УДК 681.5.015: 378

САВІНОВ О.М., *кандидат технічних наук,*
Інститут післядипломного навчання
Національного авіаційного університету

ОСОБЛИВОСТІ ПРАКТИЧНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЛОГІСТИЧНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ РОСТУ

Анотація. *Визначені основні проблеми створення моделей процесів людської діяльності. Обґрунтована доцільність використання та уточнені окремі параметри логістичних залежностей, зокрема постійної ресурсу. Уточнена послідовність дій експерта щодо визначення параметрів логістичних залежностей.*

Аннотация. *Определены основные проблемы создания моделей процессов человеческой деятельности. Обоснована целесообразность использования и уточнены отдельные параметры логистических зависимостей, в частности, постоянной ресурса. Уточнена последовательность действий эксперта при определении параметров логистических зависимостей.*

Summary. *The main problems of creation the people activity models are defined. It's proved using reasonability and defined some parameters of logistic dependence, in particular the resource constant. The sequence of expert actions when determining the logistic dependence parameters is specified.*

***Ключові слова**: моделювання, прогноз, логістична залежність, параметрична ідентифікація.*

Наслідки більшості управлінських рішень стосовно процесів людської діяльності, зокрема в правовій галузі, не є очевидними. Рішення обирають виходячи з попереднього досвіду або шляхом перевірки можливих альтернатив за допомогою прогнозного моделювання. Основними вимогами до процедури перевірки рішень є оперативність та якість. На жаль, критерії якості та оперативності є суперечними, оскільки найкраще рішення необхідно знайти за мінімум часу. Для перетворення двокритеріальної задачі до однокритеріальної можна один з критеріїв закріпити у вигляді обмеження (мінімально або максимально припустимої величини), а інший оптимізувати (або побудувати множину Парето – оптимальних рішень [1]). Оптимізація потребує математичної формалізації процесів, стосовно яких знаходиться рішення. Завдяки сучасним обчислювальним засобам, математична модель дозволяє оперативно перебрати велику кількість альтернативних рішень або знайти оптимальне (субоптимальне) рішення іншими методами.

На жаль, більшість гуманітарних процесів людської діяльності, зокрема в правовій галузі, важко піддаються математичному описанню. Тому в процесі діяльності виділяють найбільш важливі (стосовно постановки задачі) властивості, спрощують модель (роблять її грубою) і після цього застосовують для пошуку найкращих рішень або для прогнозування наслідків прийнятих управлінських рішень.

Іншим важливим заходом є забезпечення моделі вхідними даними. Відомі приклади коли теоретично досконалу модель не можливо використати на практиці тому, що її неможливо було забезпечити вхідними даними, наприклад, така ситуація склалась при створенні двох програмних систем управління оборонними ресурсами [2].

Модель управління оборонними ресурсами (Defence Resource Management Model) не мала організаційних рішень щодо забезпечення вхідними даними. Програмна система “Ресурс” мала спеціальний організаційних підрозділ для забезпечення вхідними даними. Результат?.. Друга система ефективно працює. Перша залишилась в історії. Отже, питання скорочення часу, підвищення якості ідентифікації параметрів моделей та забезпечення моделей вхідними даними є актуальними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Особливий інтерес викликають моделі процесів розвитку (росту), які дозволяють зв’язати ефект діяльності та ресурси, які витрачаються на його створення. Ресурси можуть бути матеріальними і нематеріальними (гроші, матеріали, обладнання, люди, час, ефекти підпорядкованих структур тощо). Вихідний ефект може бути корисним або шкідливим залежно від конкретного процесу.

Побудова моделі пов’язана, з одного боку, з намаганням врахувати якомога більше особливостей процесу (що веде до її ускладнення). З іншого боку, модель повинна бути простою, оскільки це спрощує її наповнення вхідними даними, вчасне корегування параметрів відповідно до зміни ситуації та забезпечує наочність результатів для поточного контролю відповідності результатів моделювання фізичному змісту процесу. При створенні моделей складних систем перевагу віддають грубим моделям (лінійним, експоненціальним, логістичним).

Лінійні моделі зберігають адекватність лише в околиці точки лінеаризації – тому їх використовують для приблизних рішень або для достатньо простих процесів. Експоненціальні моделі використовують для окремих етапів життєвого циклу, наприклад, для етапу зростання [3] або етапу насичення. Логістичні моделі дозволяють моделювати повний життєвий цикл розвитку, оскільки містять фрагменти експоненціальних та лінійних моделей, а тому є більш універсальними [1]. Адекватність логістичних моделей підтверджують приклади їх використання при моделюванні біологічних [4], економічних [5], технічних [6] та інших процесів. Незважаючи на різну фізичну природу, всі ці процеси мають однакові етапи:

1. Підготовка до зростання. Ресурси витрачаються, але ефект майже не збільшується.
2. Зростання. Кожна витрачена одиниця ресурсу майже пропорційно перетворюється в ефект.
3. Насичення. Можливості поточного способу розвитку вичерпані, зростання уповільнюється та входить до зони насичення. Для подальшого росту необхідна зміна або суттєва модифікація способу розвитку (зміна технологій).

Різні фізичні об’єкти відрізняються фізичним змістом та масштабом явищ, але якісна картина залишається аналогічною. Наприклад, в податковій сфері саме так веде себе залежність кількості неплатників податку від рівня податків [7]. При малих ставках податку неплатників практично немає, при ставках більше 15-20 % їх кількість стрімко зростає і податки більше 50-70 % ніхто практично не сплачує (в тому числі з причини руйнації бізнесу сумлінних платників). Аналогічно від ставки податку залежить частка тіньового капіталу.

Способи завдання параметрів логістичних залежностей розглянуті в [6], але лише стосовно обрання представлення логістичної залежності в інтегральній формі. Більший практичний інтерес при підготовці вхідних даних для чисельного моделювання представляє взаємозв’язок параметрів логістичних залежностей завданих в диференціальній та інтегральній формах, оскільки при покроковому інтегруванні використовується диференціальна форма, а при визначенні параметрів залежності – інтегральна, при якій параметри максимально наповнені конкретним фізичним змістом для спрощення роботи експертів.

Метою статті є пошук шляхів спрощення процесу ідентифікації параметрів логістичної залежності розвитку без втрати якості моделювання.

Для досягнення мети необхідно:

1. Уточнити способи представлення логістичних залежностей в різних формах (диференціальній та інтегральній).

2. Виявити серед них найбільш корисні за критерієм адекватності моделі динамічному процесу розвитку та за критерієм простоти ідентифікації параметрів моделі.

3. Якщо цим критеріям відповідатимуть різні форми залежностей, то встановити взаємозалежність між їх параметрами та відповідно скорегувати загальну процедуру визначення параметрів.

Викладення основного матеріалу. Логістична залежність росту [1] має нижню та верхню асимптоти (рис.1). Залежність відповідає розв’язанню логістичного диференціального рівняння (диференціальна форма логістичної залежності) [6]:

$$\frac{dy}{dx} = m \cdot (y - Y_{\min}) \cdot (Y_{\max} - y)\,. \qquad (1)$$

Рішення (1) (інтегральна форма логістичної залежності) має вигляд:

$$y = Y_{\min} + \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{1 + e^{-m\cdot(Y_{\max} - Y_{\min})\cdot(x - \Delta x)}} = d + \frac{a}{1 + e^{-m\cdot a\cdot(x - \Delta x)}}\,, \qquad (2)$$

$d = Y_{\min}$, $a = Y_{\max} - Y_{\min}$,

де y – рівень вихідного ефекту; x – вхідні ресурси, які використовуються на створення ефекту; $a > 0$, $d > 0$ – коефіцієнти, які визначають положення верхньої та нижньої асимптот, Δx – зсув кривої вздовж вісі абсцис (дорівнює абсцисі точки симетрії S).

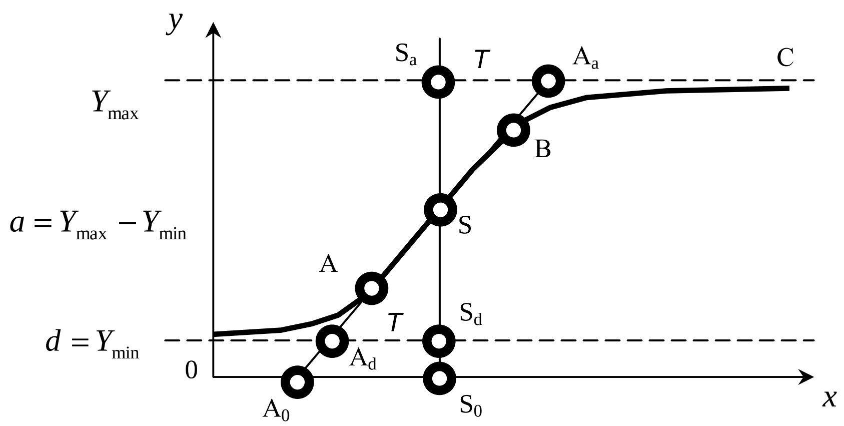

Рис. 1. Графік логістичної функції росту

Параметри залежності можуть визначатись: на підставі статистичних даних, за допомогою експертних оцінок, шляхом перетворення з існуючих лінійних залежностей [1] або комбінацією переліченого. Бажана послідовність визначення параметрів логістичної залежності в інтегральному вигляді розглянута в [6].

1. Нижня асимптотична межа кривої d.

2. Верхня асимптотична межа кривої $a + d$.

3. Показники нахилу в точці симетрії залежності: k або постійна ресурсу T (залежно від постановки задачі).

4. Зсув точки симетрії Δx.

Останній пункт можна опустити, оскільки зсув залежності вздовж вісі абсцис залежить від початкових умов інтегрування. Перші два пункти мають чітку фізичну інтерпретацію та зазвичай проблем не викликають. Більш складним є визначення показників нахилу в точці симетрії (на лінійній ділянці логістичної кривої AB). Складність полягає в тому, що на відміну від фізично зрозумілого тангенсу кута нахилу $k = \frac{a}{2T}$ в інтегральній формі, параметр m в диференціальній формі не має фізичного змісту, зрозумілого настільки, щоб експерт зміг без додаткових обчислень визначити його величину в рівнянні (1). Відверто кажучи, в термінах тангенсів кута нахилу також розмірковують далеко не всі експерти. Більш зручним є визначення відомих з попереднього досвіду, величин ефекту, який буде отриманий після витрати певної характерної величини вхідного ресурсу. В якості такої характерної величини вхідного ресурсу використовується поняття постійної ресурсу логістичної функції T [6] (рис.1), яке є поширенням відомого поняття постійної часу експоненти [8] на логістичну залежність та на довільні види вхідних ресурсів.

Визначення 1: постійна ресурсу дорівнює довжині відрізку асимптоти між абсцисою точки симетрії та точкою перетину *вісі абсцис* з прямою, яка дотична до графіку функції у точці симетрії [6].

Визначення відповідає найбільш поширеному, але не єдиноможливому варіанту розташування нижньої асимптоти $d = Y_{\min} = 0$. В реальному житті $d = Y_{\min} \geq 0$. Згідно з визначенням 1 здається, що постійна ресурсу дорівнює $T = \left|A_0 S_0\right|$, чого не може бути при $d = Y_{\min} > 0$. Скорегуємо визначення.

Визначення 2: постійна ресурсу дорівнює довжині відрізку асимптоти, який відсікається перпендикуляром до вісі абсцис, що проходить через точку симетрії логістичної кривої, та прямою, яка дотична до графіку функції у точці її симетрії.

Звернемо увагу на те, що у визначенні 2 не уточнюється, про яку саме асимптоту йде мова. Визначення вірне для обох асимптот. Постійна ресурсу дорівнює довжині відрізків $T = \left|A_d S_d\right| = \left|A_a S_a\right|$.

За фізичним змістом постійна ресурсу приблизно дорівнює ресурсу, який необхідний для зростання ефекту від нижньої асимптоти до точки симетрії (половина можливого зростання ефекту) або від точки симетрії до входження в зону насичення. На практиці майже ніколи не стоїть задача досягнення половини максимально можливого ефекту. Більш доречним для визначення експертами була б величина вдвічі більша за постійну ресурсу. Це позбавляє від додаткових перерахунків та спрощує формулювання пошукового запитання до експерта: "визначити величину ресурсу, яка необхідна для зростання ефекту від початку зони інтенсивного зростання до початку зони насичення".

Встановимо зв'язок між параметрами m та T.

Відома залежність похідної логістичної функції $z(x) = \left(1 + e^{-m \cdot a \cdot (x - \Delta x)}\right)^{-1}$ при $d = 0$, $a = 1$, $\Delta x = 0$ у вигляді [9]

$$\frac{dz}{dx} = m \cdot z(x) \cdot z(-x) = m \cdot z(x) \cdot \left(1 - z(x)\right). \qquad (3)$$

Для довільних d, a логістична функція y (2) може бути виражена через логістичну функцію z

$$y = d + a \cdot z \qquad (4)$$

та навпаки

$$z = a^{-1} \cdot (y - d). \qquad (5)$$

З урахуванням (3) знаходимо похідну від (4)

$$\frac{dy}{dx} = m \cdot a \cdot z(x) \cdot z(-x) = m \cdot a \cdot z(x) \cdot \left(1 - z(x)\right). \qquad (6)$$

Підставляємо (5) в (6)

$$\frac{dy}{dx} = m \cdot a \cdot a^{-2} \cdot (y-d) \cdot \big(a-(y-d)\big) = m \cdot a^{-1} \cdot (y-d) \cdot \big(a+d-y\big). \tag{7}$$

Вираз (7) описує параболу, яка перетинає вісь абсцис в точках $x = d$, $x = d + a$ та має екстремум посередині вказаного діапазону в точці $x = d + 0.5a$ (рис.2). Точки $x = d$, $x = d + a$ визначають межі діапазону припустимих значень.

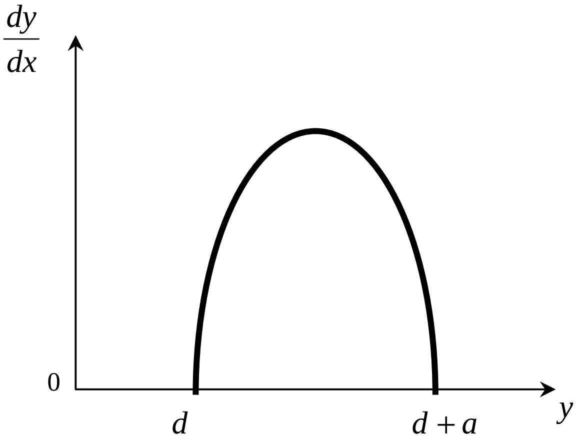

Рис. 2. Похідна логістичної функції

Розкритий вираз для знаходження похідної логістичної функції має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 m e^{-m \cdot a \cdot (x-\Delta x)}}{\left(1+e^{-m \cdot a \cdot (x-\Delta x)}\right)^2}.$$

Похідна в точці симетрії ($x = \Delta x$) дорівнює

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\Delta x} = \frac{a^2 m}{4}. \tag{8}$$

Проведемо дотичну $A_d A_a$ до логістичної кривої в точці симетрії S. Тангенс кута нахилу дотичної дорівнює відношенню

$$\frac{|SS_d|}{|A_d S_d|} = \frac{a}{2T}. \tag{9}$$

Прирівнюючи (8) та (9), отримуємо вираз для знаходження m через T.

$$m = \frac{2}{aT}. \tag{10}$$

Експерт виходячи з фізичного змісту процесу повинен спочатку визначити діапазон можливих значень ефектів (нижня та верхня асимптоти d, a), потім діапазон використаних ресурсів, в якому відбувається інтенсивне зростання ефекту від d до a. Цей діапазон дорівнює $2T$ (рис.1). Далі за допомогою (10) знаходиться масштабний коефіцієнт m правої частини диференціального рівняння (1), який завершує перелік параметрів, необхідних для початку моделювання динаміки процесу росту. Описана процедура визначення параметрів логістичної кривої є практично зручною та ефективною.

Висновки.

1. Процеси людської діяльності, зокрема в правовій сфері, є найбільш складними в математичній формалізації (порівняно з технічними процесами). Це обумовлює певні труднощі щодо створення відповідних моделей прогнозування.

2. Другою за значенням проблемою створення моделей процесів у правовій сфері є їх забезпечення вхідними даними для параметричної ідентифікації. Оскільки кількість об'єктивних даних є дуже обмеженою, то основним джерелом вхідних даних є експертні оцінки.

3. З точки зору моделювання динамічних процесів найбільш адекватними є логістичні залежності в диференціальній формі. Але експертне визначення їх параметрів представляє певні труднощі у зв'язку з непрозорим фізичним змістом останніх. Простіше визначити параметри логістичної залежності в інтегральній формі, а після цього зробити перехід до параметрів логістичної залежності в диференціальній формі.

4. Найбільшу складність для експертів представляє визначення параметрів, які пов'язані з величиною кута нахилу логістичної залежності. Тому в статті уточнено визначення параметру постійної ресурсу (залежно в інтегральній формі) та встановлено її зв'язок з відповідними параметрами залежності в диференціальній формі. Знайдені залежності дозволили без втрати адекватності моделювання динамічних процесів використати в експертному оцінюванні параметри, які мають чіткий фізичний зміст, а тому є менш вимогливими до кваліфікації експертів.

Подальші дослідження слід присвятити вивченню особливостей визначення параметрів логістичних залежностей з урахуванням особливостей конкретних процесів людської діяльності.

Використана література

1. Савінов О.М. Моделювання та управління якістю підготовки авіаційних фахівців / О.М. Савінов. – К. : Вид-во Нац.авіац.ун-ту "НАУ-друк", 2010. – 172 с.

2. Комп'ютерна модель управління оборонними ресурсами "DRMM": сучасний стан та перспективи розвитку ; за ред. В.Л. Шевченка. – К. : ГУ ОС та ОМР ГШ ЗС України, ННДЦ ОТ і ВБ України, 2004. – 218 с.

3. Кузнецов Ю.М. Прогнозування розвитку технічних систем / Ю.М. Кузнецов., Р.А. Скляров. – К. : ТОВ "ЗМОК" – ПП "ГНОЗИС", 2004. – 323 с.

4. Медведева Н.Б. Динамика логистической функции / Н.Б. Медведева // Соросовский Образовательный Журнал. – 2000. – № 8. – С. 121-127.

5. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В. Амелькин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 160 с.

6. Шевченко В.Л. Зв'язок логістичних моделей з лінійними та експоненціальними моделями розвитку об'єктів оборонного планування / В.Л. Шевченко // Вісник НТУУ "КПІ". – К. : НТУУ "КПІ", НДІ АКС "Экотех", 2006. – Вип. № 44. – С. 3-18. – (Інформатика, управління та обчислювальна техніка).

7. Шевченко В.Л. Врахування суб'єктивних факторів при моделюванні економічних процесів / В.Л. Шевченко // Наук.-техн. зб. ННДЦ ОТ і ВБ України. – 2001 р. – Вип. 5. – С. 235-240.

8. Теория автоматического управления. Ч. 1. Теория линейных систем автоматического управления : учеб. пособие для вузов ; под ред. А.А. Воронова. – М. : Высш. школа, 1977. – 303 с.

9. Шевченко В.Л. Застосування залежностей з обмеженням зросту для спрощення побудови прогнозуючих моделей військово-економічних процесів / В.Л. Шевченко // Зб. наук. праць ННДЦ ОТ і ВБ України. – 2004. – Вип. 4 (24). – С. 102-110.

~~~~~~~~~~~~ * * * ~~~~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~~~