УДК 530.145

© 2008

М. В. Кузьменко, І. В. Сименог

Узагальнення комутаційних співвідношень в квантовій механіці систем частинок

(Представлено академіком НАН України А. Г. Загороднім)

Generalized commutation relations are introduced for the operators of coordinates and momenta of different particles. The wave equations are obtained for one-dimensional quantum systems of two particles. A representation for the momentum operator for a one-dimensional three-particle problem is constructed. General qualitative conclusions concerning the dynamics of such quantum systems of particles are discussed.

Висловлена свого часу [1] ідея узагальнення співвідношень некомутативності для операторів просторових координат та часу в квантовій теорії в останні два десятиріччя отримала свій розвиток в самих різних напрямках. Узагальнені підходи некомутативної геометрії знайшли своє застосування в квантовій гравітації та квантовій теорії поля [2–5]. Різноманітні модифіковані комутаційні співвідношення та відповідно узагальнена алгебра Гайзенберга досить популярні в загальних проблемах квантової теорії, описі різноманітних екзотичних квазічастинок в теорії конденсованого стану, в теорії квантових груп [4–10]. Ідея про те, що комутаційні співвідношення Гайзенберга можуть бути узагальнені на оператори координат та імпульсів різних частинок, які некомутують між собою, висловлена в роботі [11]. При цьому виявлено можливу модифікацію рівняння Шрьодінгера на малих відстанях між частинками. Дана робота присвячена розробці в квантових одновимірних системах положення про некомутативність операторів координат та імпульсів різних частинок і формулюванню відповідних квантових хвильових рівнянь.

1. Одновимірна модель двох частинок. Класичні рівняння руху системи двох частинок з координатами x_1 і x_2 та масами m_1 і m_2 отримуються із функції Гамільтона

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(|x_1 - x_2|). \tag{1}$$

Цій класичній системі двох частинок стандартно ставимо (див. зокрема [12]) у відповідність квантову систему шляхом заміни у гамільтоніані величин x_1, x_2, p_1 і p_2 відповідними операторами:

$$x_1 \to \widehat{x}_1 = x_1, \qquad x_2 \to \widehat{x}_2 = x_2, \tag{2}$$

$$p_1 \to \widehat{p}_1 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad p_2 \to \widehat{p}_2 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{3}$$

Оператори $\widehat{x}_1$, $\widehat{x}_2$, $\widehat{p}_1$ і $\widehat{p}_2$ такі, що задовольняють комутаційні співвідношення

$$[\widehat{x}_1, \widehat{p}_1] = i\hbar, \qquad [\widehat{x}_2, \widehat{p}_2] = i\hbar. \tag{4}$$

Всі інші можливі комутатори дорівнюють нулю, в тому числі й такі:

$$[\widehat{x}_1, \widehat{p}_2] = 0, \qquad [\widehat{x}_2, \widehat{p}_1] = 0. \tag{5}$$

Рівності (5) означають, що вимірювання координати (або імпульсу) однієї частинки принципово не збурює стан імпульсу (або координати) іншої частинки навіть за наявності сил взаємодії між частинками (див. [13). Тобто, зміна силового впливу однієї частинки на іншу, викликана вимірюванням координати першої частинки, повинна поширитися за скінченний час. В той же час, у нерелятивіській квантовій теорії вважається, що швидкість поширення взаємодії є нескінченно великою. Це є вагомою причиною, що дозволяє нам відмовитися від обов'язкового виконання комутаційних співвідношень (5).

Вважатимемо, що при збуренні положення однієї частинки відбувається неконтрольоване передавання імпульсу не тільки цій частинці, а й всій системі в цілому. Будемо також вимагати, щоб комутатори операторів координат кожної частинки з оператором повного імпульсу системи, як і для стандартної картини Гайзенберга–Шрьодінгера, дорівнювали:

$$[\widehat{x}_1, \widehat{P}] = i\hbar, \qquad [\widehat{x}_2, \widehat{P}] = i\hbar. \tag{6}$$

Тут $\widehat{P} = \widehat{p}_1 + \widehat{p}_2$ — оператор повного імпульсу системи.

Нехай узагальнені комутаційні співвідношення між координатами та імпульсами в системі двох частинок будуть

$$[\widehat{x}_1, \widehat{p}_2] = i\hbar\widehat{\varepsilon}_{12}, \tag{7}$$

де $\widehat{\varepsilon}_{12}$ — деякий ермітовий оператор. Тоді з (6) випливає, що

$$[\widehat{x}_1, \widehat{p}_1] = i\hbar(1 - \widehat{\varepsilon}_{12}). \tag{8}$$

Аналогічно, якщо

$$[\widehat{x}_2, \widehat{p}_1] = i\hbar\widehat{\varepsilon}_{21}, \tag{9}$$

то

$$[\widehat{x}_2, \widehat{p}_2] = i\hbar(1 - \widehat{\varepsilon}_{21}). \tag{10}$$

Будемо вважати, що оператори координат (і відповідно імпульсів) різних частинок комутують, як і в стандартному представлені Гайзенберга–Шрьодінгера

$$[\widehat{x}_1, \widehat{x}_2] = 0, \qquad [\widehat{p}_1, \widehat{p}_2] = 0, \tag{11}$$

що дозволяє використати ці оператори як незалежні змінні.

Операторна тотожність Якобі [12]

$$[\widehat{A}, [\widehat{B}, \widehat{C}]] + [\widehat{B}, [\widehat{C}, \widehat{A}]] + [\widehat{C}, [\widehat{A}, \widehat{B}]] = 0 \tag{12}$$

для лінійних операторів $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ і $\widehat{C}$ дозволяє накласти певні обмеження на властивості операторів некомутативності $\widehat{\varepsilon}_{12}$ і $\widehat{\varepsilon}_{21}$

$$[\widehat{p}_1 + \widehat{p}_2, \widehat{\varepsilon}_{12}] = 0; \qquad [\widehat{p}_1 + \widehat{p}_2, \widehat{\varepsilon}_{21}] = 0; \qquad [\widehat{x}_1, \widehat{\varepsilon}_{21}] + [\widehat{x}_2, \widehat{\varepsilon}_{12}] = 0, \tag{13}$$

коли оператори $\widehat{\varepsilon}_{12}$ і $\widehat{\varepsilon}_{21}$ комутують з повним імпульсом.

Виберемо координати частинок в якості незалежних змінних:

$$\widehat{x}_1 = x_1, \qquad \widehat{x}_2 = x_2. \tag{14}$$

Повний імпульс системи в цьому випадку повинен бути

$$\widehat{P} = \widehat{p}_1 + \widehat{p}_2 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{15}$$

Припустимо, що оператори $\widehat{\varepsilon}_{12}$ та $\widehat{\varepsilon}_{21}$ є функціями лише відносної координати двох частинок $\widehat{\varepsilon}_{12} \equiv \varepsilon_{12}(x_1 - x_2)$ і $\widehat{\varepsilon}_{21} \equiv \varepsilon_{21}(x_1 - x_2)$. В такому випадку співвідношення (13) виконуються автоматично.

Тоді оператори імпульсів кожної з двох частинок можуть бути подані у вигляді

$$\widehat{p}_1 = -i\hbar(1-\varepsilon_{12})\frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar\varepsilon_{21}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{i\hbar}{2}(\varepsilon_{12})'_{x_1} - \frac{i\hbar}{2}(\varepsilon_{21})'_{x_2}, \tag{16}$$

$$\widehat{p}_2 = -i\hbar\varepsilon_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar(1-\varepsilon_{21})\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{i\hbar}{2}(\varepsilon_{12})'_{x_1} + \frac{i\hbar}{2}(\varepsilon_{21})'_{x_2}, \tag{17}$$

де штрих означає відповідну частинну похідну. Оператори (14), (16) і (17) задовольняють комутативні співвідношення (7)–(11).

Зручно ввести відносну координату та координату центра мас

$$x = x_1 - x_2, \qquad X = \frac{m_1}{M}x_1 + \frac{m_2}{M}x_2 \tag{18}$$

і вимагати розділення змінних у повному гамільтоніані системи. Це можливо лише при додаткових умовах на $\varepsilon_{12}(x)$ і $\varepsilon_{21}(x)$

$$m_1\varepsilon_{12}(x) - m_2\varepsilon_{21}(x) = 0, \qquad 1 - \varepsilon_{12}(x) - \varepsilon_{21}(x) \neq 0. \tag{19}$$

Тоді гамільтоніан системи можна записати у вигляді незалежних доданків

$$H = H_X + H_x, \tag{20}$$

де гамільтоніан центра мас має стандартний вигляд

$$H_X = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial X^2}. \tag{21}$$

У змінних x і X оператори імпульсів частинок $\widehat{p}_1$ і $\widehat{p}_2$ остаточно можна навести у вигляді

$$\widehat{p}_1 = -i\hbar(1-\varepsilon_{12}-\varepsilon_{21})\frac{\partial}{\partial x} - i\hbar\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{i\hbar}{2}(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{12})'_x, \tag{22}$$

$$\widehat{p}_2 = i\hbar(1-\varepsilon_{12}-\varepsilon_{21})\frac{\partial}{\partial x} - i\hbar\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X} - \frac{i\hbar}{2}(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{12})'_x. \tag{23}$$

Гамільтоніан відносного руху має вигляд

$$H_x = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\varepsilon^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\varepsilon(x)\varepsilon'(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon(x)\varepsilon''(x) + \frac{1}{4}[\varepsilon'(x)]^2\right] + V(x). \tag{24}$$

Тут μ — зведена маса системи $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$, а $\varepsilon(x) = 1 - \varepsilon_{12}(x) - \varepsilon_{21}(x)$.

Оператори некомутативності $\varepsilon_{12}(x)$ і $\varepsilon_{21}(x)$ можна виразити тільки через одну функцію $\varepsilon(x)$:

$$\varepsilon_{12}(x) = \frac{m_2}{M}(1 - \varepsilon(x)), \qquad \varepsilon_{21}(x) = \frac{m_1}{M}(1 - \varepsilon(x)). \tag{25}$$

У хвильовому рівнянні відносного руху за змінною x

$$H_x \varphi(x) = E\varphi(x), \tag{26}$$

зробимо заміну змінних

$$\psi(q) = \sqrt{\varepsilon(x)}\varphi(x), \qquad \frac{dx}{dq} = \varepsilon(x). \tag{27}$$

Для хвильової функції $\psi(q)$ тепер маємо остаточно таке квантове хвильове рівняння:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi(q)}{dq^2} + V(x(q))\psi(q) = E\psi(q). \tag{28}$$

Тут відносна координата між двома частинками x залежить від нової змінної q відповідно до другого рівняння в (27).

На великих відстанях між частинками функції некомутативності $\varepsilon_{12}(x)$ і $\varepsilon_{21}(x)$ дорівнюють нулю (ми припустили також, що функція $\varepsilon(x)$ є парною) і тому асимптотично координати x та q збігаються.

Рівняння (28) свідчить про те, що для опису квантової системи двох частинок необхідно задавати дві функції — це потенціальна енергія взаємодії двох частинок $V(x)$, яка за визначенням є неквантовою, та функція $\varepsilon(x)$, яка відповідає за можливу некомутативність квантових операторів координат та імпульсів різних частинок. Ця функція некомутативності може бути відмінною від одиниці і породжувати важливі нові квантові ефекти на малих відстанях між частинками.

Щодо природи $\varepsilon(x)$ можна припустити: 1) функція некомутативності може бути істотно відмінною від одиниці лише на ультрамалих відстанях і мати певний фундаментальний вигляд, незалежний від потенціалу взаємодії; 2) функція некомутативності визначається моделлю взаємодії і так, що для невзаємодіючих вільних частинок вона є одиницею (в такому випадку ніякої відмінності від стандартної ситуації з двома вільними квантовими частинками немає); 3) функція некомутативності $\varepsilon(x)$ моделює певним чином релятивістські ефекти, коли враховується ефективно скінченність швидкості передачі взаємодії, або неточковість частинок.

Із загальних міркувань відзначимо, що функція некомутативності $\varepsilon(x)$ повинна бути одиницею на великих відстанях і додатна, а на малих відстанях більше одиниці, так що недіагональні функції некомутативності $\varepsilon_{12}(x)$ і $\varepsilon_{21}(x)$ тут стають від'ємними. В рівнянні (28) некомутативність координат та імпульсів різних частинок повинна проявлятися в додатковому ефективному відштовхуванні на малих відстанях. З іншого боку, якщо маємо взаємодію типу відштовхувального бар'єру, то внаслідок врахування некомутативності можливо зменшення коефіцієнту відбиття від бар'єра, а прозорість бар'єра відповідно повинна збільшуватись.

2. Одновимірна модель трьох частинок. Узагальнимо схему некомутативності операторів для різних частинок на квантову систему трьох частинок. Нехай оператори координат трьох частинок будуть $\widehat{x}_1$, $\widehat{x}_2$ та $\widehat{x}_3$, а оператори імпульсів $\widehat{p}_1$, $\widehat{p}_2$ і $\widehat{p}_3$.

Будем вимагати, щоб комутатор координати кожної частинки з оператором повного імпульсу системи $\widehat{P} = \widehat{p}_1 + \widehat{p}_2 + \widehat{p}_3$ був стандартним і дорівнював $i\hbar$:

$$[\widehat{x}_i, \widehat{P}] = i\hbar, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{29}$$

Введемо

$$[\widehat{x}_i, \widehat{p}_j] = i\hbar\widehat{\varepsilon}_{ij}, \qquad i \neq j = 1, 2, 3, \tag{30}$$

де $\widehat{\varepsilon}_{ij}$ — деякі ермітові оператори. Тоді з (29) випливає, що для операторів координат та імпульсів фіксованої частинки

$$[\widehat{x}_i, \widehat{p}_i] = i\hbar\left(1 - \sum_{j\neq i=1}^{3} \widehat{\varepsilon}_{ij}\right). \tag{31}$$

Комутаційні співвідношення для операторів координат (і імпульсів) різних частинок дорівнюють нулю

$$[\widehat{x}_i, \widehat{x}_j] = 0, \qquad [\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{32}$$

що дає змогу використати як незалежні змінні координати частинок x_i.

Надалі, як і у двочастинковій задачі, обмежимося припущенням, що оператори $\widehat{\varepsilon}_{ij}$ є функціями лише координат частинок.

Використаємо тотожність Якобі (12) для операторів $\widehat{A} = \widehat{p}_i$, $\widehat{B} = \widehat{p}_j$ і $\widehat{C} = \widehat{x}_k$ ($i \neq j$, $k = 1, 2, 3$), що накладає деякі обмеження на властивості операторів $\widehat{\varepsilon}_{ij}$. Недіагональні матричні функції $\widehat{\varepsilon}_{ij}$ комутують з повним імпульсом системи

$$[\widehat{P}, \widehat{\varepsilon}_{ij}] = 0, \qquad i \neq j = 1, 2, 3, \tag{33}$$

і задовольняють таку систему операторних рівнянь:

$$[\widehat{p}_1, \widehat{\varepsilon}_{23} + \widehat{\varepsilon}_{32}] = [\widehat{p}_3, \widehat{\varepsilon}_{21}] + [\widehat{p}_2, \widehat{\varepsilon}_{31}], \tag{34}$$

$$[\widehat{p}_3, \widehat{\varepsilon}_{12} + \widehat{\varepsilon}_{21}] = [\widehat{p}_1, \widehat{\varepsilon}_{23}] + [\widehat{p}_2, \widehat{\varepsilon}_{13}], \tag{35}$$

$$[\widehat{p}_2, \widehat{\varepsilon}_{13} + \widehat{\varepsilon}_{31}] = [\widehat{p}_3, \widehat{\varepsilon}_{12}] + [\widehat{p}_1, \widehat{\varepsilon}_{32}]. \tag{36}$$

Очевидно, що рівняння (36) є сумою рівнянь (34) і (35), тобто незалежними є два з них, наприклад (34) і (35).

Замість декартових координат $\widehat{x}_1$, $\widehat{x}_2$, $\widehat{x}_3$ та декартових операторів імпульсів $\widehat{p}_1$, $\widehat{p}_2$ і $\widehat{p}_3$ зручно перейти до координат та імпульсів Якобі

$$\widehat{q}_1 = \widehat{x}_2 - \widehat{x}_3; \qquad \widehat{q}_2 = \widehat{x}_1 - \frac{m_2\widehat{x}_2 + m_3\widehat{x}_3}{m_2 + m_3}; \qquad \widehat{X} = \frac{m_1\widehat{x}_1 + m_2\widehat{x}_2 + m_3\widehat{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3}; \tag{37}$$

$$\widehat{P}_1 = \frac{m_3\widehat{p}_2 - m_2\widehat{p}_3}{m_2 + m_3}; \qquad \widehat{P}_2 = \frac{(m_2 + m_3)\widehat{p}_1 - m_1(\widehat{p}_2 + \widehat{p}_3)}{m_1 + m_2 + m_3}; \qquad \widehat{P} = \widehat{p}_1 + \widehat{p}_2 + \widehat{p}_3. \tag{38}$$

Тут $\widehat{X}$ — координата центра мас системи, а $\widehat{P}$ — сумарний імпульс. Умовою відокремлення руху центра мас системи від відносного руху є рівність нулю таких комутаторів:

$$[\widehat{q}_1, \widehat{P}] = 0, \qquad [\widehat{q}_2, \widehat{P}] = 0, \tag{39}$$

$$[\widehat{X}, \widehat{P}_1] = 0, \qquad [\widehat{X}, \widehat{P}_2] = 0. \tag{40}$$

Умови (39) виконуються тотожно, а (40) дають ще дві додаткові умови на шість функцій $\widehat{\varepsilon}_{ij}$

$$m_2\widehat{\varepsilon}_{21} - m_1\widehat{\varepsilon}_{12} + m_3\widehat{\varepsilon}_{31} - m_1\widehat{\varepsilon}_{13} = 0, \tag{41}$$

$$m_3\widehat{\varepsilon}_{32} - m_2\widehat{\varepsilon}_{23} + m_1\widehat{\varepsilon}_{12} - m_2\widehat{\varepsilon}_{21} = 0. \tag{42}$$

Таким чином, для шести функцій $\widehat{\varepsilon}_{ij}$ маємо чотири додаткові умови (34), (35), (41) та (42), і тоді в загальному випадку варто очікувати, що для трьох частинок незалежними є дві функції некомутативності. Всі функції $\widehat{\varepsilon}_{ij}$ комутують з оператором повного імпульсу системи і тому є функціями лише двох відносних координат Якобі $\widehat{\varepsilon}_{ij}(q_1, q_2)$.

Як наслідок попередніх результатів остаточно отримуємо для операторів імпульсів трьох частинок таке представлення:

$$\widehat{p}_1 = -i\hbar(1 - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{13})\frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar\varepsilon_{21}\frac{\partial}{\partial x_2} - i\hbar\varepsilon_{31}\frac{\partial}{\partial x_3} + \\ + \frac{i\hbar}{2}[(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13})'_{x_1} - (\varepsilon_{21})'_{x_2} - (\varepsilon_{31})'_{x_3}], \tag{43}$$

$$\widehat{p}_2 = -i\hbar\varepsilon_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar(1 - \varepsilon_{21} - \varepsilon_{23})\frac{\partial}{\partial x_2} - i\hbar\varepsilon_{32}\frac{\partial}{\partial x_3} - \\ - \frac{i\hbar}{2}[(\varepsilon_{12})'_{x_1} - (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{23})'_{x_2} + (\varepsilon_{32})'_{x_3}], \tag{44}$$

$$\widehat{p}_3 = -i\hbar\varepsilon_{13}\frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar\varepsilon_{23}\frac{\partial}{\partial x_2} - i\hbar(1 - \varepsilon_{31} - \varepsilon_{32})\frac{\partial}{\partial x_3} - \\ - \frac{i\hbar}{2}[(\varepsilon_{13})'_{x_1} + (\varepsilon_{23})'_{x_2} - (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{32})'_{x_3}] \tag{45}$$

через функції некомутативності.

Ці представлення для операторів імпульсів трьох квантових частинок дають можливість побудувати гамільтоніан для системи і отримати хвильове тричастинкове рівняння з урахуванням некомутативності операторів координат та імпульсів різних частинок. Отримані рівняння на матрицю функцій некомутативності забезпечують в кінетичній енергії трьох частинок розділення змінних центра мас та внутрішніх координат. Зауважимо, що оператори імпульсів через залежність від функцій некомутативності опосередковано залежать від усіх внутрішніх координат трьох частинок і тим самим на ультрамалих відстанях між частинками ефективно можуть виникати аномальні ефекти істинно тричастинкових кореляцій чисто квантового походження. Розвинутий вище підхід допускає поширення на одновимірні багаточастинкові задачі з довільною кількістю частинок.

Автори вдячні О. М. Гаврилику, В. П. Гусиніну, А. Г. Загородньому і В. В. Кухтіну за корисні дискусії щодо питань, розглянутих у роботі. Робота виконана за підтримки цільової програми Відділення фізики та астрономії НАН України.

1. *Snyder H. S.* Quantized Space-Time // Phys. Rev. – 1947. – **71**, No 1. – P. 38–41.
2. *Witten E.* Non-commutative geometry and string field theory // Nucl. Phys. – 1986. – **B268**, No 2. – P. 253–294.
3. *Jackiw R., Pi S. Y.* Covariant coordinate transformations on noncommutative space // Phys. Rev. Lett. – 2002. – **88**, No 11. – P. 111603–4.

4. *Douglas M. R., Nekrasov N. A.* Noncommutative field theory // Rev. Mod. Phys. – 2001. – **73**, No 4. – P. 977–1029.
5. *Szabo R. J.* Quantum field theory on noncommutative spaces // Phys. Rept. – 2003. – **378**, No 4. – P. 207–299.
6. *Drinfeld V. G.* Quantum groups // Proc. Conf. Math. (A. M. Gleason, ed.), Amer. Math. Soc. – Providence, RI, 1986. – P. 798–820.
7. *Klimyk A., Schmüdgen K.* Quantum groups and their representations. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1997. – 552 p.
8. *Kempf A.* Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry // J. Math. Phys. – 1994. – **35**, No 9. – P. 4483–4496.
9. *Дюваль С., Хорвати П. А.* Некоммутативные координаты, экзотические частицы и аномальные анионы в эффекте Холла // Теорет. мат. физ. – 2005. – **144**, № 1. – С. 26–34.
10. *Fityo T. V., Vakarchuk I. O., Tkachuk V. M.* One-dimensional Coulomb-like problem in deformed space with minimal length // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – **39**, No 9. – P. 2143–2149.
11. *Kuzmenko M. V.* Nonrelativistic wave equation for a system of interacting particles // Phys. Rev. A. – 2000. – **61**, No 1. – P. 014101–4.
12. *Мессиа А.* Квантовая механика. Т. 1. – Москва: Наука, 1978. – 480 с.
13. *Паули В.* Общие принципы волновой механики // Тр. по квантовой теории. – Москва: Наука, 1975. – С. 352–569.

Інститут теоретичної фізики
ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ

Надійшло до редакції 02.07.2007