



УДК 51-76:574.5:528.8

© 2011

**М. В. Артюшенко, Л. Н. Зуб, Л. В. Подгородецкая,**  
член-корреспондент НАН Украины **А. Д. Федоровский**

**Мультифрактальный анализ биоразнообразия  
и ценотической структуры сообщества растений  
по данным дистанционного зондирования**

*Обґрунтовано використання мультифрактальної моделі опису різноманіття вищої водної рослинності водоєм. На прикладі оз. Світязь розглянуто застосування методів дистанційного зондування як ефективного засобу збирання просторово-розподілених даних для аналізу структури угруповання асоціацій і верифікації моделі. Наведено опис різноманіття фітоценозів макрофітів озера, визначено мультифрактальні властивості структури угруповань.*

В настоящее время исследования, объединенные в рамках общей проблемы “биоразнообразие”, стали предметом активной научно-практической деятельности. Этому способствовала ратификация многими странами “Конвенции о биологическом разнообразии” и дальнейшее участие в разработке и реализации международных и национальных программ исследования и охраны биоразнообразия. Эффективность проведения практических исследований по различным направлениям этой проблемы во многом определяется уровнем развития и применения современных информационных технологий единовременного сбора пространственно-распределенных данных о состоянии геоэкологических систем, а также адекватных целям исследований современных математических методов описания и анализа различных аспектов разнообразия. Общепринятая в настоящее время широкая и многоуровневая трактовка биоразнообразия включает характеристики структурной организации и функционирования живого вещества на всех его уровнях от молекулярного, организменного и популяционного до экосистемного и биосферного. Разнообразие — это понятие, которое имеет отношение к размаху изменчивости или различий между некоторыми множествами или группами объектов. Термин “биоразнообразие” обычно используется для описания количества разновидностей и изменчивости живых организмов. Биологический смысл термина раскрывается через представления о внутривидовом, видовом и *ценотическом* (надвидовом) разнообразии жизни.

Предметом дальнейшего рассмотрения является ценотическое разнообразие. Для того, чтобы избежать излишней формализации задачи и заложить методологическую основу для практического применения мультифрактального формализма в сочетании с дистанционными методами зондирования объектов с космических аппаратов, изложение материала и верификация математической модели проводится на содержательном примере — анализируется разнообразие фитоценозов макрофитов мелководий (глубины до 3 м) оз. Свитязь. Основной таксономической единицей (как и в геоботанике (фитоценологии)) в нашем примере является растительная ассоциация, как наиболее мелкая, хорошо различимая единица растительного покрова. Сообщества различных ассоциаций естественным образом группируются в микроландшафты мелководий водоема и части прилегающей суши. Микроландшафты хорошо дешифрируются на космических снимках как кластеры — сконцентрированные на акватории группы взаимосвязанных сообществ ассоциаций, характеризующиеся внутренней однородностью и внешней изолированностью. За единицу площади в примере принята площадь проекции пикселя цифрового изображения на изучаемую поверхность акватории и прилегающей суши. Исходные данные по проведенной ценотической классификации и наземным заверкам сведены в табл. 1. Следует отметить, что Р. Маргалев одним из первых высказал предположение о существовании фрактальной самоорганизации структуры биотических сообществ [1]. Многочисленные последующие исследования, например [2–4], подтверждают наличие такого вида самоорганизации, однако при установлении фрактальных свойств природных систем в полевых условиях возникают трудности, связанные с определением масштабов, при которых выполняются инвариантные свойства [5]. Рассмотренная ниже мультифрактальная модель в сочетании с методом дистанционного зондирования позволяет во многих случаях преодолеть эти трудности.

**Постановка задачи.** Исследуется пространственно-распределенная система (растительный покров) как множество (сообщество), состоящее из элементов. Элементы множества будем называть экземплярами (ассоциациями). Экземпляры определенным образом группируются в сообщества и располагаются в пространстве, образуя пространственную структуру, которая в общем случае может быть хаотической. Экземпляры можно разделить по типам (типы ассоциаций). Такая величина, как численность экземпляров, допускает многозначную трактовку и зависит от принятого определения термина “экземпляр”. Для некоторых биологических сообществ натуральную численность определить просто невозможно, кроме того, численность является удобным, но не слишком адекватным показателем для оценки потребности вида в ресурсах. В частности, Р. Уиттекер [6] отмечает, что для сравнения между собой растений могут быть использованы такие показатели, как: покрытие, биомасса, встречаемость, площади оснований, плотности. В модели анализа разнообразия ценотического сообщества за экземпляр могут быть приняты следующие конструкции: 1) среднее количество особей ассоциации  $j$ -го типа, приходящееся на достаточно малую фиксированную часть площади биотопа, принятую за единицу измерений количества особей; 2) достаточно малая часть площади, заполненная ассоциациями  $j$ -го типа и принятая за единицу измерений покрытия биотопа. Использование второго метода определения численности экземпляров в сочетании с методом дистанционного зондирования рассматривается далее на этапе верификации модели. За единицу измерений покрытия принимается площадь проекции пикселя на биотоп, вычисления проводятся с точностью до сотых долей проекции пикселя.

Введем в рассмотрение ограниченную, открытую область  $\Omega \subset E^2$  евклидова пространства (плоскость изображения) с координатами  $x \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , в которую вложено точечное мно-

жество

$$B = \bigcup_{j=1}^n B_j, \quad B_j \subset B, \quad (1)$$

где  $j$  — порядковый номер типа ассоциации в реестре (см. табл. 1),  $n$  — общее количество типов. Будем в дальнейшем именовать точкой области  $\Omega$  отображение экземпляра на плоскость изображения. Покроем множество  $B$  прямоугольником  $A$  минимального размера.

Таблица 1. Характеристики микроландшафтов и ценогического состава оз. Свитязь

| Номер $j$   | Ассоциация                   | Пл*, % | ПП** |
|---|------------------------------|--------|------|
| I. Прибрежные кустарниково-болотные микроландшафты (глубина 0–0,5 м)      |                              |        |      |
| 1   | Phragmito-Caricetum          | 50     | 100  |
| 2   | Calistegio-Phragmitetum      | 20     | 100  |
| 3   | Caricetum acuta              | 10     | 100  |
| 4   | Caricetum vulpina            | 10     | 100  |
| 5   | Cariceto-Salicetum albae     | 5      | 100  |
| 6   | Thelypteridi-Phragmitetum    | 3      | 100  |
| 7   | Glycerietum maximae          | 2      | 90   |
| II. Водно-болотные микроландшафты (глубина 0–0,5 м)                       |                              |        |      |
| 2   | Calistegio-Phragmitetum      | 80     | 100  |
| 6   | Thelypteridi-Phragmitetum    | 5      | 100  |
| 8   | Lemno-Phragmitetum           | 5      | 100  |
| 9   | Typhetum angustifoliae       | 4      | 70   |
| 10  | Typhetum latifoliae          | 3      | 80   |
| 7   | Glycerietum maximae          | 2      | 90   |
| III. Деградированные микроландшафты песчаных мелководий (глубина 0–1,0 м) |                              |        |      |
| 11  | Potameto pectinati-Charetum  | 40     | 10   |
| 12  | Charetum fragilis            | 20     | 5    |
| 13  | Charetum asperae             | 20     | 5    |
| 14  | Potametum pectinati          | 20     | 5    |
| IV. Микроландшафты песчаных мелководий (глубина 0–1,0 м)                  |                              |        |      |
| 12  | Charetum fragilis            | 30     | 90   |
| 13  | Charetum asperae             | 20     | 90   |
| 15  | Eleocharitetum palustris     | 20     | 60   |
| 11  | Potameto pectinati-Charetum  | 10     | 80   |
| 14  | Potametum pectinati          | 7      | 60   |
| 16  | Scirpetum lacustris          | 5      | 80   |
| 17  | Potametum trichoides         | 3      | 50   |
| 18  | Equisetetum fluviatilis      | 3      | 60   |
| 19  | Potametum gramine            | 2      | 40   |
| V. Микроландшафты литоральных зарослей тростника (глубина 1,0–2,0 м)      |                              |        |      |
| 20  | Phragmitetum communis        | 100    | 60   |
| VI. Микроландшафты широколиственных рдестников (глубина 1,0–3,0 м)        |                              |        |      |
| 21  | Potametum perfoliati         | 40     | 60   |
| 22  | Potametum lucentis           | 30     | 70   |
| 23  | Potameto perfoliati-Charetum | 30     | 80   |
| VII. Акватория без макрофитов   |                              |        |      |
|   |                              | —      | —    |

\*Пл. — площадь ассоциаций, приведена в процентах от площади проекции пикселя на указанный микроландшафт. \*\*ПП — проективное покрытие на грунт микрофитами указанного микроландшафта.

Сеткой размером  $m \times m$  отсчетов разобьем прямоугольник на  $m^2$  ячеек. Ячейки, занятые точками множества  $B$ , пронумеруем  $k = \overline{1, K}$ , где  $K$  — общее количество занятых ячеек. Каждая  $k$ -я ячейка области является образом отображения на область  $\Omega$  соответствующей ей ячейки (прообраз) на биотопе и содержит полный набор данных, достаточный для подсчета ценотического разнообразия в рассматриваемой ячейке. В каждой ячейке с номером  $k$  содержится  $N(k)$  точек (экземпляров) — размер выборки, которые согласно выражению (1) разделены на  $n$  типов (типов ассоциаций) и представлены в количестве  $N_j(k)$  точек (экземпляров)  $j$ -го типа. Распределение экземпляров (ассоциаций) по типам в ячейке можно описать  $n$ -мерным вектором

$$\tilde{P}(k) = \{N_j(k) \mid j = \overline{1, n}; k = \overline{1, K}\} \quad (2)$$

или нормализованным относительно общего количества экземпляров в ячейке вектором  $P(k, N)$ , который будем называть вектором относительного распределения экземпляров по типам, значения компонентов этого вектора зависят как от номера  $k$  ячейки, так и от количества экземпляров  $N$  (размер выборки) в этой ячейке. Компоненты  $p_j(k)$  вектора  $P(k, N)$  задают относительную значимость (представленность)  $j$ -го типа ассоциации в ячейке с номером  $k$ :

$$p_j(k) = \frac{N_j(k)}{N(k)}; \quad j = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, K}; \quad \sum_{j=1}^n p_j(k) = 1. \quad (3)$$

Выражение (3) определяет локальное распределение, которое зависит от таких параметров, как: размер выборки  $N(k)$  — общее количество точек (экземпляров) в  $k$ -й ячейке; абсолютная представленность  $j$ -го типа в  $k$ -й ячейке —  $N_j(k)$ . Единственной содержательной характеристикой распределения будет  $K$  наборов из  $n$  чисел, т. е. векторы  $P(k, N)$ . Располагая информацией для подсчета компонентов всех локальных векторов, можно определить один глобальный вектор ценотического распределения, т. е. вычисляемый с площади всего биотопа и характеризующий распределение ассоциаций по типам:

$$p_j(\text{total}) = \frac{\left[ \sum_{k=1}^K N_j(k) \right]}{\left[ \sum_{k=1}^K N(k) \right]}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Вектор (4), так же как и локальные векторы, будет зависеть от размера выборки, в данном случае от предполагаемых границ биотопа. Из выражений (3), (4) следует, что в общем случае векторы относительной значимости ассоциаций покомпонентного сложения не допускают, за исключением случаев, когда  $N(c) = N(a)$ .

Большинство индексов видового разнообразия, ставших уже классическими, можно рассматривать как свертки компонентов локального вектора относительной значимости (3) или глобального вектора (4), например:  $H = - \sum_{j=1}^n p_j \ln(p_j)$  — информационный индекс Шеннона,  $C = \sum_{j=1}^n p_j^2$  — индекс доминирования Симпсона. Индексы так же зависят от количества

типов ассоциаций  $n(N)$ , попавших в ячейку, и от размеров выборки  $N$  и не решают проблему применения выборочного метода, который подразумевает изъятие выборок из того или иного изучаемого сообщества с целью получения информации о его ценоотическом составе, разнообразии и других характеристиках. Корректное применение выборочного метода в каждом конкретном случае нуждается в обосновании: репрезентативности полученных выборок, размере выборки, их количестве, достаточном для характеристики структуры сообщества, и, наконец, как сравнивать между собой выборки различного размера.

Одним из структурных свойств системы является ценоотическое разнообразие, которое проявляется в закономерности формирования разнообразия от локального уровня до глобального, приближающегося к размерам всего биотопа. Анализ разнообразия проводится нами для определения характеристик структуры, которые инвариантны относительно масштаба изучения разнообразия (размеров выборок). Таким образом, для достижения целей исследований необходимо: построить математическую модель описания разнообразия в терминах, инвариантных относительно размера выборки  $N$  и места извлечения пробы  $k$  в пределах биотопа, определить методы вычислений характеристик разнообразия по данным дистанционного зондирования с космических аппаратов, провести верификацию модели.

**Мультифрактальная модель ценоотического разнообразия.** Формализуем термин разнообразие, приняв за основу следующее вербальное определение. *Разнообразие — это понятие, которое имеет отношение к размаху изменчивости или различий между некоторыми множествами или группами объектов* [7]. Формализация разнообразия связана с математическими методами описания такого свойства системы, как вариабельность (размах изменчивости) различных типов ассоциаций на биотопе. Для определения вариабельности различных типов ассоциаций введем векторную  $\mu$ -меру, позволяющую отличить неравномерное распределение точек по подмножествам  $B_j$  от равномерного и оценить степень отклонения от равномерного распределения экземпляров по типам.

Построение модели проводится с использованием общих положений теории фракталов [8], одним из которых при исследовании фрактальных множеств является наличие степенной зависимости между размером и мерой, а для мультифрактальных множеств — степенной зависимости между компонентами векторной меры и размером. Построение мультифрактальной векторной меры  $\mu$  использует идею фрактальной меры, распространяя ее на связанные фрактальные подмножества, каждое из которых изменяется по степенному закону с различными показателями степени  $\tau(q)$ . В рассматриваемой модели размером выступает размер выборки  $N$ , а компонентами векторной меры  $\mu$  — величины  $\mu_q(N, q)$ , для которых при  $N \rightarrow R$ , где  $R$  — достаточно большое целое число, должно выполняться это условие. Проверка выполнения этих закономерностей составляет важный этап верификации модели и является первым необходимым, но недостаточным условием, позволяющим рассматривать ценоотическое сообщество и растительный покров (точечное множество  $B$ ) как мультифрактал.

Для произвольно взятой ячейки с номером  $k$  и размером выборки  $N$  (далее везде обозначение номера  $k$  опущено) определим векторную меру  $\mu$ :

$$\mu_q(N, q) = \sum_{j=1}^n p_j^q = \sum_{l=1}^{L(N)} p_l^q \propto N^{\tau(q)}, \quad q \in [q_{\min}, q_{\max}] \subset \mathbb{Z}, \quad (5)$$

где  $j$  — порядковый номер типа ассоциации в реестре;  $n$  — общее количество типов ассоциаций, найденных на биотопе и занесенных в реестр (см. табл. 1);  $L(N)$  — количество  $L$

фактически найденных типов ассоциаций в ячейке как функция от размера выборки  $N$ ;  $q_{\min}$ ,  $q_{\max}$  — целые числа, которые находятся в процессе исследования биотопа. В этом определении принято дополнительное условие, что при  $p_j = 0$  и  $q = 0$   $p_j^q = 0$ . Количество компонентов  $q$  меры  $\mu$  определяется количеством введенных в рассмотрение целочисленных показателей степени  $q$ . Мера (5) не изменит своего значения, если указанные операции производить только для  $p_j \neq 0$ , т. е. над значениями относительных значимостей фактически найденных в ячейке типов ассоциаций с новыми порядковыми номерами  $l$  в количестве  $L(N)$ , зависящем от размеров выборки.

Рассмотрим случай равномерного распределения экземпляров по найденным в ячейке типам ассоциаций. Количество экземпляров разных типов равно между собой и составляет  $N_l = N/L(N)$ , равны между собой и значения относительных распределений экземпляров по типам так, что на каждый  $l$ -й найденный в ячейке тип ассоциации приходится  $p_l = 1/L(N)$ , и формула (6) подсчета меры, с учетом нижеследующих пояснений, примет вид

$$\mu_q(N, q) = \sum_{j=1}^n p_j^q = \sum_{l=1}^{L(N)} p_l^q = L(N)p_l^q = \frac{L(N)}{(L(N))^q} = (L(N))^{(1-q)} = N^{D(1-q)} = N^{\tau(q)}. \quad (6)$$

Показатель  $D$  называется размерностью носителя мультифрактала. Носителем в модели служит множество ассоциаций из генерального реестра, мерой — количество обнаруженных ассоциаций  $L$  при размерах выборки, равной  $N$ . Величина размерности  $D$  находится в пределах  $0 \leq D \leq 1$ , что согласуется с формулой накопления видового богатства  $L = N^D$ , введенной Маргалевым, где  $D$ , как принято в экологической литературе, называется индексом или показателем Маргалева и обозначается через  $k$ . Из равенств (6) следует, что в случае равномерного распределения степенная зависимость  $\tau(q) = D(1-q)$  линейно зависит от  $q$ . При другом виде распределений, когда имеет место невыравненность количества экземпляров по типам ассоциаций, зависимость становится нелинейной. На рис. 1 показан нелинейный характер зависимости  $\tau(q)$ , полученный при исследовании распределений ассоциаций по типам на биотопе оз. Свитязь.

*Спектр обобщенных фрактальных размерностей.* Для оценки отклонений распределений от равномерного воспользуемся обобщенными мультифрактальными размерностями  $D_q$ ,

$$D_q = \frac{\tau(q)}{1-q}, \quad q \in [q_{\min}, q_{\max}] \subset \mathbb{Z}, \quad \tau(q) = \lim_{N \rightarrow R} \frac{\ln \mu_q(N, q)}{\ln N}, \quad (7)$$

где функция  $\tau(q)$  определяется в пределе больших численностей  $N$ , мера  $\mu_q(N, q)$  — выражением (5). В выражение (7) введен элиминирующий множитель  $1/(1-q)$  с таким расчетом, что при определении  $\tau(q)$  из выражений (6) для случая равномерного распределения все обобщенные размерности становятся равными размерности носителя мультифрактала  $D_q = D$ , а сам мультифрактал вырождается в монофрактал (однородный фрактал). Если распределение экземпляров по типам ассоциаций неодинаково, то фрактал является неоднородным, т. е. мультифракталом, и для его описания используют спектр обобщенных фрактальных размерностей  $D_q$ . Согласно определению меры (5), при  $q \rightarrow +\infty$  основной вклад в сумму относительных значимостей типов ассоциаций вносят доминирующие типы, характеризующиеся наибольшими значениями  $p_l$ , а при  $q \rightarrow -\infty$  основной вклад вносят составляющие суммы с малыми значениями  $p_l$ , т. е. редкие типы ассоциаций. Следовательно, функция  $D_q$ , определенная выражениями (7), (5), показывает, насколько неоднородным

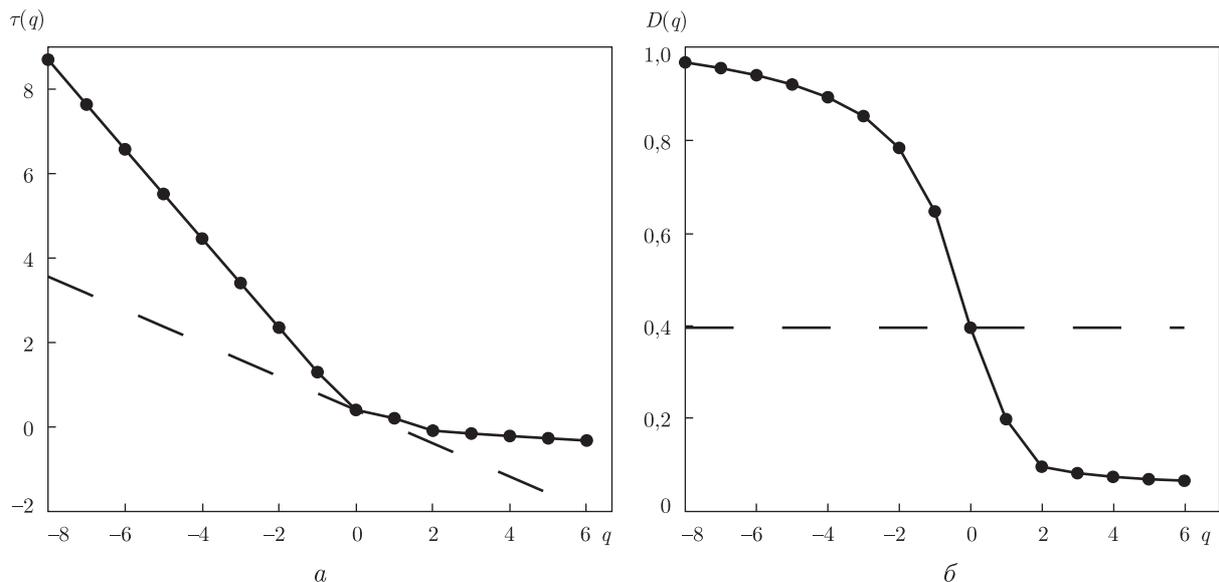


Рис. 1. Оценка варибельности ценогического разнообразия по мультифрактальным характеристикам распределения ассоциаций растений по типам, оз. Связь:  $a - \tau(q)$ ;  $b -$  спектр обобщенных размерностей. Штриховая линия — уровень равномерного распределения ассоциаций по типам

является распределение ассоциаций по типам и насколько это распределение отличается от равномерного. Функция (7) спектра обобщенных размерностей  $D_q$  является невозрастающей функцией и для нее должно выполняться условие

$$D_{q_1} \geq D_{q_2} \quad \forall q_1 < q_2 \quad q_1, q_2 \in [q_{\min}, q_{\max}] \subset \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Выполнение соотношений (8) является вторым необходимым условием применимости мультифрактальной модели.

Рассмотрим, какой экологический смысл в описании ценогического разнообразия имеют некоторые обобщенные (фрактальные) размерности  $D_q$ .

*Фрактальная размерность  $D_0$*  тождественна индексу Маргалефа  $D \equiv D_0$ , определяет закон, по которому происходит накопление ценогического богатства в рассматриваемом биотопе  $L(N) = N^D$ . Действительно, при  $q = 0$  из определения меры (5) приходим к равенству 1:  $\mu_0(N, 0) = L(N)$ . По другим формулам из (7) определяем  $D_0 = \tau(0)$  и, подставляя это значение в выражение для  $\tau(q)$ , после преобразований находим равенство 2:  $\mu_0(N, 0) \approx N^{D_0}$ . Сопоставляя эти два равенства, приходим к соотношению  $L(N) = N^{D_0}$ , т. е.  $D_0 = D$  является размерностью носителя мультифрактального множества, показателем степени в законе накопления ценогического богатства (индексом Маргалефа). Размерность  $D_0$  не несет информации о распределении экземпляров (ассоциаций) по типам — это хаусдорфова размерность множества.

*Фрактальную размерность  $D_1$*  принято называть информационной размерностью. При  $q = 1$ , в силу нормировки компонентов вектора относительной значимости меры (5), вычисления по формуле (7) приводят к результату  $\tau(1) = 0$ , и при нахождении  $D_1$  возникает неопределенность. Раскрытие этой неопределенности при условии  $q \rightarrow 1$  приводит к особому случаю вычислений для  $D_1$ :

$$D_1 = \lim_{N \rightarrow R} \left( - \sum_{l=1}^{L(N)} \frac{p_l \ln p_l}{\ln N} \right). \quad (9)$$

Сравнивая выражения (7), (9), находим, что при  $q = 1$  логарифм меры равен

$$\ln \mu_1(N, 1) = - \sum_{l=1}^{L(N)} (p_l \ln p_l) = H, \quad (10)$$

где  $H$  — информационный индекс Шеннона. Если под  $p_l$  понимать вероятность принадлежности экземпляра к  $l$ -му типу ассоциации, формула (10) полностью идентична определению энтропии, используемому в теории информации — как мера неопределенности сообщений; в теории вероятностей — как мера неопределенности опыта, испытания с различными исходами. И в том и другом случае энтропия принимает наибольшее значение для равновероятного распределения, когда все вероятности  $p_l$  одинаковы и мера неопределенности становится максимальной для данного размера выборки  $N$ . Связь между информационной размерностью  $D_1$  и информационным индексом Шеннона  $H$  выражается соотношением  $D_1 \approx H / \ln N$ , которое может быть принято за точное равенство при условии выполнения линейной зависимости между логарифмом размера выборки и логарифмом меры:

$$\ln \mu_q(N, q) = b + \tau(q) \ln N; \quad \forall N \in [N_{\min}, N_{\max}]; \quad b, \tau(q) = \text{const}, \quad (11)$$

где  $b$  — коэффициент пропорциональности, введенный в выражение (5).

Фрактальная размерность  $D_2$  позволяет оценивать наличие в ценотической структуре растительного покрова доминирующих типов ассоциаций. Последовательное раскрытие выражений (5), (7) при значении  $q = 2$  устанавливает связь  $D_2$  с индексом доминирования Симпсона  $C$ ;  $C \approx N^{-D_2}$ . Обобщенные размерности  $D_q$  являются структурными инвариантами сообщества и не зависят от размеров выборки и количества типов ассоциаций, что позволяет сравнивать между собой однотипные системы. В то же время индексы  $H$ ,  $C$  существенно зависят от этих характеристик.

**Верификация мультифрактальной модели ценотического разнообразия** проводилась на оз. Свистязь Шацкого национального природного парка. Площадь озера 27,5 км<sup>2</sup>, максимальная глубина 58 м, прозрачность воды до 5 м. Природные ландшафтные комплексы водоема имеют четко выраженную микроландшафтную кластерную структуру — сконцентрированные на мелководьях группы взаимосвязанных ассоциаций. По данным изучения структуры микроландшафтов проведена их типизация и выполнено в этих терминах описание растительного покрова. Такой надфитоценотический уровень описания растительного покрова является определяющим фактором для последующего применения методов зондирования для изучения ценотического разнообразия на уровне ассоциаций. Микроландшафты хорошо различимы на многоспектральных снимках, выполненных с космических аппаратов Landsat TM и ETM+ (июль–август 1988–2010 гг.). Наземными заверками с площадей, равных проекции пикселя цифрового изображения (30×30 м) на изучаемую поверхность, определялся процентный состав покрытия грунта сообществами ассоциаций каждого типа микроландшафтов. При дешифрировании снимков использовались: неконтролируемая классификация по алгоритму ISODATA, расчет нормализованного дифференциального вегетационного индекса NDVI и температуры поверхности водоема. В результате дешифрирования были установлены границы микроландшафтов и сформировано в плоскости изображение точечного множества  $B$ , как объединение  $n = 23$  типов ассоциаций с номерами  $j$

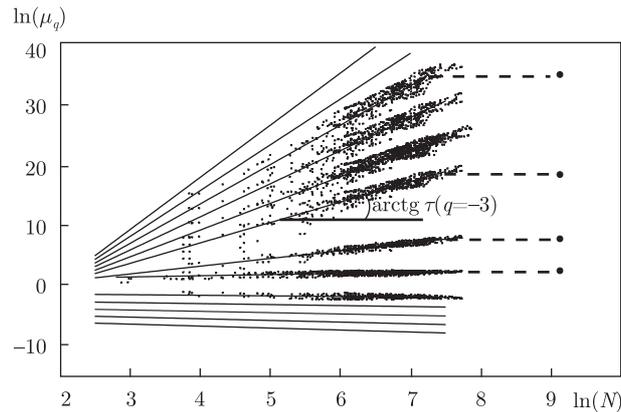


Рис. 2. Зависимости компонент векторной меры  $\mu_q$  распределений ассоциаций по типам (показаны линиями регрессий и точками-пробами) от размера выборки  $N$  в билогарифмической системе координат для значений  $q = \{-8, -7, \dots, -3, -1, 1, 2, \dots, 6\}$  (сверху вниз). Оз. Свитязь, июль-август 1988–2010 гг. Штриховая линия — участок насыщения, все ассоциации найдены:  $\ln N > \ln R \approx 7,5$ ;  $N$  — размер выборки в пикселях

и наименованиями, приведенными в табл. 1. В соответствии с алгоритмом, изложенным при постановке задачи, осуществлялось покрытие биотопа прямоугольником  $A$  с последующей разбивкой каждой из его сторон на  $m = 32$  отсчета и образованием  $m \times m$  ячеек, для каждой из которых определяли: площадь, занимаемую сообществами ассоциаций, количество их экземпляров по типам, т. е. вектор  $P(k)$ ,  $k = \overline{1, K}$ , локальных распределений экземпляров (ассоциаций) по типам. Эта информация является исходной для анализа ценотического разнообразия растительного покрова оз. Свитязь, исследования мультифрактальных свойств распределений, т. е. ценотической структуры. Вычисляемые значения вектора локальных распределений позволяют моделировать взятие проб с различных участков биотопа и определять по соотношению (3) компоненты вектора  $P(k, N)$  относительных локальных распределений. Изменение размеров выборок осуществляется изменением размеров ячеек.

*Интерпретация мультифрактальных характеристик ценотического разнообразия.* Существование мультифрактальной структуры сообщества ассоциаций растений оз. Свитязь устанавливается проверкой выполнения двух необходимых упомянутых ранее условий распределения ассоциаций по типам: 1) степенная зависимость роста компонент мультифрактальной меры  $\mu_q$  от размера выборки  $N$ ; 2) невозрастающий вид функции спектра обобщенных размерностей  $D(q)$  (см. рис. 1, б). Выполнение условия 1 показано на графиках рис. 2, построенных в билогарифмической системе координат по соотношению (11). Размеры площадей (выборок) на графиках приведены в пикселях, а известные размеры проекции пикселя допускают пересчет в другие единицы измерений исходных данных. Линейный характер зависимостей логарифма компонент векторной меры  $\mu_q$  распределений ассоциаций по типам от логарифма размера выборки  $N$  верифицирует наличие мультифрактальной структуры фитоценозов озера. При построении функциональных зависимостей и их графиков применялся метод линейной регрессии, с количеством проб более 1,5 тыс. Наряду с линиями регрессий для некоторых компонент  $\mu_q$  (см. рис. 2) точками изображены пробы. Значения функции  $\tau(q)$  (см. рис. 1, а) определялись для целочисленных значений  $q$  на интервале  $[-8, 6]$  как угловые коэффициенты линейных регрессий, которые геометрически соответствуют тангенсам углов наклона линий регрессии к оси абсцисс (см. рис. 2). След-

ствием наличия мультифрактальной структуры сообщества ассоциаций растений является инвариантность характеристик  $\tau(q)$  и функционально связанных с ними характеристик спектра обобщенных размерностей  $D(q)$  относительно размеров выборок и места взятия проб, что непосредственно подтверждено экспериментами на оз. Свитязь (см. рис. 2). Индекс богатства ассоциаций (видового богатства по Маргалёфу) для озера равен  $k = D_0 = 0,396$ . Этот индекс теоретически может изменяться в пределах от 0, если на биотопе представлена растительность только одного типа ассоциаций, до 1 — в том случае, если каждый новый экземпляр, добавленный в выборку, является новым типом ассоциации. На рис. 1 приведена линия максимальной энтропии распределения ассоциаций по типам. При сравнении разнообразия в сообществах фрактальной структуры наибольшим разнообразием будет обладать структура, характеристики которой имеют наименьшие отклонения от линии равных распределений: величина  $(D_0 - D_1)$  неотрицательна и минимальна. Неотрицательная величина  $(D_0 - D_2)$  характеризует доминирование ассоциаций в структуре так, что большим значениям этой разности соответствует большее доминирование, а неотрицательная величина  $(D_{-1} - D_0)$  характеризует наличие редких групп таксонов в структуре.

1. Маргалёф Р. Облик биосферы. — Москва: Наука, 1992. — 254 с.
2. Borda-de-Aqua L., Hubell S. P., McAllister M. Species-area curves, diversity indices, and species abundance distributions: A multifractal analysis // Amer. Natur. — 2002. — **159**. — P. 138–155.
3. Alados C. L., El Aich A., Komac B. et al. Self-organized spatial patterns of vegetation in alpine grasslands // Ecol. model. — 2007. — **201**. — P. 233–242.
4. Иудин Д. И., Гелашвили Д. Б., Розенберг Г. С. Мультифрактальный анализ структуры биотических сообществ // Докл. АН. — 2003. — **389**, № 2. — С. 279–282.
5. Артюшенко М. В., Подгородецкая Л. В., Федоровский А. Д. Фрактальный анализ спектрограмм растительного покрова в задачах природопользования // Доп. НАН України. — 2010. — № 8. — С. 113–119.
6. Уиттекер Р. Эволюция и измерение видового разнообразия // Антология экологии / Состав. и коммент. Г. С. Розенберга. — Тольятти: ИЭВБ РАН, 2004. — С. 297–330.
7. Лебедева Н. В., Дроздов Н. Н., Криволицкий Д. А. Биоразнообразие и методы его оценки. — Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1999. — 94 с.
8. Федер Е. Фракталы. — Москва: Мир, 1991. — 254 с.

ГУ “Научный центр аэрокосмических исследований Земли ИГН НАН Украины”, Киев  
Институт космических исследований НАН  
и НКА Украины, Киев  
Научный центр экомониторинга и биоразнообразия  
мегаполиса НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 30.12.2010

**M. V. Artiushenko, L. N. Zub, L. V. Pidgorodetska,**  
Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. D. Fedorovsky**

### **Multifractal analysis of the biodiversity and the cenotic structure of a community of plants by remote sensing data**

*The proof of the multifractal model application for describing the diversity of communities of higher aquatic plants in reservoirs is given. On the example of Lake Svityaz, the application of remote sensing techniques is considered as an effective means to collect spatially distributed data to analyze the structure of plant community associations and to perform the model verification. The description of the diversity of the phytocenoses of macrophytes of Lake Svityaz is given, and the multifractal properties of a plant community structure are demonstrated.*