ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9+531.19

В. І. Герасименко, В. О. Штик

Принцип послаблення кореляцій Боголюбова для нескінченної системи пружних куль

(Представлено академіком НАН України А. Г. Загороднім)

For a solution of the initial-value problem of the BBGKY hierarchy for an infinite three-dimensional systems of particles interacting via a hard spheres potential, the Bogolyubov principle of the decay of correlations is proved.

Для виведення кінетичних рівнянь з динаміки багаточастинкових систем М. М. Боголюбов використав властивість розв'язків ієрархії рівнянь ББГКІ [1], відому в літературі [2] як послаблення кореляцій Боголюбова. Ця гіпотеза, наприклад, для двочастинкової функції розподілу полягає в існуванні такої границі:

$$\lim_{|q_1-q_2|\to\infty} F_2(t,x_1,x_2) = F_1(t,x_1)F_1(t,x_2), \tag{1}$$

де $x_i \equiv (q_i,p_i) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i = 1,2$, тобто дві частинки є статистично незалежними, якщо відстань між ними зростає, незалежно від фазових станів інших частинок нескінченночастинкової системи. Дану властивість розв'язку початкової задачі ієрархії рівнянь ББГКІ до останнього часу не було строго доведено насамперед через відсутність строгих результатів про існування розв'язків таких рівнянь. Огляд строгих результатів про існування розв'язків ієрархії рівнянь ББГКІ та методів їх побудови в різних функціональних просторах наведено в монографіях [2, 3].

У даній роботі для розв'язку початкової задачі ієрархії рівнянь ББГКІ нескінченної тривимірної системи частинок, які взаємодіють як пружні кулі, побудованого в роботах [4, 5], доведено властивість послаблення кореляцій Боголюбова (1). Підкреслимо, що природним функціональним простором, в якому можна сформулювати дану проблему математично, є простір послідовностей інтегровних трансляційно-інваріантних за конфігураційними змінними функцій, вперше введений у роботі Д. Я. Петрини [6].

Початкова задача для ланцюжка рівнянь Боголюбова. Розглянемо систему тотожних частинок одиничної маси, які взаємодіють як пружні кулі з діаметром $\sigma > 0$. Кожна частинка системи характеризується фазовими координатами $(q_i,p_i) \equiv x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i \geqslant 1$.

Для конфігурацій такої системи частинок виконуються умови: $|q_i - q_j| \geqslant \sigma$, $i \neq j \geqslant 1$, тобто частинки не можуть займати множину заборонених конфігурацій: $W_n \equiv \{(q_1, \ldots, q_n) \in \in \mathbb{R}^{3n} \big| |q_i - q_j| < \sigma$ хоча б для однієї пари $(i, j)\colon i \neq j \in \{1, \ldots, n\}\}$, $n > 1$. Множина $\mathcal{M}_n^0$ складається із таких фазових точок системи: а) при $t \in (-\infty, \infty)$ у системі відбуваються кратні (потрійні і т. д.) зіткнення частинок; б) за скінченний проміжок часу відбувається нескінченне число зіткнень. Лебегова міра множини $\mathcal{M}_n^0$ дорівнює нулю [5]. Множина $\Gamma_n = = \mathbb{R}^{3n} \times (\mathbb{R}^{3n} \setminus W_n) \setminus \mathcal{M}_n^0$ утворює фазовий простір системи n пружних куль.

Стан такої системи можна описати послідовністю $F = (1, F_1(x_1), \ldots, F_s(x_1, \ldots, x_s), \ldots)$ s-частинкових функцій розподілу $F_s(x_1, \ldots, x_s)$, симетричних відносно перестановок аргументів, які визначені на фазовому просторі Γ_s системи s частинок та дорівнюють нулю на множині W_s. Еволюція станів системи пружних куль визначається початковою задачею для ієрархії рівнянь ББГКІ [5]

$$\frac{d}{dt}F(t) = -\mathcal{L}F(t) + \mathfrak{a}\mathcal{L}^{\mathrm{int}}F(t), \tag{2}$$

$$F(t)\big|_{t=0} = F(0). \tag{3}$$

У рівнянні (2) оператор $\mathcal{L}$ визначено дужкою Пуассона вільних частинок з граничними умовами на ∂W_s [2]:

$$(\mathcal{L}F(t))_s(x_1, \ldots, x_s) = \mathcal{L}_s F_s(t) = \sum_{i=1}^{s} \left\langle p_i, \frac{\partial}{\partial q_i} \right\rangle \bigg|_{\partial W_s} F_s(t, x_1, \ldots, x_s) \tag{4}$$

та оператор $\mathfrak{a}\mathcal{L}^{\mathrm{int}}$ при $t > 0$ визначено виразом

$$(\mathfrak{a}\mathcal{L}^{\mathrm{int}}F(t))_s(x_1, \ldots, x_s) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_+^2} dp_{s+1} d\eta \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle \times$$
$$\times (F_{s+1}(t, x_1, \ldots, q_i, p_i^*, \ldots, x_s, q_i - \sigma\eta, p_{s+1}^*) - F_{s+1}(t, x_1, \ldots, x_s, q_i + \sigma\eta, p_{s+1})), \tag{5}$$

де $\langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle = \sum\limits_{\alpha=1}^{3} \eta^\alpha (p_i^\alpha - p_{s+1}^\alpha)$ — скалярний добуток, $\mathbb{S}_+^2 = \{\eta \in \mathbb{R}^3 \mid |\eta| = 1,\ \langle \eta,\ (p_i - - p_{s+1}) \rangle > 0\}$ та імпульси p_i^*, p_{s+1}^* визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} p_i^* &= p_i - \eta \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle, \\ p_{s+1}^* &= p_{s+1} + \eta \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

Щоб підкреслити структуру генератора ієрархії рівнянь ББГКІ (2), у виразі (5) використано позначення $\mathfrak{a}\mathcal{L}^{\mathrm{int}}$, де оператор $\mathfrak{a}$ (аналог оператора знищення)

$$(\mathfrak{a}f)_s(x_1, \ldots, x_s) = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_{s+1} f_{s+1}(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}), \tag{7}$$

та

$$(\mathcal{L}^{\mathrm{int}}f)_s(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{i<j=1}^{s} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i, j) f_s = \sigma^2 \sum_{i<j=1}^{s} \int\limits_{\mathbb{S}_+^2} d\eta \langle \eta, (p_i - p_j) \rangle \times$$
$$\times (f_s(x_1, \ldots, p_i^*, q_i, \ldots, p_j^*, q_j, \ldots, x_s) \delta(q_i - q_j + \sigma\eta) - f_s(x_1, \ldots, x_s) \delta(q_i - q_j - \sigma\eta)). \tag{8}$$

Тут використано позначення, подібні до (5), δ — дельта-функція Дірака.

У випадку $t < 0$ дія оператора $\mathfrak{a}\mathcal{L}^{\mathrm{int}}$ визначається відповідним виразом [2].

Розглянемо початкові дані (3), що задовольняють умову хаосу ("молекулярного хаосу" [2])

$$(F(0))_s(x_1, \ldots, x_s) = \prod_{i=1}^{s} F_1(0, x_i)\mathcal{X}_{\Gamma_s}, \tag{3'}$$

де $\mathcal{X}_{\Gamma_s}$ — характеристична функція фазового простору системи s пружних куль.

Для початкових даних $F_1(0)$, що є інтегровними функціями, розв'язок задачі Коші (2)–(3) визначається таким розкладом [7]:

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \cdots dx_{s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(t, Y_1, s+1, \ldots, s+n) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{s+n} F_1(0, x_i)\mathcal{X}_{\Gamma_{s+n}}. \tag{9}$$

У розкладі (9) через $(Y_1, s+1, \ldots, s+n)$ позначено множину, яка складається з елементів $1 \bigcup \cdots \bigcup s,\ s+1, \ldots, s+n$, де символ $1 \bigcup \cdots \bigcup s \equiv Y_1$ відображає ту обставину, що множина $(1, \ldots, s) \equiv Y$ є зв'язною частиною (кластером s частинок) розбиття множини $X = (1, \ldots, s, s+1, \ldots, s+n)$ на $n+1$ елемент. Еволюційний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t, Y_1, s+1, \ldots, s+n)$ — кумулянт (семіінваріант) $(n+1)$-го порядку еволюційних операторів $S_n(t)$, $n \geqslant 1$, які визначаються формулою

$$(S(t)f)_n(x_1, \ldots, x_n) \equiv S_n(t, 1, \ldots, n) f_n(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \begin{cases} f_n(\mathtt{X}_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathtt{X}_n(t, x_1, \ldots, x_n)), \\ \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{3n} \times (\mathbb{R}^{3n} \setminus W_n)) \setminus \mathcal{M}_n^0, \\ 0, \qquad (q_1, \ldots, q_n) \in W_n, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_n^0, \end{cases} \tag{10}$$

де $\mathtt{X}_i(t)$ — фазова траєкторія i-ї частинки, яка побудована в [5]. Оператор $\mathcal{L}_n$ з рівняння (2) є генератором групи еволюційних операторів (10). Властивості оператора $S_n(t)$ описано в монографії [2].

Кумулянт $(n+1)$-го порядку еволюційних операторів (10) з розкладу (9) визначається рівністю

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t, Y_1, s+1, \ldots, s+n) = \sum_{\mathtt{P}:\, \{Y_1, X \setminus Y\} = \bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)! \prod_{X_i \subset \mathtt{P}} S_{|X_i|}(-t, X_i), \tag{11}$$

де $\sum\limits_{\mathtt{P}}$ — сума за всіма можливими розбиттями $\mathtt{P}$ множини $\{Y_1, X \setminus Y\} \equiv \{1 \bigcup \cdots \bigcup s, s+1, \ldots, s+n\}$ на $|\mathtt{P}|$ непорожніх підмножин $X_i \in \{Y_1, X \setminus Y\}$, що взаємно не перетинаються. Наприклад,

$$\mathfrak{A}_1(t, Y_1) = S_s(-t, 1, \ldots, s),$$

$$\mathfrak{A}_{1+1}(t, Y_1, s+1) = S_{s+1}(-t, 1, \ldots, s+1) - S_s(-t, 1, \ldots, s)S_1(-t, s+1).$$

Кластерні розклади та s-частинкові кореляційні функції. Стан класичної системи не фіксованого числа тотожних частинок можна описати не лише в термінах послідовності s-частинкових функцій розподілу, що є розв'язками ієрархії рівнянь ББГКІ (2), а й в інший еквівалентний спосіб [8, 9], а саме в термінах так званої послідовності s-частинкових кореляційних функцій $G_s(t)$, які визначаються кластерними розкладами таких функцій (9):

$$F_{|Y|}(t, Y) = \sum_{\mathtt{P}:\, Y = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathtt{P}} G_{|X_i|}(t, X_i), \tag{12}$$

де $Y \equiv (x_1, \ldots, x_s)$, $\sum_{\mathtt{P}}$ — сума за всіма розбиттями $\mathtt{P}$ множини Y на $|\mathtt{P}|$ непорожніх підмножин, що не перетинаються. Наприклад,

$$F_1(t, x_1) = G_1(t, x_1),$$

$$F_2(t, x_1, x_2) = G_2(t, x_1, x_2) + G_1(t, x_1)G_1(t, x_2).$$

Структура такого кластерного розкладу (12) обумовлена тим, що за кореляційними функціями $G_n(t)$ безпосередньо обчислюються такі характеристики системи частинок, як флуктуації [9], тобто середні значення квадратів відхилення спостережуваної величини від її середнього значення та макроскопічні величини, які не є середніми значеннями мікроскопічних спостережуваних [1].

Зауважимо, що так визначена (12) послідовність

$$G(t) = (0, G_1(t, x_1), \ldots, G_s(t, x_1, \ldots, x_s), \ldots)$$

s-частинкових кореляційних функцій $G_s(t, x_1, \ldots, x_s)$, визначених на фазовому просторі $\mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus W_s) \setminus \mathcal{M}_s^0$ системи $s \geqslant 1$, частинок, симетричних відносно перестановок аргументів, задовольняє початкову задачу для ієрархії нелінійних рівнянь ББГКІ [1, 8].

Згідно з означенням (12) та формулою для розв'язку (9) для початкових даних $(3')$, що задовольняють умову хаосу для s-частинкових кореляційних функцій, справедливий такий розклад (розв'язок початкової задачі для ієрархії нелінійних рівнянь ББГКІ):

$$G_s(t, x_1, \ldots, x_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_{s+1} \cdots dx_{s+n} \mathfrak{A}_{s+n}(t, 1, \ldots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} G_1(0, x_i) \mathcal{X}_{\Gamma_{s+n}}. \tag{13}$$

Підкреслимо ту обставину, що в даному розкладі еволюція $(s+n)$-частинкової підсистеми визначається кумулянтом $(s+n)$-го порядку еволюційних операторів (10) на відміну від розкладу (9), у якому еволюція такої підсистеми частинок визначалась кумулянтом $(n+1)$-го порядку.

Зауважимо, що розклад (13) можна отримати на основі розв'язків початкової задачі ланцюжка нелінійних рівнянь Ліувілля [8, 10], використовуючи зображення для s-частинкових функцій розподілу та s-частинкових кореляційних функцій через розв'язки такого ланцюжка.

Аналоги формул Дюамеля. Розглянемо явно дію кумулянтів (11) на початкові дані. Якщо f_n — інтегровна функція, g_n — обмежена функція (функції f_n і g_n симетричні відносно перестановки аргументів та дорівнюють нулю на множині заборонених конфігурацій W_n), то згідно з означенням (10) існує такий функціонал:

$$\left(f_n, \left(S_n(-t,1,\ldots,n) - \prod_{i=1}^{n} S_1(-t,i)\right) g_n\right) \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_1\cdots dx_n f_n(x_1,\ldots,x_n)\left(S_n(-t,1,\ldots,n) - \prod_{i=1}^{n} S_1(-t,i)\right) g_n(x_1,\ldots,x_n). \quad (14)$$

У випадку $n = 2$ функціонал (14) збігається з функціоналом $(f_2, \mathfrak{A}_2(t)g_2)$ для кумулянта другого порядку (11). Для функціонала (14) справедливе таке зображення [3]:

$$\left(f_n, (S_n(-t,1,\ldots,n) - \prod_{i=1}^{n} S_1(-t,i))g_n\right) =$$

$$= \sum_{i<j=1}^{n} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{n-2}} dx_1 \cdots \overset{i}{\vee} \cdots \overset{j}{\vee} \cdots dx_n \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dq_i dp_i \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+} dp_j d\eta \sigma^2 \langle \eta, (p_i - p_j)\rangle \times$$
$$\times (f_n(q_1,p_1,\ldots,q_i,p_i,\ldots,q_i - (p_i - p_j)(t-\tau) + \sigma\eta, p_j,\ldots,q_n,p_n) \times$$
$$\times g_2(q_1 - p_1 t, p_1, \ldots, q_i - p_i^*\tau - p_i(t-\tau), p_i^*, \ldots, q_i - p_j^*\tau - p_i(t-\tau) +$$
$$+ \sigma\eta, p_j^*, \ldots, q_n - p_n t, p_n) -$$
$$- (f_n(q_1,p_1,\ldots,q_i,p_i,\ldots,q_i - (p_i - p_j)(t-\tau) - \sigma\eta, p_j,\ldots,q_n,p_n) \times$$
$$\times g_2(q_1 - p_1 t, p_1, \ldots, q_i - p_i t, p_i, \ldots, q_i - p_j\tau - p_i(t-\tau) -$$
$$- \sigma\eta, p_j, \ldots, q_n - p_n t, p_n)), \quad (15)$$

де імпульси i-ї та j-ї частинки p_i^*, p_j^* визначаються виразами (6).

Згідно з означенням еволюційних операторів (10) та оператора (8), рівність (15) можна подати у формі аналога формули Дюамеля [11]

$$\left(\left(S_n(-t,1,\ldots,n) - \prod_{i=1}^{n} S_1(-t,i)\right) g_n\right)(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau \prod_{i=1}^{n} S_1(-t+\tau,i) \sum_{j_1<j_2=1}^{n} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2) S_n(-\tau,1,\ldots,n) g_n(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau S_n(-t+\tau,1,\ldots,n) \sum_{j_1<j_2=1}^{n} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2) \prod_{i=1}^{n} S_1(-\tau,i) g_n(x_1,\ldots,x_n). \quad (16)$$

У випадку $n = 2$ формула (16) визначає дію кумулянта другого порядку на довільну обмежену функцію.

Розглянемо функціонал $(f_n, \mathfrak{A}_n(t)g_n)$, визначений формулою (14), для кумулянта n-го порядку еволюційних операторів (10). Згідно з рівністю (16) кумулянт n-го порядку (11) виражається через кумулянти нижчого порядку таким виразом:

$$\mathfrak{A}_n(t,1,\ldots,n) = \int\limits_0^t d\tau \prod_{k=1}^n S_1(-t+\tau,k) \sum_{i<j=1}^n \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i,j)\mathfrak{A}_{n-1}(t,i\bigcup j,1,\ldots,\overset{i}{\vee},\ldots,\overset{j}{\vee},\ldots,n),$$

де використано позначення формули (9), а оператори $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i,j)$ і $S(t)$ визначаються формулами (8) та (10) відповідно.

Використовуючи останню рівність та значення функціонала для кумулянта другого порядку (15), внаслідок симетрії функцій f_n та g_n і справедливості теореми Ліувілля [2], значення функціонала $(f_n, \mathfrak{A}_n(t)g_n)$ визначається таким виразом:

$$\begin{aligned}(f_n, \mathfrak{A}_n(t)g_n) &= (n+1)! \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_1\cdots dx_n f_n(x_1,\ldots,x_n) \int\limits_0^t dt_1 \cdots \int\limits_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} S_1(-t,1)\times\\ &\times S_1(-t,2)S_1(t_1,1)S_1(t_1,2)\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(1,2)S_2(-t_1,1,2)S_2(t_2,1,2)S_1(t_2,3)\times\\ &\times \sum_{i_1=1}^{2}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i_1,3)S_3(-t_2,1,2,3)\cdots\times S_{n-1}(t_{n-1},1,\ldots,n-1)S_1(t_{n-1},n)\times\cdots\times\\ &\times \sum_{i_{n-2}=1}^{n-1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i_{n-2},n)S_{n-1}(-t_{n-1},1,\ldots,n)g_n(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned} \qquad (17)$$

Властивості двочастинкової кореляційної функції. Дослідимо властивості функцій (13) для початкових даних, які належать простору інтегровних трансляційно-інваріантних за конфігураційними змінними функцій [6, 12].

Згідно з формулою (13) двочастинкова кореляційна функція $G_2(t)$ для системи пружних куль визначається розкладом

$$G_2(t,x_1,x_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_3\cdots dx_{2+n}\mathfrak{A}_{2+n}(t,1,\ldots,2+n)\prod_{i=1}^{2+n} G_1(0,x_i)\mathcal{X}_{\Gamma_{n+2}}, \qquad (18)$$

де $\mathfrak{A}_{2+n}(t)$ — кумулянт $(2+n)$-го порядку еволюційних операторів (10).

Розглянемо початкові дані $G_1(0)$, які є трансляційно-інваріантними за конфігураційними змінними функціями [12], що задовольняють умову

$$|G_1(0,q,p)| \leqslant Ce^{-\beta p^2/2}, \qquad (19)$$

де $\beta > 0$ — параметр, $C < \infty$ — константа.

Зауважимо, що для початкових даних (19) кожен член розкладу (18) містить розбіжні інтеграли за конфігураційними змінними. Структура кумулянтів (11) еволюційних операторів (10) дозволяє надати сенс кожному члену ряду (18) для таких початкових даних. Дійсно, враховуючи формулу (17) для кумулянта $(2+n)$-го порядку системи пружних куль, аналогічно до побудови оцінок [2, 5] для ряду ітерацій ієрархії рівнянь ББГКІ (2), має місце така оцінка:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} d(q_1-q_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dp_1 dp_2 |G_2(t,x_1,x_2)| \leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{n+1},$$

де $t_0 \equiv (2^9\pi^{3/2}C\sigma^2 l(\beta))^{-1}$, $l(\beta) = \max(\beta^{-3/2},\beta^{-1/2})$.

Таким чином, справедливе твердження

Теорема 1. *Для початкових даних, що задовольняють умову* (19)*, кожен член ряду* (18) *для двочастинкової кореляційної функції існує і цей ряд є збіжним за нормою простору інтегровних трансляційно-інваріантних функцій при* $t \in (-t_0, +t_0)$*, де* $t_0 \equiv (2^9\pi^{3/2}C\sigma^2 l(\beta))^{-1}$ *та* $l(\beta) = \max(\beta^{-3/2},\beta^{-1/2})$.

Аналогічно доводиться збіжність за нормою простору інтегровних трансляційно-інваріантних функцій [6, 12] рядів, якими зображуються s-частинкові кореляційні функції (13).

Твердження теореми інтерпретується як властивість спадання кореляцій, що виникають у процесі еволюції системи і доводить принцип послаблення кореляцій Боголюбова [1] для розв'язків початкової задачі ієрархії рівнянь ББГКІ (2)–(3) нескінченної системи пружних куль у випадку некорельованих початкових даних.

Робота підтримана Українсько-Австрійським проектом № M/124 (UA 04/2007) (д-р фіз.-мат. наук В. І. Герасименко, канд. фіз.-мат. наук В. О. Штик) та Цільовою програмою ВФА НАН України (канд. фіз.-мат. наук В. О. Штик).

1. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. – Москва: ОГИЗ, 1946. – 119 с.
2. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p.
3. *Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I., Malyshev P. V.* Mathematical foundations of classical statistical mechanics. Continuous systems. – 2nd ed. – London; New York: Taylor and Francis, 2002. – 352 p.
4. *Герасименко В. И., Петрина Д. Я.* Термодинамический предел неравновесных состояний трехмерной системы упругих шаров // Теорет. и мат. физика. – 1985. – **64**, № 1. – С. 130–149.
5. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Математические проблемы статистической механики системы упругих шаров // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 3. – С. 135–182.
6. *Петрина Д. Я.* О гамильтонианах квантовой статистики и о модельном гамильтониане теории сверхпроводимости // Теорет. и мат. физика. – 1970. – **4**. – С. 394.
7. *Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V., Stashenko M. O.* On the structure of expansions for the BBGKY Hierarchy Solutions // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**, No 42. – P. 9861–9872.
8. *Green M. S.* Boltzmann equation from the statistical mechanical point of view // J. Chem. Phys. – 1956. – **25**, No 5. – P. 836–855.
9. *Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.)* Введение в квантовую статистическую механику. – Москва: Наука, 1984. – 384 с.
10. *Штик В. О.* Про розв'язки ланцюжка нелінійних рівнянь Ліувілля // Доп. НАН України. – 2006. – № 7. – С. 31–37.
11. *Banasiak J., Arlotti L.* Perturbations of positive semigroups with applications. – Berlin: Springer, 2006. – 438 p.
12. *Petrina D. Ya.* Mathematical foundations of quantum statistical mechanics. – Amsterdam: Kluwer, 1995. – 624 p.

Інститут математики НАН України, Київ
Інститут теоретичної фізики
ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ

Надійшло до редакції 07.08.2007