УДК 517.5

Я. В. Заболотний

Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Розглянуто відому гіпотезу В. М. Дубиніна про неперетинні області на комплексній площині і знайдено її розв'язок для $\gamma \leqslant \sqrt[4]{n}$.

Одним з класичних напрямків розвитку геометричної теорії функцій комплексної змінної є розв'язання екстремальних задач на класах областей, що не перетинаються. Першим важливим результатом даної тематики була теорема Лаврентьєва [1]. Значний внесок у розвиток цього напрямку було зроблено багатьма дослідниками (див., наприклад, [1–13]).

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ — множини натуральних і комплексних чисел відповідно, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — розширена комплексна площина або сфера Рімана.

Зокрема, в роботі [7] було сформульовано таку екстремальну задачу:

Задача 1. Довести, що максимум функціонала

$$I_\gamma = r^\gamma(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1}$$

де B_0, B_1, B_2, …, B_n $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0, n}$ і $\gamma \leqslant n$ (див., наприклад, [2–12]), досягається для деякої конфігурації областей, які мають n-кратну симетрію.

У даній роботі доведено такий результат:

Теорема 1. *Для довільного натурального $n \geqslant 8$ і $0 \leqslant \gamma \leqslant \sqrt[4]{n}$ виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^\gamma(D_0, a_0^0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0),$$

де B_0, B_1, B_2, …, B_n $(n \geqslant 2)$ — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0, n}$, причому знак рівності досягається, зокрема, за умов $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0, n}$, де a_k^0, D_k — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Доведення. Для $\gamma = 1$ задача була повністю розв'язана в роботі [7] для $\forall\, n \geqslant 2$. З методу цієї роботи також випливає, що цей результат правильний і для $0 < \gamma < 1$. Тому нам достатньо довести, що даний результат справджується при $0 \leqslant \gamma \leqslant \sqrt[4]{n}$.

Зауважимо, що перші результати для $\gamma > 1$ було отримано в роботі [12].

Встановимо спочатку, що дане твердження правильне для $\gamma = \sqrt[4]{n}$. Метод доведення спирається на застосування, аналогічні таким для теореми 5.2.3 роботи [9], методу розділяючого перетворення областей, який детально розроблений в роботі [7].

Згідно з умовою задачі, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$. Припустимо, для конкретності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \cdots < \arg a_n < 2\pi.$$

Далі, означимо числа α_k таким чином:

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \quad \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2), \quad \ldots, \quad \alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n).$$

Нехай $P_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $k = \overline{1,n}$, $\arg a_{n+1} = 2\pi$, $P_0 := P_n$, $P_{n+1} := P_1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 2$.

При кожному $k = \overline{1,n}$ позначимо через $z_k(w)$ ту вітку багатозначної аналітичної функції $z = -i(e^{-i \arg a_k} w)^{1/\alpha_k}$, $z_0 := z_n$, $z_{n+1} := z_1$, яка конформно і однолисто відображає області P_k, $k = \overline{1,n}$, на праву півплощину $\operatorname{Re} z > 0$.

Тоді для областей B_k, $k = \overline{1,n}$, таких, як і в задачі 1, позначимо через $D_k^{(1)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k(B_k \bigcap \overline{P_k})$, що містить точку $z_k(a_k)$ з її відображенням відносно уявної осі, а через $D_k^{(1)}$ — об'єднання зв'язної компоненти множини $z_{k-1}(B_k \bigcap \overline{P_{k-1}})$, що містить точку $z_{k-1}(a_k)$ з її відображенням відносно уявної осі, $D_0^{(2)} := D_2^{(2)}$. Сімейство двох симетричних відносно уявної осі областей $\{D_k^{(1)}; D_{k-1}^{(2)}\}$ будемо називати результатом розділяючого перетворення області B_k. Для утворених областей, згідно з теоремою 3 роботи [8], правильною є нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \alpha_k (r(D_{k+1}^{(i)}, i) r(D_k^{(2)}, -i))^{1/2}.$$

Аналогічно виконавши розділяюче перетворення області B_0, отримаємо нерівність $r(B_0, 0) \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n} (r(D_0^{(k)}; 0)^{\alpha_k^2/2}$.

Далі, як і в згаданій вище теоремі 5.2.3 [9], за допомогою розділяючого перетворення отримаємо рівність

$$J_n^0(\gamma) = r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}}{\left(1 - \dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}} \left(\frac{1 - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}, \tag{2}$$

де D_k — вищевказані кругові області квадратичного диференціала (1). Зауважимо також, що в роботі [13] було повністю розв'язано задачу Дубиніна при умові, що $n \geqslant 5$ і $\alpha_k \sqrt{\gamma} \leqslant 2$. Тому нам залишається лише довести її правильність при умові $\alpha_0 \sqrt{\gamma} > 2$, де $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$. Знову ж таки, за теоремою 5.2.3 [9], при умові $\alpha_0 \sqrt{\gamma} > 2$ маємо нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2 - \alpha_0}{n - 1}\right)^{n-1}\right]^{1-\gamma/n} = [2^n \alpha_0 (2 - \alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}]^{1-\gamma/n}.$$

Оцінимо тепер величину

$$P_n(\gamma) = \frac{r^\gamma(B_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)}{r^\gamma(D_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k,d_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[2\cdot 2^{n-1}\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}]^{1-\gamma/n}}{\left(\dfrac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma(1-1/n)}\left(\dfrac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\gamma/n}\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}\left(1-\dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\gamma/n}\left(\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1-\gamma/n}\left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma(n-1)/n}\left(\frac{n^2}{4\gamma}\right)^{\gamma/n}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}\left(\frac{1+\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \times$$

$$\times\left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\gamma/n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma(n-1)/n}.$$

Звідси маємо

$$P_n(\sqrt[4]{n}) \leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{\sqrt[4]{n}+1-n^{-3/4}}\left[1-\frac{1}{\sqrt[8]{n}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{n^{3/4}}}\left(\frac{n^{7/4}}{4}\right)^{\frac{1}{n^{3/4}}}\left(1-\frac{1}{n^{7/4}}\right)^{n+\frac{1}{n^{3/4}}} \times$$

$$\times\left(\frac{1+\dfrac{1}{n^{7/8}}}{1-\dfrac{1}{n^{7/8}}}\right)^{2n^{1/8}}\left(\frac{n}{4}\right)^{-\frac{1}{n^{3/4}}}\left(\frac{4}{n^{1/8}}\right)^{1-\frac{1}{n^{3/4}}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{3/4}}}.$$

Оцінивши кожну з величин, що входять в останній добуток, отримаємо, що $P(\sqrt[4]{n}) < < 0{,}6 < 1$, тобто при $\gamma = \sqrt[4]{n}$ і $\alpha_0\sqrt{\gamma} > 2$ виконується нерівність

$$J_n(\gamma) = r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant r^\gamma(D_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k,d_k) = J_n^0(\gamma)$$

для довільної конфігурації областей $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$. Звідси випливає, що екстремальною є конфігурація, записана в умові теореми. Для $\gamma = \sqrt[4]{n}$ теорема доведена.

Нехай тепер $\gamma \in (1; \sqrt[4]{n}]$. Врахувавши, що $J_n(\gamma) \leqslant [2\cdot 2^{n-1}\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}]^{1-\gamma/n}$, а функція $[2\cdot 2^{n-1}\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}]^{1-\gamma/n}$ при фіксованому n і $\alpha_0 = \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$ монотонно зростає за γ на проміжку $(1; \sqrt[4]{n}]$, отримаємо, що $J_n(\gamma) \leqslant J_n(\sqrt[4]{n})$. Аналогічно, використавши рівність (2) і монотонне спадання функції $\left(\dfrac{4}{n}\right)^n \dfrac{(4\gamma/n^2)^{\gamma/n}}{(1-\gamma/n^2)^{n+\gamma/n}}\left(\dfrac{1-\sqrt{\gamma}/n}{1+\sqrt{\gamma}/n}\right)^{2\sqrt{\gamma}}$ за γ при фіксованому n на тому ж проміжку, отримаємо, що $J_n^0(\gamma) \geqslant J_n^0(\sqrt[4]{n})$. А звідси маємо

$$Q_n(\gamma) = \frac{J_n(\gamma)}{J_n^0(\gamma)} < \frac{J_n(\sqrt[4]{n})}{J_n^0(\sqrt[4]{n})} = Q_n(\sqrt[4]{n}) < 1,$$

тобто $J_n(\gamma) < J_n^0(\gamma)$.

Теорему доведено повністю.

Автор висловлює подяку О. К. Бахтіну за постановку задачі, а також за цінні поради та зауваження щодо написання цієї роботи.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
4. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
5. *Колбина Л. И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1955. – **5**. – С. 37–43.
6. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
7. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3–76.
8. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
9. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **73**. – 308 с.
10. *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН Украины. – 2006. – № 10. – С. 7–13.
11. *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 5. – С. 596–610.
12. *Подвысоцкий Р. В.* Об одном неравенстве для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН України. – 2009. – № 12. – С. 33–37.
13. *Ковалев Л. В.* О внутренних радиусах симметрических неналегающих областей // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 2000. – № 6. – С. 80–81.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 20.01.2011

Ja. V. Zabolotnij

Some application of the method of separating transformation in one problem on nonoverlapping domains

We consider the well-known Dubinin hypothesis on nonoverlapping domains in the complex plane and give a solution of this problem for $\gamma \leqslant \sqrt[4]{n}$.