**Доповіді**
**НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ**

9 • 2011

*МАТЕМАТИКА*

УДК 517.9

**Н. З. Дільна**

# Про симетричні розв'язки одного класу нелінійних диференціальних рівнянь

*(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)*

*Показано, що розв'язність задачі про певний клас симетричних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь можна досліджувати з використанням теорії крайових задач.*

У даній роботі розглядається один клас нелінійних скалярних функціонально-диференціальних рівнянь вигляду

$$x'(t) = f(x(\tau_1(t)), x(\tau_2(t)), \ldots, x(\tau_m(t)), x(t), t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $f\colon \mathbb{R}^{m+2} \to \mathbb{R}$, $m \geqslant 0$, $\tau_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, — вимірні функції (при $m = 0$ вважаємо, що члени з відхиленнями аргументу відсутні). Під *розв'язком* рівняння (1) розуміємо функцію $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка на кожному компактному проміжку є абсолютно неперервною та майже скрізь задовольняє рівняння (1).

Нас цікавлять розв'язки $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рівняння (1), що мають певну властивість симетрії, а саме такі, для яких

$$x(t) = ax(\psi(t)), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{2}$$

де $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — наперед задана монотонно зростаюча (неперервно диференційовна) функція з властивістю

$$\psi(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \tag{3}$$

(для визначеності — зростаюча). При відповідному виборі параметра $a$ та функції $\psi$ властивість (2) може описувати такі властивості розв'язку, як парність, непарність, періодичність, антиперіодичність і т. д. Як функцію $\psi$, наприклад, можна взяти функцію $\psi(t) = \varepsilon t + T$, де $T \in \mathbb{R}$ та $\varepsilon \in \{-1, 1\}$; тоді при $\varepsilon = 1$ умова (2) визначатиме розв'язок типу Флоке (для багатовимірних систем розв'язки з більш загальною властивістю досліджувалися, зокрема, в [1–4]), а при $\varepsilon = -1$ — зводиться до властивості, що вивчалася в [5]. Якщо взяти $\psi(t) = 2t - 1$, то матимемо властивість (2) для функції $x(t) = (t-1)^n$ при $a = 1/2^n$.

Далі розглядатимемо спеціальний випадок, коли відхилення аргументу і функція $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ в рівнянні (1) справджують таку умову: *можна вказати такі цілі числа* $k_1, \ldots, k_m$, *що*

$$\tau_i \circ \psi = \psi^{k_i} \circ \tau_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4}$$

*та*

$$\psi'(t) f(a^{-k_1} z, a^{-k_2} z, \ldots, a^{-k_m} z, a^{-1} z, \psi(t)) = a^{-1} f(z, z, \ldots, z, z, t) \tag{5}$$

*для всіх* $z \in \mathbb{R}$ *та майже всіх* $t \in \mathbb{R}$.

Сформульоване припущення означає, що права частина диференціального рівняння має властивість симетрії, яка є, у певному сенсі, природною з огляду на характер вихідної задачі. Наприклад, якщо $\tau_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, є сталими запізненнями, умова (4) виконується очевидним чином при $k_1 = \cdots = k_m = 1$. Рівняння з властивостями, подібними до (5), розглядалися, зокрема, в [6–8].

Зафіксуємо деяке значення $t_0 \in \mathbb{R}$, для якого $\psi(t_0) \neq t_0$. Для визначеності припустимо, що $\psi(t_0) > t_0$. З постановки задачі (1), (2) зрозуміло, що звуження $y = x|_{I_\psi}$ кожного її розв'язку $x$ на проміжок $I_\psi := [t_0, \psi(t_0)]$ справджує двоточкову крайову умову

$$y(t_0) = a y(\psi(t_0)). \tag{6}$$

Виявляється, що за умови (5) має місце, у певному сенсі, й обернене твердження. Для того щоб навести його точне формулювання, введемо відповідні позначення.

Зростаюча функція $\psi$ з властивістю (3) породжує строго зростаючу числову послідовність $\cdots < \psi^{-2}(t_0) < \psi^{-1}(t_0) < t_0 < \psi(t_0) < \psi^2(t_0) < \cdots$, точки якої ділять $\mathbb{R}$ на зліченну кількість напіввідкритих інтервалів

$$[\psi^j(t_0), \psi^{j+1}(t_0)), \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Назвемо число $j$ *номером* інтервалу $[\psi^j(t_0), \psi^{j+1}(t_0))$. Для кожного $t \in \mathbb{R}$ ціле число $l(t)$ визначимо як номер того з інтервалів (7), який містить точку $t$.

**Лема 1.** *Якщо функція* $y\colon I_\psi \to \mathbb{R}$ *задовольняє двоточкову крайову умову* (6), *то функція*

$$x(t) := a^{-l(t)} y(\psi^{-l(t)}(t)), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

*має властивість* (2).

**Доведення.** Нехай $x$ задано рівністю (8). Безпосереднім обчисленням за формулою (8) неважко перевірити, що при кожному цілому $j$

$$x(t) = a^{-j} x(\psi^{-j}(t))$$

для всіх $t \in [\psi^j(t_0), \psi^{j+1}(t_0))$. Використовуючи означення функції $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, звідси виводимо, що має місце (2).

Введемо оператори $\sigma_i\colon C(I_\psi, \mathbb{R}) \to L_1(I_\psi, \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$(\sigma_i x)(t) := \begin{cases} x(\tau_i(t)), & \text{якщо} \quad \tau_i(t) \in I_\psi, \\ a^{-l(\tau_i(t))} x(\psi^{-l(\tau_i(t))}(\tau_i(t))), & \text{якщо} \quad \tau_i(t) \notin I_\psi, \end{cases} \tag{9}$$

де $l(t)$ — номер того з інтервалів (7), який містить точку $t \in \mathbb{R}$.

**Лема 2.** *Нехай функція* $y\colon I_\psi \to \mathbb{R}$ *є розв'язком рівняння*

$$y'(t) = f((\sigma_1 y)(t)), (\sigma_2 y)(t)), \ldots, (\sigma_m y)(t)), t), \qquad t \in I_\psi, \tag{10}$$

*та має властивість* (6). *Тоді визначена формулою* (8) *функція* $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *є розв'язком задачі* (1), (2).

**Доведення.** Перш за все зазначимо, що записане рівняння (10) має сенс. Дійсно, вираз в його правій частині є коректно визначеним для будь-якої абсолютно неперервної функції $y\colon I_\psi \to \mathbb{R}$, оскільки, згідно з (9), як відповідна початкова функція на множині

$$\Lambda := \bigcup_{i=1}^{m} \tau_i(I_\psi) \setminus I_\psi$$

використовуються значення, отримані "трансляцією" відповідних значень $y$ на базовому інтервалі $I_\psi$ із збереженням властивості симетрії.

Нехай функція $y\colon I_\psi \to \mathbb{R}$ є розв'язком задачі (6), (10), а $x$ — це відповідна функція (8). За лемою 1 функція (8) має властивість (2). Зауважимо, що на множині $\Lambda$ значення функції $x$ збігаються зі значеннями початкової функції, які було використано при побудові рівняння (10). Звідси, зокрема, випливає, що $x$ справджує рівняння (1) на проміжку $I_\psi$.

Залишається переконатися, що при майже всіх $t \notin I_\psi$ для $x$ справджується рівняння (1). Це доводиться безпосередньо з використанням припущень (4) і (5).

*Зауваження.* У випадку, коли $\tau_i(I_\psi) \subset I_\psi$, $i = 1, 2, \ldots, n$, рівняння (10) не потребує визначення початкової функції та має вигляд

$$x'(t) = f(x(\tau_1(t)), x(\tau_2(t)), \ldots, x(\tau_m(t)), x(t), t), \qquad t \in I_\psi. \tag{11}$$

З леми 2 випливає, що питання дослідження визначених на $(-\infty, \infty)$ розв'язків рівняння (1) із симетрійною властивістю (2) можна замінити дослідженням розв'язності двоточкової задачі (6), (10); при цьому, як ми бачили вище, важливим є припущення (5). Отже, в цій ситуації можна використовувати засоби теорії крайових задач. Зокрема, мають місце такі твердження, що отримуються з відповідних результатів праці [9].

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови* (4), (5) *і, крім того,* $0 < a \leqslant 1$ *і для всіх дійсних* $z$ *та* $z_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *та майже всіх* $t \in I_\psi$ *справджується оцінка*

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_m, z, t) \operatorname{sign} z \leqslant q(|z|, t), \tag{12}$$

*де* $q\colon [0, +\infty) \times I_\psi \to [0, +\infty)$ — *деяка неспадна за першим аргументом функція з властивістю*

$$\lim_{\varrho \to +\infty} \frac{1}{\varrho} \int\limits_{I_\psi} q(\varrho, t)\, dt = 0. \tag{13}$$

*Тоді рівняння* (1) *має принаймні один розв'язок з властивістю* (2).

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови* (4), (5) *і, крім того,* $0 < a \leqslant 1$ *і для всіх дійсних* $z$ *та* $z_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *та майже всіх* $t \in I_\psi$ *справджується оцінка*

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_m, z, t) \operatorname{sign} z \geqslant -q(|z|, t), \tag{14}$$

*де* $q\colon [0,+\infty) \times I_\psi \to [0,+\infty)$ — *деяка неспадна за першим аргументом функція з властивістю* (13). *Тоді рівняння* (1) *має принаймні один розв'язок з властивістю* (2).

Інші умови існування розв'язків рівняння (1) з властивістю (2) можна отримати застосуванням інших ознак розв'язності задачі (6), (10), що є двоточковою крайовою задачею для функціонально-диференціального рівняння на обмеженому інтервалі (див., наприклад, [9, 10]).

*Виконано за часткової підтримки грантом VEGA-SAV 2/7140/27 та грантом Фонду Штефана Шварца.*

1. *Самойленко А. М.* Об одной задаче исследования глобальных решений линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 5. – С. 631–640.
2. *Самойленко А. М., Денисенко Н. Л.* Решение линейных функционально-диференциальных уравнений с линейно преобразованным аргументом на полуоси // Там же. – 2007. – **59**, № 4. – С. 501–513.
3. *Dilna N., Fečkan M.* On the uniqueness, stability and hyperbolicity of symmetric and periodic solutions of weakly nonlinear ordinary differential equations // Miskolc Math. Notes. – 2009. – **10**, No 1. – P. 11–40.
4. *Kiguradze I.* On periodic-type solutions of systems of linear ordinary differential equations // Abstr. Appl. Anal. – 2004. – No 5. – P. 395–406.
5. *Ronto A., Ronto M.* On some symmetric properties of periodic solutions // Nonlinear Oscil. (N. Y.). – 2003. – **6**, No 1. – P. 82–107.
6. *Дильная Н. З., Фечкан М.* Однозначная разрешимость и устойчивость симметрических и периодических решений слабонелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2009. – № 5. – С. 22–28.
7. *Ронто А. Н.* К вопросу о периодических решениях систем с "максимумами" // Там само. – 1999. – № 12. – С. 27–31.
8. *Ronto A., Ronto M.* Successive approximation techniques in non-linear boundary value problems for ordinary differential equations // Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations. Vol. 4. Ch. 5. – Amsterdam: Elsevier, 2008. – P. 441–592.
9. *Hakl R., Lomtatidze A., Šremr J.* Some boundary value problems for first order scalar functional differential equations. – Brno: Masaryk University, 2002. – 300 p.
10. *Dilna N., Ronto A.* Unique solvability of a non-linear non-local boundary-value problem for systems of non-linear functional differential equations // Math. Slovaca. – 2010. – **60**, No 3. – P. 327–338.

*Інститут математики НАН України, Київ*
*Математичний інститут САН,*
*Братислава, Словакія*

*Надійшло до редакції 14.12.2010*

**N. Z. Dilna**

## About symmetric solutions of a class of functional differential equations

*We show that the solvability of a problem on a certain class of symmetric solutions of non-linear differential equations can be studied by using the theory of boundary-value problems.*