{(k,l)}$ и $\varphi \in F$

$$\text{(сечение)} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \; \Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta};$$

для всех $\Gamma \vdash \Delta \in H$ и $\varphi \in G$

$$\text{(утончение слева)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta},$$

$$\text{(утончение справа)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}.$$

Определение 2. Понятие нормального $\mathcal{C}(F, G, H)$-вывода $\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Seq}_G^{(k,l)}$ из $T \in (\mathrm{Seq}_F^{(k,l)} \bigcap H)^*$ как основного терма сигнатуры $L \bigcup \mathrm{Var} \bigcup \{\mathtt{sq}\} \bigcup \omega$ со списковыми и дополнительными символами `g, pr, ax, cut, lw, rw, lr` и `rr` арностей 3, 1, 4, 0, 0, 0, 4 и 3, соответственно, определяется рекурсивно следующим образом:

всякий $\mathcal{C}$-вывод $\Gamma \vdash \Delta$ является нормальным $\mathcal{C}(F,G,H)$-выводом $\Gamma \vdash \Delta$ из T;

всякий терм вида $\mathtt{g}(\mathtt{sq}(\Gamma,\Delta),\mathtt{pr}(s),[])$, где $s \in |T|$, является нормальным $\mathcal{C}(F,G,H)$-выводом $\Gamma \vdash \Delta$ из T, если $\Gamma \vdash \Delta = \overline{T}_s$;

для всех $\varphi \in F$ всякий терм вида $\mathtt{g}(\mathtt{sq}(\Gamma,\Delta),\mathtt{cut},[f,h])$, где f и h — нормальные $\mathcal{C}(F,G,H)$-выводы $\Gamma,\ \varphi \vdash \Delta$ и $\Gamma \vdash \Delta,\ \varphi$, соответственно, из T, является нормальным $\mathcal{C}(F,G,H)$-выводом $\Gamma \vdash \Delta$ из T;

для всех $\varphi \in G$ всякие термы вида $\mathtt{g}(\mathtt{sq}((\varphi,\Gamma),\Delta),\mathtt{lw},[f])$ и $\mathtt{g}(\mathtt{sq}(\Gamma,(\varphi,\Delta)),\mathtt{rw},[f])$, где f — нормальный $\mathcal{C}(F,G,H)$-вывод $\Gamma \vdash \Delta$ из T, являются нормальными $\mathcal{C}(F,G,H)$-выводами $\varphi,\ \Gamma \vdash \Delta$ и $\Gamma \vdash \varphi,\ \Delta$, соответственно, из T, если $\Gamma \vdash \Delta \in H$.

Определение 3. Пролог-программа $\mathcal{Q}$ состоит из следующих предложений[1]:

$$\mathtt{der([],sq(X,Y),G):-seq(X,[],Y,[],[],G).} \tag{1}$$

$$\mathtt{der([sq(W,Z)|T],sq(X,Y),G):-ded(T,W,Z,[],[],X,Y,G).} \tag{2}$$

$$\mathtt{ded(T,[],[],A,B,[],[],g(sq(L,R),pr(N),[])):-} \tag{3}$$

$$\mathtt{length(T,N),reverse(A,L),reverse(B,R).}$$

$$\mathtt{ded(T,[],[],A,B,[F|X],Y,g(sq([F|L],R),wl,[G])):-} \tag{4}$$

$$\mathtt{reverse(A,C),reverse(B,D),}$$

$$\mathtt{append(X,C,L),append(Y,D,R),ded(T,[],[],A,B,X,Y,G).}$$

$$\mathtt{ded(T,[],[],A,B,[],[F|Y],g(sq(L,[F|R]),wr,[G])):-}$$

$$\mathtt{reverse(A,L),reverse(B,D),}$$

$$\mathtt{append(Y,D,R),ded(T,[],[],A,B,[],Y,G).}$$

$$\mathtt{ded(T,[F|I],J,A,B,X,Y,g(sq(L,R),cut,[G,H])):-} \tag{5}$$

$$\mathtt{reverse(A,C),reverse(B,D),}$$

$$\mathtt{append(X,C,L),append(Y,D,R),append(R,[F],E),}$$

$$\mathtt{der(T,sq(L,E),H),ded(T,I,J,[F|A],B,X,Y,G).}$$

$$\mathtt{ded(T,[],[F|J],A,B,X,Y,g(sq(L,R),cut,[G,H])):-}$$

$$\mathtt{reverse(A,C),reverse(B,D),}$$

$$\mathtt{append(X,C,L),append(Y,D,R),append(L,[F],E),}$$

$$\mathtt{der(T,sq(E,R),G),ded(T,[],J,A,[F|B],X,Y,H).}$$

Положим $\mathcal{R} := \mathcal{P} \bigcup \mathcal{Q}$ при $|L'| < \omega$.

Теорема 1. *Пусть* $T \subseteq {}_{\omega}\mathrm{Seq}_F^{(k,l)} \bigcap H$ *и* $\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Seq}_G^{(k,l)}$. *Предположим, что* $\vec{\Im}$ *— последовательность, не убывающая относительно* $\preceq$[2], *а* H *— верхний конус* $\langle \mathrm{Seq}_G^{(k,l)}, \sqsubseteq \rangle$. *Тогда:*

---

[1]Определения встроенных в систему SWI-Prolog (см. http://swi.psy.uva.nl/projects/SWI-Prolog/) предикатов length/2, reverse/2 и append/3 опущены.

[2]См. сноску 4 работы [1].

1) при $|L'| < \omega$ *запрос* $\mathtt{der}(\vec{T}, \mathtt{sq}(\Gamma, \Delta), \mathtt{G})$ *получает в программе* $\mathcal{R}$ *положительный ответ с решением* $\mathtt{G} =$ *нормальный* $\mathcal{C}(F, G, H)$*-вывод* $\Gamma \vdash \Delta$ *из* $\vec{T}$*, если* $\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}^{(k,l)}(T)$*, и отрицательный ответ — в противном случае;*

2) следующие утверждения эквивалентны:

а) $\Gamma \vdash \Delta$ *имеет нормальный* $\mathcal{C}(F, G, H)$*-вывод из* $\vec{T}$*;*

б) $T \to \Gamma \vdash \Delta$ *— производное правило исчисления* $\mathcal{C}(F, G, H)$*;*

в) $\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}^{(k,l)}(T)$.

Доказательство. Докажем утверждение 1 индукцией по мощности $|T|$ запроса вида, указанного в его формулировке, называя его начальным, а $\Gamma \vdash \Delta$ — его характеристической секвенцией.

Пусть $T = \varnothing$. Тогда к рассматриваемому начальному запросу применяется только правило (1), причем он получает в $\mathcal{R}$ отрицательный (положительный) ответ (с решением $\mathtt{G} = t$, где t — произвольный терм), если запрос $\mathtt{seq}(\Gamma, [], \Delta, [], [], \mathtt{G})$ получает в $\mathcal{P}$ отрицательный (положительный) ответ (с тем же решением $\mathtt{G} = t$). Тем самым теорема 1 работы [1] завершает анализ случая $T = \varnothing$.

Предположим, что $T \neq \varnothing$. Тогда $\vec{T} = (\Theta \vdash \Xi; \vec{S})$, где $\Theta \vdash \Xi \in T$ и $S := T \setminus \{\Theta \vdash \Xi\}$. Тогда, к рассматриваемому начальному запросу применяется только правило 2, причем он получает в $\mathcal{R}$ отрицательный (положительный) ответ (с решением $\mathtt{G} = t$, где t — произвольный терм), если запрос $\mathtt{ded}(\vec{S}, \Theta, \Xi, [], [], \Gamma, \Delta, \mathtt{G})$ получает в $\mathcal{R}$ отрицательный (положительный) ответ (с тем же решением $\mathtt{G} = t$). Запрос вида $\mathtt{ded}(\vec{S}, \Sigma, \Omega, \Lambda, \Pi, \Gamma, \Delta, \mathtt{G})$, где $\Theta = (\overline{\Lambda}, \Sigma)$, $\Xi = (\overline{\Pi}, \Omega)$ и $\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Seq}_G^{(k,l)}$, назовем регулярным, причем Γ, $\overline{\Lambda} \vdash \Delta$, $\overline{\Pi} \in \mathrm{Seq}_G^{(k,l)}$ будем называть его характеристической секвенцией, а $|\Sigma| + |\Omega| + |\Gamma| + |\Delta|$ — его сложностью, индукцией по которой докажем, что он получает в $\mathcal{R}$ положительный ответ с решением $\mathtt{G} =$ нормальный $\mathcal{C}(F, G, H)$-вывод его характеристической секвенции из $\vec{T}$, если она принадлежит $\mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}^{(k,l)}(T)$, и отрицательный ответ — в противном случае. При этом регулярный запрос вида $\mathtt{ded}(\vec{S}, [], [], \Lambda, \Pi, \Gamma, \Delta, \mathtt{G})$ будем называть простым. Заметим, что характеристическая секвенция всякого простого запроса $\sqsupseteq \Theta \vdash \Xi$ и поэтому принадлежит $\mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}^{(k,l)}(T) \bigcap H$.

Пусть $|\Sigma| + |\Omega| = 0$, т. е., рассматриваемый регулярный запрос является простым.

Если $|\Gamma| + |\Delta| = 0$, то характеристическая секвенция рассматриваемого простого запроса совпадает с $\Theta \vdash \Xi$. Тогда к рассматриваемому простому запросу применяется только правило 3. При этом он получает в $\mathcal{R}$ положительный ответ с решением $\mathtt{G} =$ нормальный $\mathcal{C}(F, G, H)$-вывод его характеристической секвенции из $\vec{T}$, что завершает анализ случая $|\Gamma| + |\Delta| = 0$.

Предположим, что $|\Gamma| + |\Delta| > 0$. Допустим, что $|\Gamma| > 0$, т. е., $\Gamma = (\varphi, \Upsilon)$ для некоторой $\varphi \in G$. (Случай, когда $|\Gamma| = 0$ и, тем самым, $|\Delta| > 0$, рассматривается аналогично.) Тогда к рассматриваемому простому запросу применяется только правило 4. При этом он получает в $\mathcal{R}$ положительный ответ с решением $\mathtt{G} =$ нормальный $\mathcal{C}(F, G, H)$-вывод его характеристической секвенции из $\vec{T}$, если производный простой запрос $\mathtt{ded}(\vec{S}, [], [], \Lambda, \Pi, \Upsilon, \Delta, \mathtt{G})$ сложности $|\Sigma| + |\Omega| + |\Upsilon| + |\Delta| < |\Sigma| + |\Omega| + |\Gamma| + |\Delta|$ получает в $\mathcal{R}$ положительный ответ с решением $\mathtt{G} =$ нормальный $\mathcal{C}(F, G, H)$-вывод его характеристической секвенции из $\vec{T}$. Таким образом, индукция по сложности регулярных запросов завершает анализ случая $|\Gamma| + |\Delta| > 0$ и, тем самым, случая $|\Sigma| + |\Omega| = 0$.

Предположим, что $|\Sigma| + |\Omega| > 0$. Допустим, что $|\Sigma| > 0$, т. е., $\Sigma = (\varphi, \Upsilon)$ для некоторой $\varphi \in F$. (Случай, когда $|\Sigma| = 0$ и, тем самым, $|\Omega| > 0$, рассматривается аналогично.) Тогда к рассматриваемому регулярному запросу применяется только правило 5. При этом он получает в $\mathcal{R}$ отрицательный (положительный) ответ (с решением $\mathtt{G}$ = нормальный $\mathcal{C}(F,G,H)$-вывод его характеристической секвенции из $\vec{T}$), если производный регулярный запрос $\mathtt{ded}(\vec{S},\Upsilon,\Omega,(\varphi,\Lambda),\Pi,\Gamma,\Delta,\mathtt{G})$ сложности $|\Upsilon|+|\Omega|+|\Gamma|+|\Delta| < |\Sigma|+|\Omega|+|\Gamma|+$ $+|\Delta|$ получает в $\mathcal{R}$ отрицательный (положительный) ответ (с решением $\mathtt{G}$ = нормальный $\mathcal{C}(F,G,H)$-вывод его характеристической секвенции из $\vec{T}$) или (и) производный начальный запрос $\mathtt{der}(\vec{S},\mathtt{sq}((\Gamma,\overline{\Lambda}),(\Delta,\overline{\Pi},\varphi)),\mathtt{G})$ мощности $|S| < |T|$ получает отрицательный (положительный) ответ (с решением $\mathtt{G}$ = нормальный $\mathcal{C}(F,G,H)$-вывод его характеристической секвенции из $\vec{S}$). Поскольку $\Theta \vdash \Xi$, $\varphi \in \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}^{(k,l)}(\varnothing)$ и характеристическая секвенция рассматриваемого регулярного запроса $\sqsubseteq$ характеристической секвенции указанного производного, характеристическая секвенция рассматриваемого регулярного запроса принадлежит $\mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}^{(k,l)}(T)$ тогда и только тогда, когда характеристическая секвенция указанного производного регулярного принадлежит $\mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}^{(k,l)}(T)$, а начального — $\mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}^{(k,l)}(S)$. Таким образом, индукция по мощности начальных запросов и сложности регулярных завершает анализ случая $|\Sigma|+|\Omega|>0$ и поэтому случая $T \neq \varnothing$ и, тем самым, доказательство утверждения 1.

Наконец, докажем утверждение 2. Следствие 2a $\Rightarrow$ 2b тривиально, 2b $\Rightarrow$ 2c вытекает из равенств (1) и (2) работы [2], а 2c $\Rightarrow$ 2a — из утверждения 1 и конечности множества всех связок, входящих в конечное множество L-секвенций.

Замечание 1. Теорема 1 содержит теорему 1 работы [1] в качестве частного случая при $F=H=T=\varnothing$ и $G=\Im(\mathrm{Fm}_{L'}(W))$. При $F=G=\Im(\mathrm{Fm}_{L'}(W))$ и $H=\mathrm{Seq}_G^{(k,l)}$ утверждение 2 теоремы 1 дает теорему сильной полноты (аналог следствия 2 работы [2]), а при $F=\bigcap\{E\subseteq \mathrm{Fm}_L \mid T\subseteq \mathrm{Seq}_E^{(k,l)}\}$, $G=\Im(\mathrm{Fm}_{L'}(W))$ и $H=\mathrm{Seq}_G^{(k,l)}$ — теорему о сильном устранении сечения.

1. *Пынько А. П.* Процедуры вывода в секвенциальных исчислениях для конечнозначных логик с определителем равенства // Доп. НАН України. – 2007. – № 3. – С. 45–51.
2. *Пынько А. П.* Секвенциальные исчисления для конечнозначных логик с определителем равенства // Там само. – 2003. – № 8. – С. 69–75.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 14.11.2007