УДК 537.226.86

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

Про структуру рівнянь електропружності

A new system of linear hyperbolic-type equations of electroelasticity is offered.

Для дослідження загальних властивостей лінійних рівнянь в частинних похідних важливе значення має їх класифікація [3, 4]. Це питання для систем рівнянь не завжди просто розв'язується. Якщо система рівнянь коливань механічного деформування твердого тіла, як і система рівнянь Максвелла для речовини, є системою гіперболічного типу, то система зв'язаних електромеханічних коливань п'єзоелектричних тіл [2, 6] вироджується і не належить до гіперболічного типу. Аналізу цього питання присвячена дана робота.

Загальноприйнята система рівнянь електропружності складається [2, 6, 7 та ін.] з механічних рівнянь коливань суцільного середовища

$$\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{k2}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{k3}}{\partial x_3}, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

і квазістатичного наближення рівнянь Максвелла для речовини відносно компонент електричного поля

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = 0, \qquad \nabla\times\mathbf{E} = 0. \tag{2}$$

Для поляризованої вздовж осі ox_3 п'єзоелектричної кераміки (п'єзокераміки) і п'єзоелектриків гексагональної системи класу $6mm$ з віссю симетрії шостого порядку ox_3 рівняння (1), (2) замикаються матеріальними залежностями ($2c_{66} = c_{11} - c_{12}$)

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - e_{13}E_3,\\
&\sigma_{22} = c_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - e_{13}E_3,\\
&\sigma_{33} = c_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{31}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - e_{33}E_3,\\
&\sigma_{23} = c_{44}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) - e_{51}E_2, \qquad \sigma_{31} = c_{44}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) - e_{51}E_1,\\
&\sigma_{12} = c_{66}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),\\
&D_1 = \varepsilon_{11}E_1 + e_{15}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right), \qquad D_2 = \varepsilon_{11}E_2 + e_{15}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right),\\
&D_3 = \varepsilon_{33}E_3 + e_{31}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + e_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},
\end{aligned} \tag{3}$$

в яких враховані формули Коші

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = 2K_{ik} \tag{4}$$

для деформацій.

Звичайним чином система (1)–(3) зводиться [2, 5, 6] до чотирьох рівнянь типу Ламе

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = L_k(u_1, u_2, u_3, \varphi), \qquad 0 = L_4(u_1, u_2, u_3, \varphi), \qquad k = 1, 2, 3, \tag{5}$$

відносно компонент вектора механічних переміщень $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$ і електричного потенціалу $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$, який вводиться градієнтним розв'язком $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ другого з рівнянь (2).

В статичних задачах електропружності при незалежних від часу механічних переміщеннях і напруженнях та електричному полі система (5) набуває вигляду

$$L_k(u_1, u_2, u_3, \varphi) = 0, \qquad L_4(u_1, u_2, u_3, \varphi) = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{6}$$

і буде системою еліптичного типу.

В динамічних задачах електропружності система (5) трактується як гіперболо-еліптична система, хоча математичний аналіз типу системи (5) відсутній. Такий висновок грунтується на тому, що відповідні (5) системи незв'язаних рівнянь (при $e_{ij} = 0$) теорії пружності

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = L_k(u_1, u_2, u_3, 0), \qquad k = 1, 2, 3, \tag{7}$$

і електростатики

$$0 = L_4(0, 0, 0, \varphi) \tag{8}$$

будуть відповідно рівняннями гіперболічного і еліптичного типу [4].

В динамічних задачах бажано мати справу з гіперболічною системою рівнянь електропружності.

Для висвітлення цього питання звернемося до повної системи рівнянь Максвелла [1, 2, 6]

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_{el}, \\ &\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Введемо [1, 4] скалярний $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ і векторний $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, t)$ потенціали електромагнітного поля формулами

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{10}$$

Тоді третє і четверте рівняння системи (9) будуть виконуватися тотожно, а для перетворення перших двох рівнянь треба скористатися матеріальними залежностями.

В електродинаміці однорідних ізотропних середовищ приймається [1]

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathrm{E}, \tag{11}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \tag{12}$$

Шляхом підстановки (11) і (10) в перші два рівняння (9) останні зводяться [1, 4] до вигляду

$$
\begin{aligned}
&\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \mathbf{i} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A}\right),\\
&\Delta \varphi + \operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_{el}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

При цьому використовується операторна залежність $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}$. Електродинамічна стала $c^{-2} = \varepsilon\mu$. І, нарешті, користуючись калібровкою Лоренца

$$
\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0,
\tag{14}
$$

одержуємо незалежні хвильові рівняння

$$
\begin{aligned}
&\Delta \varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon}\rho_{el},\\
&\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \mathbf{i}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

для електромагнітних потенціалів.

В електропружності матеріальні залежності (11) значно ускладнюються і для матеріалів гексагональної системи класу $6mm$ та поляризованої вздовж осі ox_3 п'єзоелектричної кераміки (п'єзокераміки) набувають вигляду (3). Основне ускладнення матеріальних залежностей (11), (12) зумовлено зв'язністю індукції $\mathbf{D}$ і напруженості $\mathbf{E}$ електричного поля з механічними напруженнями σ_{ik} та деформаціями e_{ik} твердого тіла. Якщо залежність (12) між індукцією $\mathbf{B}$ і напруженістю $\mathbf{H}$ магнітного поля залишається, то при відсутності електричних струмів $\mathbf{i}$ перше рівняння системи (9) зводиться до вигляду

$$
\begin{aligned}
&\Delta A_1 - \mu\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \mu\varepsilon_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \mu e_{51}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right),\\
&\Delta A_2 - \mu\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \mu\varepsilon_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \mu e_{51}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right),\\
&\Delta A_3 - \mu\varepsilon_{33}\frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \mu\varepsilon_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \mu e_{31}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) - \mu e_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\partial x_3}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Перетворення другого рівняння системи (9) при відсутності електричних зарядів ρ_{el} дає

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{33}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + \varepsilon_{11}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t\partial x_1} + \varepsilon_{11}\frac{\partial^2 A_2}{\partial t\partial x_2} + \varepsilon_{33}\frac{\partial^2 A_3}{\partial t\partial x_3} - \\
&\quad - e_{51}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) - e_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - (e_{51} + e_{31})\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3}\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Для спрощення рівнянь (16), (17) зробимо два припущення:

перше припущення

$$\varepsilon_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\varepsilon_{\text{ср}}\left(1+\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{\text{ср}}}{\varepsilon_{\text{ср}}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\approx\varepsilon_{\text{ср}}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$
$$\varepsilon_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\varepsilon_{\text{ср}}\left(1+\frac{\varepsilon_{33}-\varepsilon_{\text{ср}}}{\varepsilon_{\text{ср}}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\approx\varepsilon_{\text{ср}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{18}$$

друге припущення

$$\varepsilon_{11}\frac{\partial A_1}{\partial t}=\varepsilon_{\text{ср}}\left(1+\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{\text{ср}}}{\varepsilon_{\text{ср}}}\right)\frac{\partial A_1}{\partial t}\approx\varepsilon_{\text{ср}}\frac{\partial A_1}{\partial t},$$
$$\varepsilon_{11}\frac{\partial A_2}{\partial t}=\varepsilon_{\text{ср}}\left(1+\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{\text{ср}}}{\varepsilon_{\text{ср}}}\right)\frac{\partial A_2}{\partial t}\approx\varepsilon_{\text{ср}}\frac{\partial A_2}{\partial t}, \tag{19}$$
$$\varepsilon_{33}\frac{\partial A_3}{\partial t}=\varepsilon_{\text{ср}}\left(1+\frac{\varepsilon_{33}-\varepsilon_{\text{ср}}}{\varepsilon_{\text{ср}}}\right)\frac{\partial A_3}{\partial t}\approx\varepsilon_{\text{ср}}\frac{\partial A_3}{\partial t},$$

в яких $2\varepsilon_{\text{ср}}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33}$. Умова $1+(\varepsilon_{ii}-\varepsilon_{cp})/\varepsilon_{cp}\approx 1$ для деяких п'єзоелектриків виконується точно або наближено [7].

Перше припущення дає можливість ввести наближену калібровку Лоренца у формі

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\mu\varepsilon_{\text{ср}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{20}$$

і спростити рівняння (16) до вигляду

$$\mu\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2}=\Delta A_1+\mu e_{51}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right),$$
$$\mu\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2}=\Delta A_2+\mu e_{51}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right), \tag{21}$$
$$\mu\varepsilon_{33}\frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2}=\Delta A_3+\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(e_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+e_{31}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+e_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right).$$

Внаслідок другого припущення і калібровки (20) рівнянню (17) можна надати вигляду

$$\mu\varepsilon_{\text{ср}}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\varepsilon_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\varepsilon_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\varepsilon_{33}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}-$$
$$-(e_{51}+e_{31})\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3}\right)-e_{51}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right)-e_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}. \tag{22}$$

Якщо тепер знехтувати магнітним полем і впливом на нього механічних деформацій, тобто рівняннями (21), то замість системи рівнянь електропружності (5)

$$\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}=L_k(u_1,u_2,u_3,\varphi),\qquad k=1,2,3,$$
$$0=L_4(u_1,u_2,u_3,\varphi)\equiv(e_{51}+e_{31})\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}\right)+e_{51}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right)+$$
$$+e_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}-\varepsilon_{11}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)-\varepsilon_{33}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

одержимо, як це випливає з (22), систему рівнянь електропружності,

$$\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = L_k(u_1, u_2, u_3, \varphi), \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$\mu\varepsilon_{\text{ср}}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \varepsilon_{11}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right) + \varepsilon_{33}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} - (e_{51} + e_{31})\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3}\right) - \tag{23}$$

$$- e_{51}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) - e_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2},$$

яка є системою гіперболічного типу. Очевидно, що в матеріальних залежностях (3) треба приймати $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.

1. *Кузьмичев В. Е.* Законы и формулы физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 864 с.
2. *Механика* связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
3. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – Москва: Физматгиз, 1961. – 400 с.
4. *Положій Г. М.* Рівняння математичної фізики. – Київ: Рад. шк., 1959. – 480 с.
5. *Шульга Н. А.* Распространение связанных волн в периодически-неоднородных средах при взаимодействии с электромагнитным полем // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 10. – С. 38–68.
6. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезокерамических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
7. *Шульга М. О., Карлаш В. Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2007. – 186 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 08.10.2007