УДК 531.36

В. И. Слынько

Линейные матричные неравенства и устойчивость движения импульсных систем

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Мартынюком)

The article presents some results allowing one to reduce the problem of stability of a linear system of differential equations with pulse action to that of compatibility of a system of linear matrix inequalities.

Метод линейных матричных неравенств (LMI-метод) является достаточно разработанным методом исследования в теории устойчивости и управления линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1] и библиографию там). Преимущество этого метода состоит также в том, что он численно реализован в пакете прикладных программ MATLAB.

В настоящей работе приведены некоторые результаты, позволяющие свести задачу об устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием к вопросу о совместности некоторой системы линейных матричных неравенств.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [2]

$$\begin{aligned} &\dot z(t) = Az(t), \qquad z(t_0) = z_0, \qquad t \neq \tau_k,\\ &z(t^+) = B_k z(t), \qquad t = \tau_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, A, B_k — постоянные матрицы, причем $B_{k+2} = B_k$.

Относительно моментов импульсного воздействия предположим, что они удовлетворяют двусторонней оценке

$$0 < \theta_1 \leqslant \tau_{k+1} - \tau_k \leqslant \theta_2 < \infty.$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости системы (1). На множестве $\mathcal{E}$-симметричных $n \times \times n$-матриц определим линейные операторы

$$\mathbb{F}X = AX + XA^T, \qquad \mathbb{W}_2 X = B_2 X B_2^T, \qquad \mathbb{W}_1 X = B_1 X B_1^T, \qquad \mathbb{G}X = (\operatorname{tr} X)I$$

и константу позитивности γ оператора $\mathbb{F}$, т. е. постоянную $\gamma > 0$ такую, что оператор $\mathbb{F} + + \gamma\mathbb{G}$ является позитивным относительно конуса $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ положительно полуопределенных симметричных матриц.

Определим обобщенный оператор монодромии системы (1) в виде

$$\overline{\Psi} = \mathbb{W}_2 e^{\mathbb{F}\theta_2 + \gamma(\theta_2 - \theta_1)\mathbb{G}} \mathbb{W}_1 e^{\mathbb{F}\theta_2 + \gamma(\theta_2 - \theta_1)\mathbb{G}}.$$

Теорема 1. *Предположим, что линейная система* (1) *такова, что существует положительно-определенная матрица* X *такая, что выполняется неравенство (в смысле конуса положительно-полуопределенных матриц)*

$$\overline{\Psi} X < X. \tag{2}$$

Тогда система (1) *асимптотически устойчива по Ляпунову.*

Отметим, что в случае $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ условия теоремы 1 являются также необходимыми и совпадают с известными условиями устойчивости линейных периодических импульсных систем [2].

Доказательство основано на концепции отображений, сохраняющих устойчивость, и теоремах метода сравнения [3].

Из этих условий можно вывести некоторые достаточные условия асимптотической устойчивости системы (1) на основе метода линейных матричных неравенств (LMI). Пусть p — нечетное число.

Теорема 2. *Предположим, что линейная система уравнений* (1) *такова, что система линейных матричных неравенств*

$$\begin{gathered}\left(\mathbb{W}_2\mathbb{W}_1 - I + \sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathbb{W}_2(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})^k\mathbb{W}_1+(-1)^{k+1}(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})^k}{k!}\right)X < 0,\\ (\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})^pX \leqslant 0, \qquad (\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})^p\mathbb{W}_1X \leqslant 0\end{gathered} \tag{3}$$

совместна в классе положительно-определенных матриц.

Тогда линейная система (1) *асимптотически устойчива.*

Доказательство. Определим матрицу $\widetilde{X} = e^{-(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})}X$ и докажем, что эта матрица является положительно-определенной. В силу положительности оператора $e^{-\mathbb{F}\theta_2}$ и формулы (формула (0.10) в работе [4])

$$e^{A+B} = \lim_{N\to\infty}\left[e^{A/N}e^{B/N}\right]^N$$

достаточно показать положительную определенность матрицы $e^{-\frac{\gamma(\theta_2-\theta_1)}{N}\mathbb{G}}X$ при достаточно больших N. Непосредственные вычисления приводят к формуле

$$e^{-\frac{\gamma(\theta_2-\theta_1)}{N}\mathbb{G}}X = X + \frac{\operatorname{tr}X}{n}\big(e^{\gamma n(\theta_1-\theta_2)/N}-1\big)I,$$

из которой легко выводится положительная определенность матрицы $e^{-\frac{\gamma(\theta_2-\theta_1)}{N}\mathbb{G}}X$ при достаточно больших N.

Для каждой матрицы $\Phi \in \mathcal{K}^* = \mathcal{K}$ рассмотрим функцию

$$\phi(h) = \mathbb{W}_2e^{(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})h}\mathbb{W}_1X - e^{-(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})h}X.$$

Раскладывая эту функцию в ряд Тейлора по степеням h, получим

$$\begin{aligned}\phi_\Phi(1) = \operatorname{tr}\Bigg(\Phi\Bigg(&\mathbb{W}_2\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})^kh^k}{k!}\mathbb{W}_1X - \\ &-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})^kh^k}{k!}X\Bigg)\Bigg) + \\ &+\operatorname{tr}\Bigg(\Phi\Bigg(\frac{1}{p!}(\mathbb{W}_2e^{(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})\zeta}(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})^p\mathbb{W}_1X +\end{aligned}$$

$$+(-1)^{p+1}e^{-(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})\zeta}(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})^pX\Bigg)\Bigg), \quad \zeta\in[0,h],$$

и, полагая $h=1$, приходим к неравенству

$$\mathbb{W}_2e^{(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})}\mathbb{W}_1X<e^{-(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})}X.$$

С учетом позитивности оператора $e^{(\mathbb{F}\theta_2+\gamma(\theta_2-\theta_1)\mathbb{G})}$ приходим к неравенству (2) для матрицы $\widetilde{X}$, что завершает доказательство теоремы 2.

Неравенства (3) при фиксированном значении p приводят к системе двух линейных матричных неравенств, которые будем называть достаточными условиями асимптотической устойчивости системы (1) p-го рода. Приведем пример условий третьего рода для системы (1).

Следствие 1. *Предположим, что система линейных уравнений* (1) *такова, что система линейных матричных неравенств*

$$\begin{aligned}
&B_2B_1XB_1^TB_2^T-X+\theta_2(AX+XA^T+B_2AB_1XB_1^TB_2^T+B_2B_1XB_1^TA^TB_2^T)+\\
&\quad+\gamma(\theta_2-\theta_1)(\mathrm{tr}(B_1XB_1^T)B_2B_2^T+\mathrm{tr}X)I)+\frac{\theta_2^2}{2}(B_2A^2B_1XB_1^TB_2^T+\\
&\quad+2B_2AB_1XB_1^TAB_2^T+B_2B_1X(B_2A^2B_1)^T-A^2X-2AXA^T-X(A^2)^T)+\\
&\quad+\frac{\gamma^2(\theta_2-\theta_1)^2n}{2}(\mathrm{tr}(B_1XB_1^T)B_2B_2^T-(\mathrm{tr}X)I)+\\
&\quad+\frac{\gamma(\theta_2-\theta_1)\theta_2}{2}(B_2(A+A^T)B_2^T\mathrm{tr}(B_1XB_1^T)+\\
&\quad+2\mathrm{tr}(AB_1XB_1^T)B_2B_2^T-(A+A^T)\mathrm{tr}X-2\mathrm{tr}(AX)I)<0,\\
&\theta_2^3(A^3X+3A^2XA^T+3AX(A^T)^2+X(A^T)^3)+\\
&\quad+\gamma\theta_2^2(\theta_2-\theta_1)(2\mathrm{tr}(A^2X+AXA^T)I+\mathrm{tr}X(A^2+(A^T)^2+AA^T))+\\
&\quad+\gamma^2\theta_2(\theta_2-\theta_1)^2(n(A+A^T)\mathrm{tr}X+2n\mathrm{tr}(AX)I+\\
&\quad+2(\mathrm{tr}A\mathrm{tr}X)I)+\gamma^3(\theta_2-\theta_1)^3n^2(\mathrm{tr}X)I<0,\\
&\theta_2^3(A^3B_1XB_1^T+3A^2B_1XB_1^TA^T+3AB_1XB_1^T(A^T)^2+B_1XB_1^T(A^T)^3)+\\
&\quad+\gamma\theta_2^2(\theta_2-\theta_1)(2\mathrm{tr}(A^2B_1XB_1^T+AB_1XB_1^TA^T)I+\\
&\quad+\mathrm{tr}(B_1XB_1^T)(A^2+(A^T)^2+AA^T))+\gamma^2\theta_2(\theta_2-\theta_1)^2(n(A+A^T)\mathrm{tr}(B_1XB_1^T)+\\
&\quad+2n\mathrm{tr}(AB_1XB_1^T)I+2(\mathrm{tr}A\mathrm{tr}(B_1XB_1^T))I)+\gamma^3(\theta_2-\theta_1)^3n^2(\mathrm{tr}(B_1XB_1^T))I<0
\end{aligned}\tag{4}$$

совместна в классе положительно-определенных матриц.

Тогда система (1) *асимптотически устойчива.*

Далее рассмотрим частный случай $\theta_1=\theta_2=\theta$. В качестве примера приведем условия 3-го рода.

Следствие 2. *Предположим, что система уравнений* (1) *такова, что* $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, *и система матричных линейных неравенств*

$$\begin{aligned}
&(AX + XA^T + B_2AB_1XB_1^TB_2^T + B_2B_1XB_1^TA^TB_2^T)\theta + \\
&\quad + (B_2A^2B_1XB_1^TB_2^T + 2B_2AB_1XB_1^TA^TB_2^T + B_2B_1XB_1^T(A^T)^2B_2^T - \\
&\qquad - A^2X - 2AXA^T - X(A^T)^2)\frac{\theta^2}{2} + B_2B_1XB_1^TB_2^T - X < 0, \qquad (5)\\
&A^3X + 3A^2XA^T + 3AX(A^T)^2 + X(A^T)^3 < 0, \\
&A^3B_1XB_1^T + 3A^2B_1XB_1^TA^T + 3AB_1XB_1^T(A^T)^2 + B_1XB_1^T(A^T)^3 < 0
\end{aligned}$$

совместна в классе положительно-определенных матриц.

Тогда линейная система (1) *асимптотически устойчива.*

Пример. Рассмотрим линейную систему с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad t \neq \tau_k, \qquad x(t^+) = B_kx(t), \qquad t = \tau_k, \qquad x(0) = x_0, \qquad (6)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -1{,}5 & 2 \\ 1{,}8 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -1{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & -0{,}95 \end{pmatrix}.$$

Если $\tau_{k+1} - \tau_k = \theta = 0{,}01$, то применение стандартного пакета MATLAB приводит к выводу о совместности системы линейных матричных неравенств (5) с матрицей

$$X = \begin{pmatrix} 206{,}25 & 70{,}79 \\ 70{,}79 & 195{,}73 \end{pmatrix}.$$

Используя следствие 2, приходим к выводу об асимптотической устойчивости системы (8).

1. *Siljak D. D., Stipanovic D. M.* Robust stabilization of nonlinear systems: The LMI approach // Mathemat. Probl. in Eng. – 2000. – **6**. – P. 461–493.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк. – 1987. – 286 с.
3. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Об устойчивости линейных импульсных систем относительно конуса // Доп. НАН України, – 2004. – № 4. – С. 42–48.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1970. – 536 с.
5. *Lobas L. G., Koval'chuk V. V., Bambura O. V.* Evolution of the equilibrium states of an inverted pendulum // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No 4. – С. 121–129.
6. *Lobas L. G., Koval'chuk V. V., Bambura O. V.* Evolution of the equilibrium states of an inverted pendulum // Ibid. – No 3. – P. 344–351. – **131**.
7. *Мартынюк А. А., Никитина Н. В.* Нахождение предельного значения энергии двойного математического маятника // Прикл. мех. – 2007. – **43**, № 9. – С. 106–114.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 23.11.2007