



УДК 539.182+518.5+517.986.69

© 2011

Член-кореспондент НАН України В. А. Даниленко,
С. І. Скуратівський

Хвильові розв'язки нелокальної моделі блокового середовища

Розглянуто хвильові поля в блочних середовищах, яким притаманний розривний характер швидкостей та напруг між структурними елементами. Показано, що осереднена математична модель такого середовища в окремих випадках допускає ряд точних та асимптотичних розв'язків. У загальному випадку з використанням методів якісного аналізу нелінійних динамічних систем встановлено, що модель має розв'язки у вигляді хвиль перемикання з різними типами фронтів, періодичні, кноїдальні та відокремлені хвилі.

Згідно з експериментальними результатами, поведінка геоматеріалів за нерівноважних умов пов'язана в основному з проявами особливостей їх мікроструктури [1, 2]. Опис стану таких середовищ у рамках класичної механіки суцільного середовища наптовхується на відомі труднощі, що стимулює потребу в створенні нових математичних моделей, які повинні враховувати дискретність середовища, ієрархічну внутрішню структуру, нелокальну взаємодію між структурними елементами, їх ступенями вільності тощо.

У даному повідомленні розглядається блокове геосередовище з розривами швидкостей між сусідніми блоками. Для такого середовища закони збереження маси та імпульсу в континуальному наближенні можна записати у вигляді [3]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + (1 + \beta) \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (1 + 2\beta) v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \gamma \rho, \quad (1)$$
$$\tau (p_t + v p_x - \chi \{ \rho_t + v \rho_x \}) = \kappa \rho - p,$$

де ρ , p й v — локальні значення густини, тиску й швидкості у деякій точці середовища; β — параметр, пов'язаний з розмірами взаємодіючих блоків; $\gamma \rho$ — зовнішня масова сила; τ — час релаксації, а χ , κ — пропорційні квадратам рівноважної та замороженої швидкості звуку в середовищі.

Доданки з параметром β у моделі (1) пов'язані з урахуванням впливу на виділений структурний елемент сусідніх блоків. Тому система (1) містить опис нелокальної взаємодії

блоків у рівняннях нерозривності та руху, на відміну від більш традиційного врахування нелокальності в рівнянні стану [4–6].

Розглянемо структуру множини хвильових розв'язків системи (1)

$$v = U(\omega) + D, \quad \rho = \rho_0 \exp[\xi t + S(\omega)], \quad p = \rho Z, \quad \omega = x - Dt, \quad D, \xi = \text{const} \quad (2)$$

залежно від параметра β .

Динамічна система, яка описує вирази (2), має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta U' &= (\kappa - \tau(\gamma U + \xi Z) - Z)U, \\ \Delta Z' &= \tau(1 + \beta)(\chi - Z)(\gamma U + \xi Z) + (-U^2 + Z + \beta(Z - 2DU - 2U^2))(\kappa - Z), \end{aligned} \quad (3)$$

де $\Delta = \tau U[(1 + \beta)\chi - U(U + 2\beta(U + D))]$.

Для цієї системи знайдено ряд точних та асимптотичних розв'язків.

Розглянемо асимптотичний випадок, коли $|U|$ й $|Z|$ є малими. Тоді систему рівнянь (3) можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \mu_1 U + \mu_3 U^2 + \mu_4 UZ \equiv F_1, \\ \dot{Z} &= \alpha_1 U + \alpha_2 Z + \alpha_3 U^2 + \alpha_4 UZ + \alpha_5 Z^2 \equiv F_2, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$(\dot{\cdot}) = \frac{d(\cdot)}{dy} = \Delta \frac{d(\cdot)}{d\omega}, \quad \mu_1 = \kappa, \quad \mu_3 = -\gamma\tau\varepsilon, \quad \mu_4 = -(1 + \tau\xi)\varepsilon;$$

$$\alpha_1 = (1 + \beta)\chi\gamma\tau - 2\beta D\kappa, \quad \alpha_2 = (1 + \beta)(\kappa + \chi\tau\xi), \quad \alpha_3 = -(1 + 2\beta)\kappa\varepsilon,$$

$$\alpha_4 = (2\beta D - (1 + \beta)\gamma\tau)\varepsilon, \quad \alpha_5 = -(1 + \beta)\varepsilon(1 + \tau\xi), \quad \varepsilon \ll 1 \text{ — малий параметр.}$$

Загального розв'язку динамічної системи (4) отримати для довільних значень параметрів не вдається. Але при певних обмеженнях на параметри цю систему можна проінтегрувати та отримати точні розв'язки.

Розв'язок 1. Якщо

$$\alpha_5 \mu_1 - \alpha_2 \mu_4 = 0 \Rightarrow \mu_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_5} \mu_4 \equiv \varphi \mu_4,$$

$$\alpha_3 \mu_4^4 - \alpha_4 \mu_3 \mu_4 + \alpha_5 \mu_3^2 = 0 \Rightarrow \mu_3 = \frac{\alpha_4 \pm \sqrt{\alpha_4^2 - 4\alpha_3 \alpha_5}}{2\alpha_5} \mu_4 = \lambda \mu_4,$$

$$2\alpha_5 \mu_1 \mu_3 - \alpha_4 \mu_1 \mu_4 - \alpha_2 \mu_3 \mu_4 + \alpha_1 \mu_4^2 = 0 \Rightarrow \alpha_5 \varphi \lambda - \alpha_4 \varphi + \alpha_1 = 0,$$

то система (4) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \mu_1 U + \mu_3 U^2 + \mu_4 UZ \equiv UG, \\ \dot{Z} &= \frac{\mu_4 \alpha_2 - \alpha_5 \mu_1 + U(\mu_4 \alpha_4 - \mu_3 \alpha_5) + \mu_4 \alpha_5 Z}{\mu_4^2} G = (a_0 + Ua_1 + Za_2)G. \end{aligned} \quad (5)$$

Отже, із співвідношень (5) отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dZ}{dU} = \frac{a_0 + Ua_1 + Za_2}{U}.$$

Його розв'язок

$$Z = \text{const } U^{a_2} + \frac{a_1}{1 - a_2} U - \frac{a_0}{a_2}.$$

Розв'язок 2. Помножимо перше рівняння системи (4) на параметр φ_1 , друге — на φ_2 та додамо ці вирази. Отримаємо $(\varphi_1 U + \varphi_2 Z)' = \varphi_1 F_1 + \varphi_2 F_2$. Нехай $\varphi_1 U + \varphi_2 Z = W$. Тоді це рівняння можна проінтегрувати, якщо

$$(\varphi_1 U + \varphi_2 Z)' = \varphi_1 F_1 + \varphi_2 F_2 \equiv AW^2 + BW + C, \quad (6)$$

де A, B, C — сталі, які потребують визначення.

Аналізуючи умови сумісності для рівняння (6), встановлено, що $B = \alpha_2, C = 0$.

Якщо $\begin{vmatrix} \mu_1 - \alpha_2 & \alpha_1 \\ \mu_4 - 2\alpha_5 & \alpha_4 \end{vmatrix} = 0$, то параметри $\varphi_1 = \alpha_1, \varphi_2 = \alpha_2 - \mu_1$. Звідси $A = \frac{\alpha_5}{\varphi_2} = \frac{\alpha_5}{\alpha_2 - \mu_1}$. Параметри системи (4) повинні задовольняти також додатковій умові

$$\mu_3 \alpha_1 + \alpha_3 (\alpha_2 - \mu_1) = \frac{\alpha_5 \alpha_1^2}{\alpha_2 - \mu_1}.$$

В результаті перетворень, система (4) зводиться до рівняння $W' = AW^2 + BW$, розв'язок якого має вигляд $W = \frac{B}{\text{const} \cdot e^{-Bt} - A}$. Тоді перше рівняння системи (4) зводиться до рівняння Бернуллі:

$$\dot{U} - \left(\mu_1 + \frac{\mu_4}{\varphi_2} W(y) \right) U = \left(\mu_3 - \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \mu_4 \right) U^2.$$

Розв'язок 3. З огляду на поліноміальний характер динамічної системи (3), цілком природно припустити існування розв'язків, таких що $Z = Z(U) \equiv \sum_{i=0}^n A_i U^i$, де A_i невідомі коефіцієнти. Виявляється, що система (3) допускає розв'язок вигляду $Z = A_0 + A_1 U + A_2 U^2$, де A_0 задовольняє рівняння $A_0(A_0(1 + \tau\xi) - \kappa - \chi\tau\xi) = 0$.

Якщо $A_0 = \frac{\kappa + \chi\tau\xi}{1 + \tau\xi}$, то коефіцієнти

$$A_2 = \frac{1 + 2\beta}{(1 - \beta)(1 + \tau\xi)}, \quad A_1 = \frac{(\chi - \kappa)\tau(\gamma + \beta\gamma + 2\beta D\xi)}{(\kappa(1 + \beta) + \beta\chi\tau\xi)(1 + \tau\xi)}.$$

Для існування розв'язку слід накласти дві додаткові умови на параметри

$$\kappa = \frac{\beta\chi\gamma\tau(1 + \beta - \tau\xi + \beta\tau\xi)}{\gamma\tau + \beta(2D + \gamma\tau) + 2\beta^2 D(1 + \tau\xi)},$$

$$\chi = \frac{(1 - \beta)(2\beta D + \gamma\tau - \beta\gamma\tau)(\gamma\tau + \beta(2D + \gamma\tau) + 2\beta^2 D(1 + \tau\xi))}{\beta^2(1 + 2\beta)(1 + \beta - \tau\xi + \beta\tau\xi)^2}.$$

Як приклад зафіксуємо значення вільних параметрів $D = 0,5, \gamma = -1, \tau = 0,4, \xi = 0,8, \beta = 0,4$. Тоді $\kappa = -0,0442, \chi = 0,0117$. Коефіцієнти $A_2 = -2,2727, A_1 = 0,3030$. Отже, перший інтеграл динамічної системи (3) має вигляд $Z = A_0 + A_1 U + A_2 U^2$, що дає

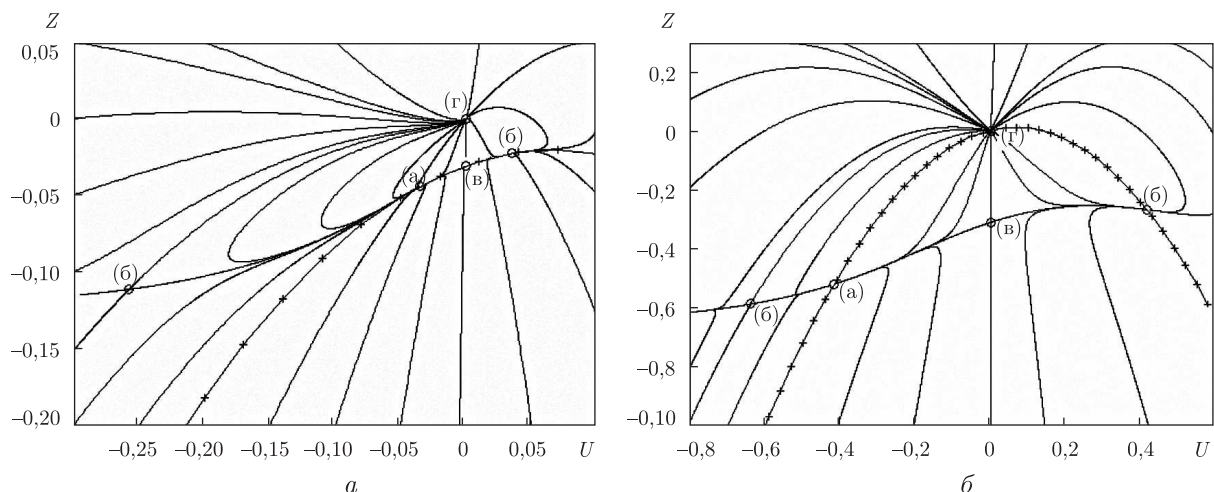


Рис. 1. Фазовий портрет динамічної системи (3) при $D = 0,5$, $\gamma = -1$, $\tau = 0,4$, $\beta = 0,4$, $\xi = 0,8$ та $\kappa = -0,0442$, $\chi = 0,0117$ (а) й $\kappa = -0,5208$, $\chi = 0,3423$ (б)

зможу обчислити U із звичайного диференціального рівняння з відокремленими змінними вигляду $\dot{U} = (\kappa - (1 + \tau\xi)A_0 - (\tau\gamma + (1 + \tau\xi)A_1)U - A_2(1 + \tau\xi)U^2)U$.

Якщо вибрати $A_0 = 0$, тоді

$$\kappa = \frac{(1 + \beta)\chi(2\beta D\xi + \gamma(\beta + \tau\xi))}{\beta(2\beta D\xi + \gamma(\beta - 1))}, \quad \chi = \frac{\gamma(\beta - 1)(2\beta D\xi + \gamma(\beta - 1))}{\xi^2(1 + 3\beta + 2\beta^2)},$$

$$A_2 = \frac{1 + 2\beta}{(\beta - 1)(1 + \tau\xi)}, \quad A_1 = -\frac{\chi\gamma\tau + \beta\chi\gamma\tau - 2D\kappa\beta}{(1 + \beta)\chi\tau\xi + \beta\kappa}.$$

При $D = 0,5$, $\gamma = -1$, $\tau = 0,4$, $\xi = 0,8$, $\beta = 0,4$ отримаємо $\kappa = -0,5208$, $\chi = 0,3423$. Значення коефіцієнтів параболи ті самі, що й у попередньому випадку $A_2 = -2,2727$, $A_1 = 0,3030$. На рис. 1 зображено фазові портрети [7] динамічної системи (3), на яких показано графіки функції $Z = A_0 + A_1U + A_2U^2$ (лінії з позначками “+”). Слід зазначити, що графіки проходять через стаціонарні точки. Цей факт можна перевірити також аналітично. Використання многочленів $Z = \sum_{i=0}^n A_i U^i$ третього та вищих степенів показує, що розв’язків у такому вигляді динамічна система не має.

Якісний аналіз динамічної системи (3). Використовуючи методи якісного аналізу, детально розглянемо структуру фазових портретів у загальному випадку цієї системи. Для пошуку стаціонарних точок прирівняємо праві частини системи (3) до нуля. Тоді стаціонарні точки мають такі координати:

$$U_0 = -\frac{\kappa\xi}{\gamma}, \quad Z_0 = \kappa, \tag{а}$$

$$U_1 = \frac{-\beta D + \sqrt{\chi + 3\beta\chi + 2\beta^2\chi + \beta^2 D^2}}{1 + 2\beta},$$

$$U_2 = \frac{-\beta D - \sqrt{\chi + 3\beta\chi + 2\beta^2\chi + \beta^2 D^2}}{1 + 2\beta}, \quad Z_{1,2} = \frac{\kappa - \tau\gamma U_{1,2}}{1 + \tau\xi}. \tag{б}$$

Якщо ж $U = 0$, то стаціонарні точки наведемо в формі

$$U_3 = 0, \quad Z_3 = \frac{\kappa + \chi\tau\xi}{1 + \tau\xi}, \quad (в)$$

$$U_4 = 0, \quad Z_4 = 0. \quad (г)$$

Власні значення лінеаризованої матриці $J_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ для точки (в)

$$\lambda_1 = -\chi\tau\xi, \quad \lambda_2 = -(1 + \beta)(\kappa + \chi\tau\xi) \quad (\text{завжди вузлова точка})$$

та для початку координат — точки (г)

$$\lambda_1 = \kappa, \quad \lambda_2 = (1 + \beta)(\kappa + \chi\tau\xi) \quad (\text{завжди вузол}).$$

Тип стійкості інших точок залежать від інваріантів матриці J : від сліду $\text{sp}(J)$ та визначника $\det(J)$. Визначимо умови, при яких $\text{Tr}_i = \text{sp}(J_i)$ та $\Delta_i = \text{sp}(J_i)^2 - 4\det(J_i)$ дорівнюють нулю. Зміни знаків цих величин пов'язані з появою коливних розв'язків у системі та зміною їх стійкості. Зокрема, для стаціонарної точки $(U_0; Z_0)$

$$\text{sp}(J) = \gamma^{-2} \{ \kappa^2 \xi^2 (1 + 2\beta) - 2\beta D \gamma \kappa \xi - \gamma^2 (\kappa(1 + \beta + \beta\tau\xi) - (1 + \beta)\chi\tau\xi) \} = 0.$$

З останнього рівняння можна визначити залежність β від інших параметрів задачі:

$$\beta = \frac{\gamma^2 (\kappa - \tau\xi\chi) - \xi^2 \kappa^2}{2\xi^2 \kappa^2 - \gamma^2 (\kappa + \kappa\tau\xi - \chi\tau\xi) - 2D\gamma\kappa\xi}. \quad (7)$$

Аналогічно для точок (б) з умови виродження впливає співвідношення

$$\begin{aligned} \kappa^+ &= \frac{\beta(-\beta D + \sqrt{\chi + 3\beta\chi + 2\beta^2\chi + \beta^2 D^2})\gamma\tau + (1 + 3\beta + 2\beta^2)\chi(1 + \tau\xi)}{(1 + \beta)(1 + 2\beta)}, \\ \kappa^- &= \frac{\beta(-\beta D - \sqrt{\chi + 3\beta\chi + 2\beta^2\chi + \beta^2 D^2})\gamma\tau + (1 + 3\beta + 2\beta^2)\chi(1 + \tau\xi)}{(1 + \beta)(1 + 2\beta)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уявлення про форму та взаємне положення кривих, заданих формулами (7) та (8), дає рис. 2. На рис. 2, а суцільною товстою лінією зображено графік функції (7), суцільною тонкою — криву $\kappa^+(\beta)$, штриховою — $\kappa^-(\beta)$.

Визначник $\det(J_0)$ у точці $(U_0; Z_0)$

$$\gamma^2 \det(J_0) = \kappa(\kappa - r_1)(\kappa - r_2),$$

де

$$r_1 = \frac{(\beta D + \sqrt{(1 + \beta)(1 + 2\beta)\chi + \beta^2 D^2})\gamma}{\xi(1 + 2\beta)}, \quad r_2 = \frac{(\beta D - \sqrt{(1 + \beta)(1 + 2\beta)\chi + \beta^2 D^2})\gamma}{\xi(1 + 2\beta)}.$$

Визначники $\det(J_{1,2})$ у точках $(U_{1,2}; Z_{1,2})$ $\det(J_1) = (\kappa - r_1)$ та $\det(J_2) = (\kappa - r_2)$.

Поява коливних режимів визначається знаком величини $\text{sp}(J)^2 - 4\det(J)$. На рис. 2, б зображено графіки, які відповідають розв'язкам $\text{sp}(J)^2 - 4\det(J) = 0$. Аналізуючи графіки рис. 2 можна встановити типи точок та їх біфуркаційні зміни при зростанні параметра β .

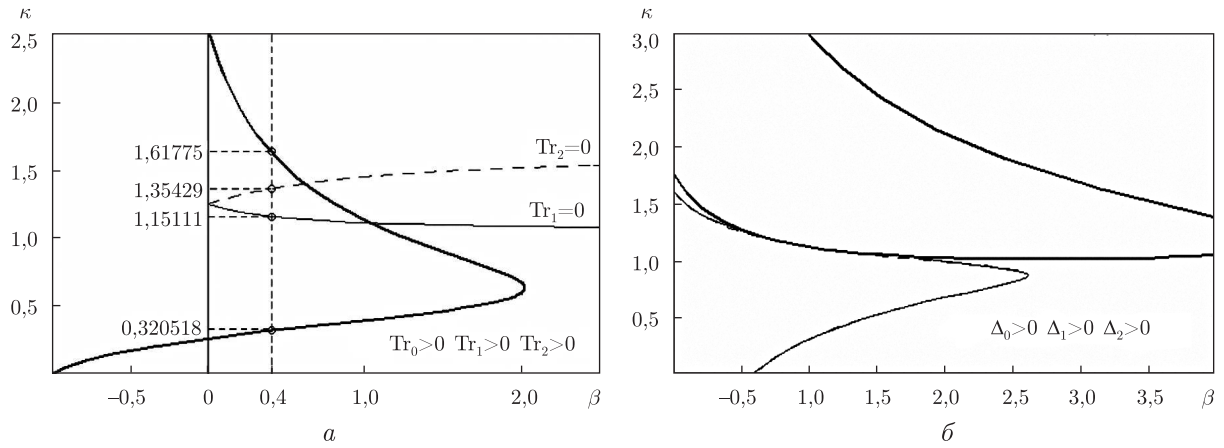


Рис. 2. Графіки функцій (7) й (8) (а) та розв'язків рівнянь $\Delta_i = 0$ (б) при $D = 0,5$, $\gamma = -1$, $\tau = 0,4$, $\chi = 1$, $\xi = 0,6$

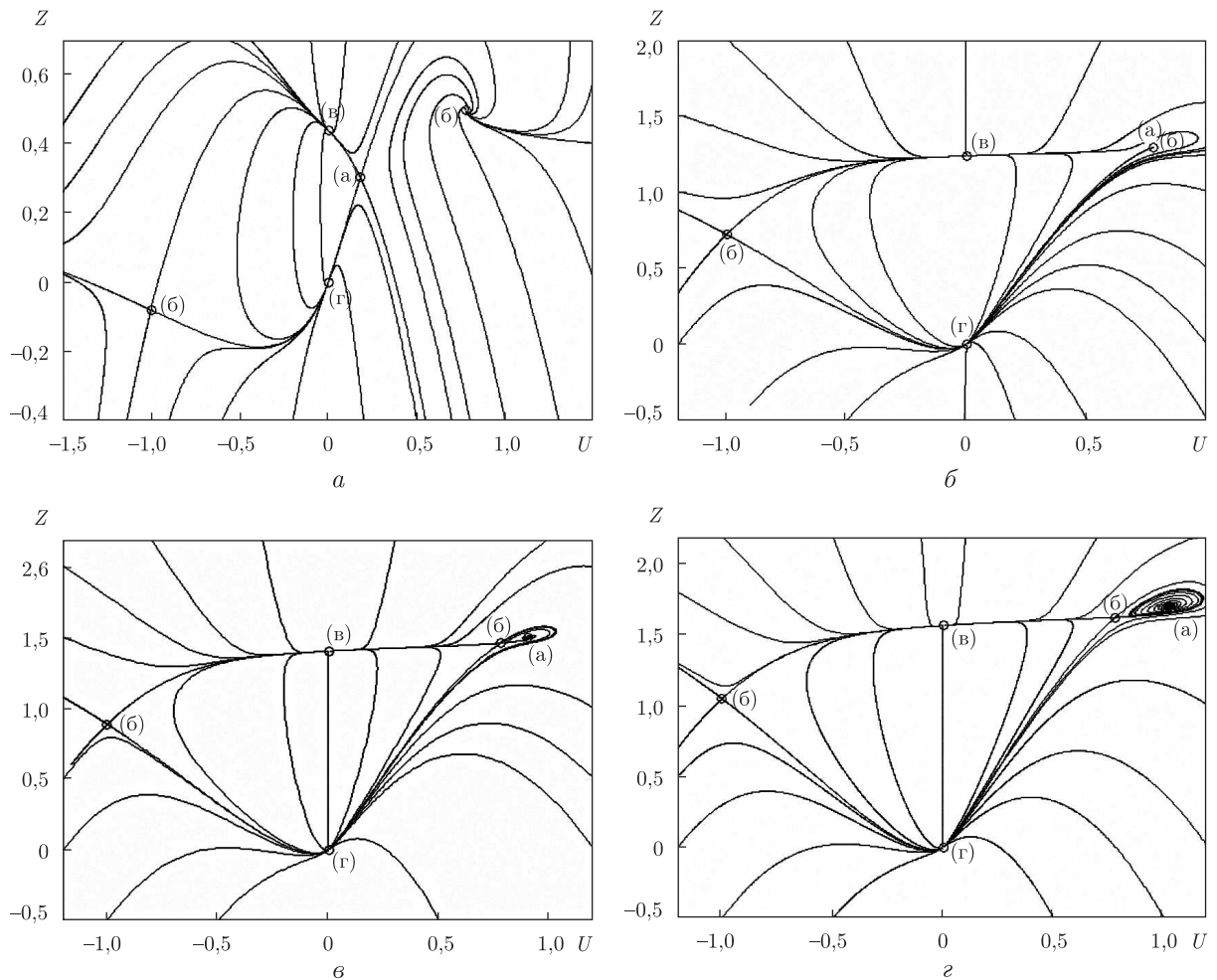


Рис. 3. Фазові портрети динамічної системи (3) при $\kappa = 0,3$ (а), $\kappa = 1,29$ (б), $\kappa = 1,5$ (в) й $\kappa = 1,7$ (г)

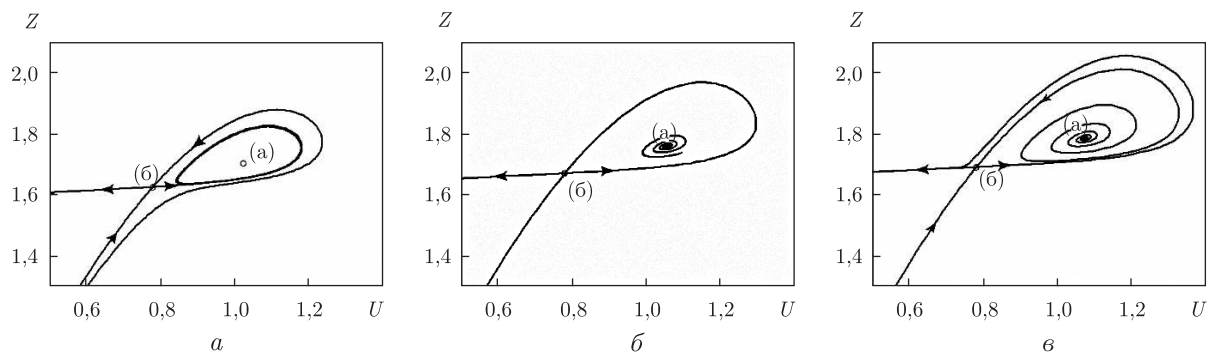


Рис. 4. Біфуркація гомоклінічної петлі сідлової точки $(U_1; Z_1)$: а — $\kappa < \kappa_0$; б — $\kappa = \kappa_0$; в — $\kappa > \kappa_0$

Розглянемо типові фазові портрети при $\beta = 0,4$ (див. штрихову вертикальну лінію на рис. 2, а) та змінному κ .

При $\kappa = 0,3$ точки $(U_0; Z_0)$ й $(U_2; Z_2)$ є сідловою, $(U_1; Z_1)$ — нестійкий фокус, інші точки є вузловими (рис. 3, а). З рис. 2, б випливає, що при $\kappa < 1,2822$ стаціонарні точки не змінюються за типом стійкості. При $1,2822 < \kappa < 1,3122$ точка $(U_0; Z_0)$ — сідло, $(U_1; Z_1)$ — вузол. На рис. 3, а зображено типовий фазовий портрет при $\kappa = 1,29$, на якому немає жодної стаціонарної точки фокусного типу.

При $1,3122 < \kappa$ $(U_0; Z_0)$ — стійкий фокус та $(U_1; Z_1)$ — сідло. Типовий фазовий портрет зображено на рис. 3 при $\kappa = 1,5$. При $\kappa = 1,6178$ відбувається зміна знаку дійсної частини власних значень матриці J з появою нестійкого фокуса. При значеннях параметра $\kappa > 1,6178$ в околі точки $(U_0; Z_0)$ виявлено граничний цикл (рис. 3, в). Його утворення пов'язане з біфуркацією [7] гомоклінічної петлі стаціонарної точки $(U_1; Z_1)$, яка має місце при $\kappa_0 \approx 1,756691291$ (рис. 4). При $\kappa > \kappa_0$ сепаратиси сідла $(U_1; Z_1)$ не перетинаються та прямують до стійких стаціонарних точок $(U_0; Z_0)$ та $(U_3; Z_3)$.

З аналізу точних та асимптотичних розв'язків системи (3) випливає, що параметр β урізноманітнює типи хвильових розв'язків моделі (1). Як свідчать результати якісного аналізу динамічної системи (3), врахування параметра β спричинює утворення нових біфуркаційних поверхонь у фазовому просторі системи (3), що впливає на стійкість стаціонарних режимів (див. рис. 2) та веде до перебудови структури фазових просторів. Зазначимо, що при $\beta \neq 0$ спостерігається зміщення моментів реалізації ряду ефектів (народження періодичних траєкторій, утворення гомоклінічних петель) у просторі параметрів моделі, що дає більшу свободу при зіставленні розв'язків з природними явищами.

Таким чином, урахування дискретності середовища та, як наслідок, розривного характеру польових функцій у сусідніх структурних елементах змінює структуру хвильових розв'язків. Тим самим дискретність середовищ виступає одним із джерел активності середовищ та пов'язана з виникненням у них нестійкостей.

1. Садовський М. А. Автомодельность геодинамических процессов // Вестн. АН СССР. — 1986. — № 8. — С. 3–11.
2. Гольдин С. В. Деструкция литосферы и физическая мезомеханика // Физ. мезомеханика. — 2002. — 5, № 5. — С. 5–22.
3. Даниленко В. А. До теорії руху блочно-ієрархічних геофізичних середовищ // Доп. АН України. — 1992. — № 2. — С. 86–89.
4. Даниленко В. А., Даневич Т. Б., Скурятівський С. І. Нелінійні математичні моделі середовищ з часовою та просторовою нелокальністю. — Київ: Ін-т геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, 2008. — 86 с.

5. Кунин И. А. Теория упругих тел с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 415 с.
6. Eringen A. C. Nonlocal continuum field theories. – New York: Springer, 2001. – 376 p.
7. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – Москва: Наука, 1976. – 496 с.

Відділення геодинаміки вибуху
Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 24.02.2011

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. A. Danylenko, S. I. Skurativskyy**

Wave solutions of the nonlocal model of a block medium

The article is devoted to the description of wave fields in block media with discontinuities of velocities and stresses between structure elements. The averaged mathematical model of a medium admits a number of exact and asymptotic solutions. Using the methods of qualitative analysis, we found the solutions of the model in the form of switching waves with different types of fronts, periodic, cnoidal, and solitary waves.